



TÉCNICO LISBOA

Particle Physics

(Version for 2017-2018)

Jorge Crispim Romão

**Physics Department
2017**

Contents

1	Brief overview of non-relativistic Quantum Mechanics	1
1.1	Princípios básicos da mecânica quântica	1
1.2	A equação de Schrödinger	3
1.3	O átomo de hidrogénio	4
1.3.1	A equação de Schrödinger para o átomo de hidrogénio	4
1.3.2	Significado físico dos resultados	6
1.3.3	O spin	7
1.3.4	Adição de momentos angulares	8
1.4	The Clebsch-Gordon coefficients	9
1.5	Fermi Golden Rule	11
1.6	The Rutherford cross section	13
1.6.1	Classical derivation	13
1.6.2	Rutherford Scattering: Non-Relativistic QM	15
	Problemas Capítulo 1	18
2	Relativistic Quantum Mechanics: Collisions and Decays	19
2.1	Introdução	19
2.2	Sistema de unidades naturais	19
2.3	Decays	21
2.3.1	From non-relativistic to relativistic QM	21
2.3.2	The meaning of the decay rate Γ	23
2.3.3	The Golden Rule for the decays	23
2.3.4	Dimensões de Γ e de $\mathcal{M}$	24
2.3.5	Decaimentos para duas partículas	25
2.4	Scattering processes	26
2.4.1	From transition rates to interaction cross sections	26
2.4.2	The Golden Rule for cross sections	28
2.4.3	Colisões $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no CM	29
2.5	Regras de Feynman para um modelo sem spin	30
2.5.1	Tempo de vida média de A	32
2.5.2	Colisão $A + A \rightarrow B + B$	33
2.5.3	Processos de ordem superior	34
	Problemas Capítulo 2	35

3	Symmetries in Particle Physics	37
3.1	Symmetries, Groups and Conservation Laws	37
3.2	Continuous Groups in Physics	41
3.2.1	Algebras	41
3.2.2	The Pauli Matrices and $\mathbf{SU}(2)$	42
3.3	Angular Momentum and $\mathbf{O}(3)$	42
3.4	Spin 1/2 and $\mathbf{SU}(2)$	43
3.4.1	Rotations of spinors	44
3.5	Internal Symmetries	44
3.5.1	Isospin	44
3.5.2	The $\mathbf{SU}(3)$ Algebra: The Gell-Mann Matrices	46
3.5.3	The Eightfold Way at work: The light mesons	48
3.5.4	The Eightfold Way at work: The light baryons ($q_1 q_2 q_3$)	50
3.5.5	The Eightfold Way at work: Comments and extensions	51
3.6	Discrete Symmetries	52
3.6.1	Parity	52
3.6.2	Charge Conjugation	55
3.6.3	CP Violation	56
3.6.4	Time Reversal and the TCP theorem	56
	Problemas Capítulo 3	57
4	Klein-Gordon and Dirac equations	59
4.1	A equação de Klein-Gordon.	59
4.2	A equação de Dirac	61
	Complemento 4.1 Tensores simétricos e anti-simétricos	62
4.3	Spin e a equação de Dirac	64
4.4	Soluções para a partícula livre	66
4.4.1	Soluções da equação de Dirac no referencial próprio	66
4.4.2	Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$	67
4.5	Covariância da equação de Dirac	70
4.5.1	Transformações de spinores	70
4.5.2	Adjunto de Dirac	71
4.5.3	Covariantes bilineares	72
4.6	Antipartículas	73
4.6.1	A teoria dos buracos de Dirac.	73
4.6.2	A interpretação de Feynman-Stückelberg	74
4.6.3	Conjugação de carga	75
4.7	Spin e helicidade	76
4.7.1	Helicidade	77
4.7.2	Spinores de helicidade	78
	Problemas Capítulo 4	80

5	Quantum Field Theory and Feynman Diagrams	85
5.1	Feynman Diagrams and Time Ordering	85
5.2	O fóton	87
5.3	A eletrodinâmica quântica (QED)	89
5.4	Regras de Feynman para QED	90
5.5	Exemplos	92
5.5.1	Colisão elástica elétron-muão	92
5.5.2	Colisão elástica elétron-positrão	93
5.5.3	Efeito de Compton	93
5.6	A real calculation: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	94
5.6.1	The helicity amplitudes	94
5.6.2	Understanding the result	98
5.6.3	Chirality	99
5.6.4	Chirality in QED	99
5.7	How to calculate other processes	100
5.7.1	Bhabha scattering	100
5.7.2	t-channel currents	101
5.7.3	Final result for Bhabha scattering	101
5.7.4	u-channel Amplitudes	102
5.8	Produção de hádrons em colisões $e^- + e^+$	102
5.8.1	Hadronização	102
5.8.2	Processo elementar	103
5.8.3	A razão R	105
	Problemas Capítulo 5	108
6	Gauge Invariance	109
6.1	Lagrangeanos em mecânica clássica	109
6.2	Lagrangeanos em teoria de campo	110
6.2.1	Comments on the Dirac Lagrangian	112
6.3	Invariância de gauge. O eletromagnetismo	113
6.4	Teorias de Yang-Mills	115
6.5	Regras de Feynman para a teoria de gauge	119
6.5.1	Propagadores	119
6.5.2	Vértices	119
	Problemas Capítulo 6	121
7	Weak Interactions: from Fermi Model to the V-A Theory	125
7.1	A teoria de Fermi	125
7.2	A teoria V-A	127
7.2.1	Introdução	127
7.2.2	Violação de paridade nas interações fracas	127
7.2.3	Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica	128
7.2.4	A interação corrente-corrente de Feynman e Gell-Mann	130

7.3	As interações fracas dos hádrões	132
7.3.1	Universalidade e a teoria de Cabibbo	132
7.3.2	O mecanismo de GIM e a descoberta do charm	135
7.4	A hipótese do bóson vetorial intermédio	137
7.5	Problemas com a teoria corrente-corrente	139
7.5.1	Violação da unitariedade na interação de Fermi	139
7.5.2	Violação de unitariedade no modelo IVB	141
	Problemas Capítulo 7	143
8	Spontaneous Symmetry Breaking; Higgs Mechanism	145
8.1	Introdução	145
8.2	O teorema de Goldstone	151
8.3	O mecanismo de Higgs	156
	Problemas Capítulo 8	163
9	The Electroweak Standard Model: $SU(2)_L \times U_Y(1)$	165
9.1	Introdução	165
9.2	O sector de gauge	166
9.3	As interações fracas dos léptões	168
9.3.1	As representações e números quânticos	169
9.3.2	As correntes carregadas	171
9.3.3	As correntes neutras	173
9.4	A introdução dos quarks	174
9.5	A massa dos Léptões	176
9.6	Simple Examples	178
9.6.1	Decay $Z \rightarrow f\bar{f}$	178
9.6.2	Scattering $e^-\bar{\nu}_e \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu$	181
	Problemas Capítulo 9	185
10	CP Violation and the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix	189
10.1	A massa dos quarks	189
10.2	Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$	192
10.2.1	A simetria CP	192
10.2.2	Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$	194
10.2.3	Violação de CP noutros sistemas	196
10.3	Violação de CP e a matriz CKM	196
10.3.1	A matriz CKM	196
10.3.2	Contagem de parâmetros na matriz CKM	198
10.3.3	Parametrizações da matriz CKM	199
10.3.4	Confrontado a experiência com a matriz CKM	200
	Problemas Capítulo 10	201

A	How to do Calculations in Particle Physics	203
A.1	Introduction	203
A.2	Fermi Golden Rule	203
A.3	The CM Reference Frame	203
A.4	Feynman Rules	204
A.4.1	Propagators	204
A.4.2	Vertices	205
A.5	Results for the Helicity Currents	206
A.5.1	s-channel	206
A.5.2	t-channel	207
A.5.3	u-channel	207
A.6	Simple Examples	208
A.6.1	$e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ in QED	208
A.6.2	Bhabha scattering	209
A.6.3	Decay $Z \rightarrow f\bar{f}$	210
A.6.4	Scattering $e^-\bar{\nu}_e \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu$	212
A.6.5	Scattering $\mu^-\bar{\nu}_\mu \rightarrow e^-\bar{\nu}_e$	214

Preface

This text is a companion to my classes in the Particle Physics course at Instituto Superior Técnico. This is taught jointly with Mário Pimenta and Ruben Conceição. In our division of labour, I teach the more theoretical and formal aspects and they teach the phenomenological and experimental parts. Of course there is no clear line dividing the topics and this should be considered only as part of the whole course. For a book covering all the aspects you should refer to the recommended book of Mark Thomson [1].

Parts of this course were first written in Portuguese. Then, at a latter stage, I added some new text and then I realized that this text could be more useful if it was all in English. As the process of revising the whole text shall take a long time, I decided to make available a *mixed language* text.

IST, Fall 2017
Jorge C. Romão
`jorge.romao@ist.utl.pt`

Chapter 1

Brief overview of non-relativistic Quantum Mechanics

In this brief introduction to Quantum Mechanics we follow sections 5.1 to 5.3 of Griffiths [2], section 1.1 of my text *Introdução à Teoria de Campo* [3] and sections 2.3.6 and 3.2 of Thomson [1]. It is assumed as pre-requisit the knowledge of the essential of chapters 1 to 5 of the book *Quantum Mechanics* by Griffiths [4].

1.1 Princípios básicos da mecânica quântica

A mecânica quântica [4, 5] baseia-se nos seguintes princípios:

- Para o estado físico existe uma função de estado $|\Phi\rangle$ que contém toda a informação possível sobre o sistema. Na maior parte dos casos tratemos com uma representação do estado $|\Phi\rangle$ em termos das coordenadas, a chamada função de onda $\Psi(q_i, s, t)$ onde s designa outros números quânticos para além dos possíveis de descrever a partir das coordenadas (por exemplo o spin). $|\Psi(q_i, s_i, t)|^2 \geq 0$ tem a interpretação duma densidade de probabilidade de encontrar o sistema num estado com coordenadas q_i , números quânticos internos s_i , no instante t .
- As observáveis físicas são representadas por operadores hermiticos lineares. Por exemplo

$$p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (1.1)$$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.2)$$

- Um estado $|\Phi\rangle$ do sistema é um estado próprio de operador Ω se

$$\Omega |\Phi_n\rangle = \omega_n |\Phi_n\rangle \quad (1.3)$$

onde $|\Phi_n\rangle$ é o estado próprio a que corresponde o valor próprio ω_n . Se Ω for hermitico então os ω_n são reais. Na representação das *coordenadas* temos

$$\Omega(q, s, t)\Psi(q, s, t) = \omega_n \Psi(q, s, t) \quad (1.4)$$

- Existe um conjunto completo e ortonormal de funções próprias, Ψ_n , dum conjunto completo de operadores que comutam $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots\}$. Uma função de onda arbitrária pode ser expandida em termos desse conjunto completo

$$\Psi = \sum_n a_n \Psi_n \quad (1.5)$$

- O resultado duma medição é qualquer um dos valores próprios. Se $\Psi = \sum_n a_n \Psi_n$ com $\Omega \Psi_n = \omega_n \Psi_n$ então o resultado da medição será o valor ω_n com probabilidade $|a_n|^2$. O valor médio duma observável é dado por

$$\langle \Omega \rangle_\Psi = \sum_s \int dq_1 \dots \Psi^*(q_i, s_i, t) \Omega \Psi(q_i, s_i, t) = \sum_n |a_n|^2 \omega_n \quad (1.6)$$

- A evolução no tempo dum sistema físico é dada pela equação

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad (1.7)$$

- onde o Hamiltoniano H é um operador linear e hermitico. A linearidade implica o princípio de sobreposição e a hermiticidade conduz à *conservação* de probabilidade

$$\frac{d}{dt} \sum_s \int dq_1 \dots \Psi^* \Psi = \frac{i}{\hbar} \sum_s \int dq_1 \dots [(H \Psi)^* \Psi - \Psi^* (H \Psi)] = 0 \quad (1.8)$$

Exemplo 1.1 *Demonstre a afirmação anterior.*

A equação conjugada da Eq. (1.7) é

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = H \psi^* \quad (1.9)$$

onde usámos a hermiticidade de $H = H^\dagger$. Então multiplicando a Eq. (1.9) à direita por ψ e a Eq. (1.7) à esquerda por ψ^ e subtraindo obtemos*

$$-i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) = -i\hbar \frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} = (H \psi^*) \psi - \psi^* H \psi \quad (1.10)$$

Integrando nas coordenadas e somando em todas as outras variáveis internas, obtemos então

$$\frac{d}{dt} \sum_s \int dq_1 \cdots \Psi^* \Psi = \frac{i}{\hbar} \sum_s \int dq_1 \cdots [(H\Psi)^* \Psi - \Psi^* (H\Psi)] = 0 \quad (1.11)$$

onde o último passo resulta da definição de operador hermitico. Na notação de Dirac

$$\langle H\psi | \psi \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle . \quad (1.12)$$

1.2 A equação de Schrödinger

A evolução dum sistema quântico, bem como a descoberta dos seus estados estacionários, é obtida resolvendo a equação de Schrödinger, Eq. (1.7). Para sistemas a 3 dimensões a equação escreve-se

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.13)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.14)$$

é o operador Laplaciano.

Se $V(\vec{r})$ não depende do tempo a equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (1.15)$$

onde $\psi(\vec{r})$ satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (1.16)$$

que tem a forma duma equação aos valores próprios

$$H\psi = E\psi \quad (1.17)$$

onde ψ é a função própria do Hamiltoniano H , e E o seu valor próprio. Os estados que satisfazem a Eq. (2.5) são designados por estados estacionários com a energia E que resulta de resolver a Eq. (1.16).

Resulta que os valores para os quais a equação de Schrödinger independente do tempo tem soluções bem comportadas, isto é que satisfaçam a condição de normalização

$$\int d^3r |\Psi|^2 = 1 \quad (1.18)$$

são discretos. Para se ter uma ideia gráfica do que está a acontecer recomendo que façam o exercício 2.54 do Griffiths (Quantum Mechanics [4]).

Em muitos problemas o sistema tem simetria esférica. Nesse caso pode usar-se o resultado, válido em coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \quad (1.19)$$

onde $\vec{L}$ é o operador momento angular, para separar ainda mais as soluções. Sabe-se que as funções próprias do operador L^2 são as harmônicas esféricas, isto é,

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.20)$$

$$L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi) . \quad (1.21)$$

Notar que as harmônicas esféricas são funções próprias simultâneas dos operadores L_z e L^2 pois eles comutam.

Usando estes resultados, para o caso de simetria esférica $V(\vec{r}) = V(r)$, a equação de Schrödinger separa-se nas 3 variáveis r, θ e ϕ ,

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.22)$$

onde a função radial satisfaz a equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = ER \quad (1.23)$$

É por vezes conveniente escrever $R(r) = u(r)/r$. Então a função $u(r)$ satisfaz

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (1.24)$$

que é uma equação para um potencial a uma dimensão aumentada pela barreira centrífuga.

1.3 O átomo de hidrogénio

1.3.1 A equação de Schrödinger para o átomo de hidrogénio

No nosso estudo simplificado vamos considerar o protão como fixo e o eletrão descrevendo um movimento em torno dele. Esta é uma boa aproximação, pois a massa do protão é cerca de 2000 vezes maior do que a do eletrão. Assim a energia potencial do eletrão no campo do protão é

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (1.25)$$

onde r é a distância entre o eletrão e o protão. Como se trata dum potencial com simetria esférica (potencial central) as soluções são da forma geral,

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.26)$$

onde a equação radial é

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2m}{\hbar^2} \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R + \frac{2mE}{\hbar^2} R = 0 . \quad (1.27)$$

As harmónicas esféricas são o produto das soluções das equações para θ e ϕ

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \ell(\ell+1) \sin \theta - \frac{m_\ell^2}{\sin \theta} \Theta = 0 . \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_\ell^2 , \quad (1.29)$$

convenientemente normalizadas,

$$Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi) \equiv N_{\ell m_\ell} P_\ell^{m_\ell}(\theta) e^{im_\ell \phi}$$

$$N_{\ell m_\ell} = (-1)^m \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m_\ell)!}{(\ell+m_\ell)!} \right]^{1/2} , \quad (1.30)$$

onde $P_\ell^{m_\ell}(\theta)$ são os polinómios associados de Legendre e a normalização é convencional.

O problema de encontrar as soluções gerais das Eqs. (1.27) e (1.28) pode ser revisto em qualquer curso básico em mecânica quântica (por exemplo Griffiths [4]). Para os nossos fins aqui basta-nos indicar sem demonstração os resultados.

- i) Quando resolvemos a Eq. (1.29) para $\Phi(\phi)$ encontramos que as únicas soluções que satisfazem as condições apropriadas são aquelas para as quais m_ℓ é inteiro,

$$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.31)$$

- ii) Quando resolvemos a Eq. (1.28) para $\Theta(\theta)$ encontramos que as únicas soluções que são *finitas* em todo o lado (para todos os θ 's) são aquelas em que

$$\ell = 0, 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

e

$$\ell \geq |m_\ell| . \quad (1.33)$$

- iii) Quando resolvemos a equação radial para $R(r)$ encontramos que as únicas soluções que são finitas em toda a parte (isto é, para $0 \leq r \leq \infty$) são aquelas para as quais

$$E_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.34)$$

e

$$\ell < n . \quad (1.35)$$

Tomando em conta as Eqs. (4.21), (1.33) e (1.35) as restrições em m_ℓ e ℓ podem ser reescritas na forma seguinte:

$$\begin{aligned} m_\ell &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, n-1 . \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.3.2 Significado físico dos resultados

- O facto mais importante destes resultados, é que *a energia do átomo é quantizada*. Tal como no caso do poço de potencial infinito a quantificação não resulta duma imposição *à priori*, mas antes das exigências físicas sobre as funções de onda.
- O segundo facto é que a expressão para a energia é exatamente a encontrada no átomo de Bohr, que como vimos, embora introduzida duma forma *ad hoc*, explicava os resultados experimentais. A energia depende somente do inteiro n , chamado *número quântico principal*.
- Como para cada valor de n há vários valores admissíveis para ℓ e m_ℓ , é possível o eletrão ter características diferentes e manter a mesma energia. Os estados ψ que têm a mesma energia para valores de ℓ e m_ℓ diferentes são designados por *estados degenerados*.

$$\text{Grau de degenerescência} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m_\ell=-\ell}^{+\ell} 1 = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2 . \quad (1.37)$$

- Se os diferentes estados correspondentes a um dado n têm todos a mesma energia E_n , qual é a outra grandeza física que os distingue? Se tivéssemos efetuado os cálculos em detalhe teríamos compreendido que essa grandeza é o *momento angular*. Pode-se mostrar que o *quadrado* do momento angular L^2 *i.e.*

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 , \quad (1.38)$$

e o momento angular segundo o eixo dos zz , L_z , comutam simultaneamente entre si e com o Hamiltoniano do átomo de hidrogénio, isto é

$$[L^2, L_z] = 0, \quad [L^2, H] = 0, \quad [L_z, H] = 0 , \quad (1.39)$$

Assim de acordo com os resultados gerais enunciados anteriormente, as funções de onda $\psi_{n\ell m_\ell}$ deverão ser funções próprias *simultâneas* de H , L^2 e L_z .

1.3.3 O spin

Para resolver contradições no espectro dos átomos do tipo do hidrogénio na presença dum campo magnético, o chamado efeito de Zeeman, G. Uhlenbeck e S. Goudsmit propuseram que o eletrão possuía um momento angular intrínseco chamado *spin*, $\vec{S}$. A palavra spin vem do inglês e quer dizer *rodar* mas é usada na literatura de física sem tradução e significando esta propriedade do eletrão.

Mais precisamente, em mecânica quântica $\vec{S}$ é um operador que obedece à álgebra do momento angular, isto é,

$$\begin{aligned} [S_x, S_y] &= i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] &= i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] &= i\hbar S_y, \end{aligned} \quad (1.40)$$

e é quantificado de acordo com as relações

$$\begin{aligned} S^2 &= \vec{S} \cdot \vec{S} = s(s+1)\hbar^2 \quad \text{com} \quad s = \frac{1}{2} \\ S_z &= m_s \hbar \quad ; \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.41)$$

isto é, toma valores semi-inteiros.

Associado ao spin $\vec{S}$ existe um momento magnético $\vec{\mu}_s$ dado por

$$\vec{\mu}_s = -\frac{|e|\hbar}{m} \vec{S}. \quad (1.42)$$

Por vezes escreve-se esta expressão na forma equivalente,

$$\vec{\mu}_s = -\frac{|e|\hbar}{2m} g \vec{S} \quad ; \quad g = 2 \quad (1.43)$$

onde g é a chamada *razão giromagnética*. O valor $g = 2$ para o eletrão foi determinado experimentalmente para explicar o espectro dos átomos.

Ao nível da equação de Schrödinger, o spin é postulado como um número quântico adicional para o eletrão, e o fator g determinado experimentalmente. O spin só aparece naturalmente no quadro da teoria relativista de Dirac que prevê exatamente o valor $g = 2$ para o eletrão¹.

O estado do eletrão é então completamente especificado pelos números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s (pois $s = 1/2$ sempre). Notar que

$$[\vec{L}, \vec{S}] = 0, \quad (1.44)$$

pois $\vec{L}$ e $\vec{S}$ atuam em espaços diferentes, $\vec{L}$ no espaço usual e $\vec{S}$ num espaço interno abstrato. A equação anterior explica porque é que é possível ter funções próprias simultâneas de $\vec{L}$ e $\vec{S}$.

¹De facto g não é exatamente igual a 2 e a teoria de Dirac não é o fim da história. Só a eletrodinâmica quântica consegue prever corretamente a diferença $g-2 = \frac{\alpha}{2} + \dots = 0.00232$.

1.3.4 Adição de momentos angulares

Vimos na secção anterior que o estado do eletrão pode ser descrito por dois momentos angulares, $\vec{L}$ (momento angular orbital) e $\vec{S}$ (spin). Em muitas aplicações é importante definir o chamado *momento angular total*,

$$\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S} . \quad (1.45)$$

Que $\vec{J}$ é um momento angular é fácil de ver pois obedece à álgebra usual

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] &= i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] &= i\hbar J_y , \end{aligned} \quad (1.46)$$

como facilmente se mostra usando as definições anteriores. Quais os valores possíveis para $\vec{J}$? Está fora do âmbito deste curso introdutório fazer uma apresentação completa da teoria do momento angular. Os resultados são no entanto simples de apresentar e serão relevantes para a compreensão da estrutura dos átomos e moléculas. Vamos apresentá-los sob a forma de teoremas, sem demonstração:

Teorema 1.1 *Seja um operador $\vec{J}$ que obedece à álgebra do momento angular. Então os valores próprios de $J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J}$ e J_z são*

$$\begin{aligned} J^2 &= j(j+1)\hbar^2 \\ J_z &= m_j\hbar \end{aligned} \quad (1.47)$$

em que j é um inteiro ou semi-inteiro e m_j toma os $(2j+1)$ valores

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j . \quad (1.48)$$

Casos particulares deste teorema, são evidentemente os casos $\vec{J} = \vec{L}$ onde $j = \ell =$ inteiro e $\vec{J} = \vec{S}$ onde $j = s = \frac{1}{2} =$ semi-inteiro.

Teorema 1.2 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ o momento angular correspondente à soma de dois momentos angulares com valores j_1 e j_2 . Então o valor j correspondente a $\vec{J}$ pode tomar os valores*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 . \quad (1.49)$$

Exemplo 1.2 *Como exemplo de aplicação construa uma tabela para os valores possíveis para j e m_j para um elétron de momento angular $\ell = 0, 1$ e 2 .*

O momento angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ pode tomar os valores

$$|\ell - \frac{1}{2}| \leq j \leq \ell + \frac{1}{2} \quad (1.50)$$

e portanto podemos construir a tabela seguinte

ℓ	j	m_j
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

Table 1.1: Valores de j e m_j .

Teorema 1.3 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Então o número de valores possíveis de m_j obedece à relação*

$$\sum_{|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1). \quad (1.51)$$

Na tabela 1.1 pode-se verificar este último resultado para $j_1 = \frac{1}{2}$ e $j_2 = 0, 1, 2$.

1.4 The Clebsch-Gordon coefficients

A state $|J, M\rangle$ where $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ can be expressed in terms of the eigenstates of $\vec{J}_1$ and $\vec{J}_2$, denoted by $|j_1, m_1\rangle$ and $|j_2, m_2\rangle$, respectively. This relation is normally written in the form,

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{m_1=j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{m_2=j_2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \langle j_1 j_2, m_1 m_2 | J, M \rangle \quad (1.52)$$

where $m_1 + m_2 = M$ and $\langle j_1 j_2, m_1 m_2 | J, M \rangle$ are the Clebsch-Gordon coefficients. Their value can be obtained from the rules of the angular momentum operator, but normally we use tables to read the coefficients. To obtain the coefficients from the

43. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation: $\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$

$1/2 \times 1/2$

1	0
+1/2	1/2
-1/2	-1/2

$1 \times 1/2$

3/2	1/2
+3/2	1/2
+1/2	1/2
0	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2

2×1

3	2
+3	2
+2	1
0	1
-2	1
-3	2

1×1

2	1
+2	1
0	1
-2	1

$Y_\ell^m = (-1)^m Y_\ell^{m*}$

$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$

$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right)$

$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}$

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1/2$

5/2	3/2
+5/2	3/2
+3/2	1/2
1/2	1/2
-1/2	1/2
-3/2	1/2
-5/2	3/2

$3/2 \times 1$

5/2	3
-----	---

$$\begin{aligned}
|3/2, 1/2\rangle &= \sqrt{1/3} |1, 1\rangle |1/2, -1/2\rangle + \sqrt{2/3} |1, 0\rangle |1/2, 1/2\rangle \\
|1/2, 1/2\rangle &= \sqrt{2/3} |1, 1\rangle |1/2, -1/2\rangle - \sqrt{1/3} |1, 0\rangle |1/2, 1/2\rangle \\
|3/2, -1/2\rangle &= \sqrt{2/3} |1, 0\rangle |1/2, -1/2\rangle + \sqrt{1/3} |1, -1\rangle |1/2, 1/2\rangle \\
|1/2, -1/2\rangle &= \sqrt{1/3} |1, 0\rangle |1/2, -1/2\rangle - \sqrt{2/3} |1, -1\rangle |1/2, 1/2\rangle \\
|3/2, -3/2\rangle &= |1, -1\rangle |1/2, -1/2\rangle
\end{aligned} \tag{1.58}$$

1.5 Fermi Golden Rule

In Particle Physics we are normally interested in decays rates and scattering cross sections. In this course we will consider relativistic quantum mechanics, but it is useful to see first the results in non-relativistic quantum mechanics. Here we calculate the transition rates using the Fermi's golden rule. We will sketch below its derivation. In the next chapter we will make the connection with the relativistic situation.

Let $|\phi_k\rangle$ be normalized solutions of the Schrödinger equation for the unperturbed Hamiltonian H_0 ,

$$H_0 |\phi_k\rangle = E_k |\phi_k\rangle, \quad \langle \phi_j | \phi_k \rangle = \delta_{jk} \tag{1.59}$$

Now consider the time dependent perturbation $H'(\vec{x}, t)$ that can induce transitions. The Schrödinger equation for the full Hamiltonian becomes

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = [H_0 + H'] |\psi\rangle \tag{1.60}$$

$|\psi\rangle$ can be expressed in the complete set of unperturbed states

$$|\psi(\vec{x}, t)\rangle = \sum_k c_k(t) |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \tag{1.61}$$

Substituting we have,

$$i\hbar \sum_k \left[\frac{dc_k}{dt} |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} - \frac{i}{\hbar} E_k c_k |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \right] = \sum_k [c_k H_0 |\phi_k\rangle + H' c_k |\phi_k\rangle] e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \tag{1.62}$$

Using Eq. (1.59) we obtain a differential equation for the coefficients c_k

$$i\hbar \sum_k \frac{dc_k}{dt} |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} = \sum_k H' c_k |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \tag{1.63}$$

Consider now that at $t = 0$ the initial state is $|i\rangle = |\phi_i\rangle$ and that $c_k(0) = \delta_{ik}$. If the perturbation is constant for $t > 0$ and is small enough that $c_i(t) \simeq 1$ and $c_{k \neq i}(t) = 0$, we obtain to first approximation,

$$i\hbar \sum_k \frac{dc_k}{dt} |\phi_k\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \simeq H' |\phi_i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t} \tag{1.64}$$

The differential equation for the coefficient of the transition from an initial state $|i\rangle$ to a final state $|f\rangle = |\phi_f\rangle$, is obtained using the orthogonality of the states $|\phi_k\rangle$. We multiply on the left by $\langle\phi_f|$ to get,

$$\frac{dc_f}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle f|H'|i\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} \quad (1.65)$$

We define the transition matrix element (dimensions of energy)

$$T_{fi} = \langle f|H'|i\rangle = \int_V d^3x \phi_f^*(\vec{x}) H' \phi_i(\vec{x}) \quad (1.66)$$

At time $t = T$ the amplitude for transitions to state $|f\rangle$ is,

$$c_f(T) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt T_{fi} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} = -\frac{i}{\hbar} T_{fi} \int_0^T dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} \quad (1.67)$$

where the last step holds for time-independent perturbing Hamiltonian H' . The probability for the transition to the state $|f\rangle$ is,

$$P_{fi} = c_f^*(T) c_f(T) = |T_{fi}|^2 \frac{1}{\hbar^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} dt dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t'} \quad (1.68)$$

$$= |T_{fi}|^2 \frac{1}{\hbar^2} T^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (1.69)$$

where

$$x = \frac{(E_f - E_i)T}{2\hbar} \quad (1.70)$$

In Fig. 1.2 we show the plot of $\sin^2 x/x^2$ as a function of $x = (E_f - E_i)T/(2\hbar)$. It is peaked at $E_f = E_i$, that is, energy is conserved within the limits of the energy-time uncertainty relation

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \quad (1.71)$$

This means that we can take one of the integrals as a delta function

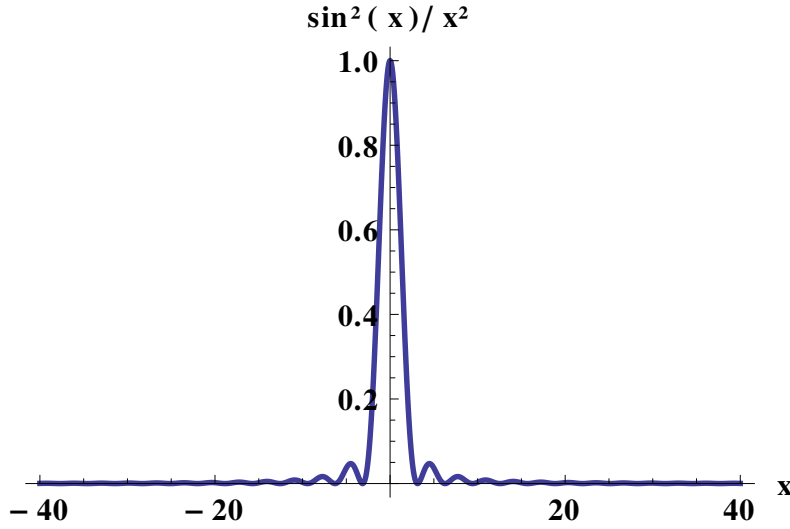
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t'} = 2\pi\hbar \delta(E_f - E_i) \quad (1.72)$$

Therefore the transition rate (probability per unit time) will be

$$d\Gamma_{fi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P_{fi}}{T} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} \delta(E_f - E_i) \right] \quad (1.73)$$

If there are dn accessible final states in the range $E_f \rightarrow E_f + dE_f$ then the total transition rate is

$$\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} \delta(E_f - E_i) \right] dE_f \quad (1.74)$$

Figure 1.2: Plot of $\sin^2 x/x^2$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \right] dE_f \quad (1.75)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f \quad (1.76)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i} \quad (1.77)$$

It is usual to define the density of states,

$$\rho(E_i) = \left| \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_i} \quad (1.78)$$

Then the Fermi Golden Rule takes the form

$$\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \rho(E_i) \quad (1.79)$$

1.6 The Rutherford cross section

The Rutherford cross section played a central role in the development of the quantum theory, as it explained the Rutherford discovery that at the center of the atoms there was an heavy nucleus. It is interesting to study the Rutherford first in classical physics and then in non-relativistic quantum mechanics. We will show that they give the same result, *a priori* an unexpected result.

1.6.1 Classical derivation

We start with the classical derivation. The geometry is shown in Fig. 1.3. The clas-

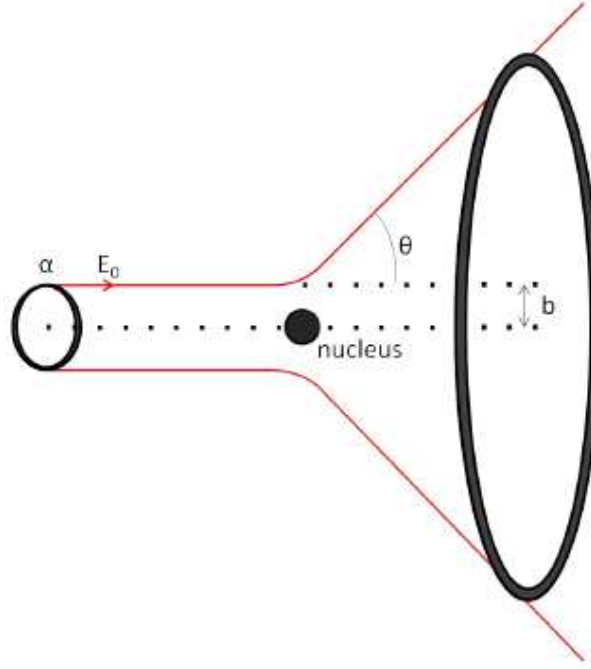


Figure 1.3: Rutherford scattering setup

sical derivation uses the results from the Kepler problem, in particular the relation between the impact parameter b and the scattering angle θ ,

$$b = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 2E_0} \cot \frac{\theta}{2} \quad (1.80)$$

where E_0 is the kinetic energy of the initial particle. The number of particles in the area between b and $b + db$ is

$$dN = 2\pi b db n_{\text{beam}} \quad (1.81)$$

where n_{beam} is the number of particles/unit area/unit time in the beam. Therefore

$$\frac{dN}{db} = 2\pi b n_{\text{beam}} = 2\pi \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 2E_0} \cot \frac{\theta}{2} n_{\text{beam}} \quad (1.82)$$

Now we get the number of particles as function of the scattering angle,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} &= \frac{dN}{db} \frac{db}{d\theta} \\ &= \frac{dN}{db} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 2E_0} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$= \pi \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 2E_0} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} n_{\text{beam}} \quad (1.83)$$

It is more usual to write this relation in terms of the solid angle Ω ,

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad \frac{d\Omega}{d\theta} = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.84)$$

We get

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dN}{d\theta} \frac{d\theta}{d\Omega} \quad (1.85)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{2E_0} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} n_{\text{beam}} \quad (1.86)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} n_{\text{beam}} \quad (1.87)$$

Finally the differential cross section is

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\frac{dN}{d\Omega}}{n_{\text{beam}}} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.88)$$

which is known as the Rutherford cross section.

1.6.2 Rutherford Scattering: Non-Relativistic QM

To derive the Rutherford cross section in non-relativistic QM we start by an intermediate result for the Fermi Golden Rule,

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 dN_f \delta(E_f - E_i) \quad (1.89)$$

The cross section for scattering by a potential is obtained dividing by the incident flux j_i , and number of particles in the target, N_t ,

$$d\sigma \equiv \frac{d\Gamma}{j_i N_t} = \frac{d\Gamma}{j_i} = \frac{1}{j_i} \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 dN_f \delta(E_f - E_i) \quad (1.90)$$

where the last step is just for one particle in the target $N_t = 1$. We are going to use plane waves for the incident and outgoing particles. As it is well known this brings a normalization problem. The solution is to normalize in a box of volume V . Then we write

$$\phi_i(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}}, \quad \phi_f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{x}}, \quad (1.91)$$

We are going to show that the factors of V cancel out in the cross section and in the end we can take the limit $V \rightarrow \infty$

We start by evaluating dN_f . The normalization of one particle in a box of volume $V = L^3$, implies that the wave function should satisfy periodic boundary conditions, that is

$$\phi(x + L, y, z) = \phi(x, y, z), \text{ etc} \quad (1.92)$$

This in turn implies that, for example,

$$e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} = e^{\frac{i}{\hbar} p_x (x+L)} \quad (1.93)$$

leading to the quantization of the momenta

$$(p_x, p_y, p_z) = (N_x, N_y, N_z) \frac{2\pi\hbar}{L} \quad (1.94)$$

where N_x, N_y, N_z are integers. Each state in momentum space occupies a volume

$$\Delta^3 p = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^3 = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \quad (1.95)$$

Then the number of states with magnitude of momentum in the interval p and $p+dp$, is obtained dividing the element of volume d^3p in momentum space by the volume occupied by one state

$$dN = \frac{d^3p}{\Delta^3 p} = V \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{d\Omega p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.96)$$

where in the last expression we used spherical coordinates in momentum space. The next step in the incident flux. With the normalization we use, the density of the initial particles is $n_i = 1/V$, and therefore the flux is

$$j_i = n_i v_i = \frac{v_i}{V}, \quad \frac{1}{j_i} = \frac{V}{v_i} \quad (1.97)$$

where v_i is the velocity of the initial particle. Finally, assuming scattering by a time independent potential $H' = U(\vec{x})$

$$T_{fi} = \int_V d^3x \phi_f^*(\vec{x}) U(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int d^3x U(\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{x}} \equiv \frac{1}{V} \mathcal{T}_{fi}(\vec{q}) \quad (1.98)$$

where $\mathcal{T}_{fi}(\vec{q})$ is the Fourier transform of the potential, and $\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f$

Putting everything together we get

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V}{v_i} \frac{1}{V^2} |\mathcal{T}_{fi}(\vec{q})|^2 V \frac{d\Omega p_f^2 dp_f}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E_f - E_i) \quad (1.99)$$

As promised the volume V disappears and we can drop it from now on, and take $V \rightarrow \infty$ in the integrals. The differential cross section is obtained by integrating in

the final momentum using the delta function. From $p^2 = 2mE$ we obtain $pdp = mdE$ and,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 v_i} \frac{1}{\hbar^4} \int p_f^2 dp_f \delta(E_f - E_i) |\mathcal{T}_{fi}(\vec{q})|^2 \quad (1.100)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 v_i} \frac{1}{\hbar^4} \int p_f mdE_f \delta(E_f - E_i) |\mathcal{T}_{fi}(\vec{q})|^2 \quad (1.101)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 v_i} \frac{1}{\hbar^4} p_f m |\mathcal{T}_{fi}(\vec{q})|^2 \quad (1.102)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p_f^2}{4\pi^2 v_i v_f \hbar^4} |\mathcal{T}_{fi}(\vec{q})|^2 \quad (1.103)$$

We note that this result is valid for any potential in non-relativistic quantum mechanics.

We are now in position to evaluate the Rutherford cross section in NRQM. The potential energy is

$$U(\vec{x}) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|} \quad (1.104)$$

where Q_1 is the electric charge of the particle in the beam and Q_2 that of the fixed target. The evaluation of the Fourier transform of the Coulomb potential is left as exercise. We get

$$\mathcal{T}_{fi}(\vec{q}) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{x}}}{|\vec{x}|} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \quad (1.105)$$

We get then for the QM Rutherford differential cross section

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p_f^2}{4\pi^2 v_i v_f \hbar^4} \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(4\pi\hbar^2)^2}{|\vec{q}|^4} = \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4m^2}{|\vec{q}|^4} \quad (1.106)$$

where we have used $p_i = p_f = mv_i = mv_f$. To compare with the classical result, we write this in terms of the transferred momentum $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ with $|\vec{q}|^2 = 8mE_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4m^2}{|\vec{q}|^4} \quad (1.107)$$

We obtain therefore the important result that the Rutherford cross section has exactly the same expression in non-relativistic QM as in classical physics. Notice that the $\hbar$, that signals a QM result disappears and the result can therefore coincide with the classical result.

Problems Chapter 1

1.1 Show explicitly that the angular momenta components obey the following commutation relations,

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (1.108)$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad (1.109)$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (1.110)$$

Using the above results also show the following important results,

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0 . \quad (1.111)$$

1.2 Use the Clebsch-Gordon table to verify the relations in Eq. (1.58).

1.3 For the Kepler problem, show the relation between the impact parameter and the scattering angle, Eq. (1.80). Hint: use the conservation of energy and of angular momentum.

1.4 Consider the Coulomb potential

$$U(\vec{x}) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad (1.112)$$

Show that its Fourier transform is

$$\int d^3x U(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{|\vec{q}|^2} \quad (1.113)$$

Hint: To do the integration, use spherical coordinates and make the substitution

$$\frac{1}{|\vec{x}|} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \quad (1.114)$$

Take the limit $\mu \rightarrow 0$ in the end.

Chapter 2

Relativistic Quantum Mechanics: Collisions and Decays

Para a transição da mecânica quântica não relativista para o caso relativista seguimos os capítulos 2 e 3 do Mark Thomson [1]. Para o modelo *ABC* para partículas de spin zero, seguimos aqui essencialmente o capítulo 6 do Griffiths [2] mas com $\hbar = c = 1$.

2.1 Introdução

Como vimos nas aulas anteriores há dois conceitos fundamentais para o estudo das propriedades das partículas elementares e das suas interações, a largura de decaimento e a secção eficaz de difusão. Estes conceitos básicos já foram introduzidos num contexto de mecânica quântica não relativista, mas na quase totalidade das experiências em física de partículas as velocidades são muito perto da velocidade da luz e portanto precisamos das expressões relativistas.

O procedimento para calcular as taxas de transição envolvidas nos decaimentos e secções eficazes é tradicionalmente designado pela regra de ouro de Fermi. Nós aqui precisamos da regra para a cinemática relativista e vamos dá-la sem demonstração, procurando compreender o seu significado através de exemplos. Para uma dedução no âmbito de QED ver por exemplo o meu texto *Introdução à Teoria de Campo* [3].

2.2 Sistema de unidades naturais

Em física de partículas tratamos de grandezas à escala sub-atómica, para as quais o sistema internacional (SI) não é bem adaptado. Assim faz sentido escolher um sistema de unidades mais adaptado a estas escalas, o chamado sistema de unidades naturais. Neste sistema as unidades [Kg,m,s] são substituídas por $[\hbar, c, \text{GeV}]$, onde $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-10} \text{ J}$, é uma unidade de energia.

No sistema de unidades naturais é usual fazer uma simplificação adicional, escolhendo $\hbar = c = 1$, complementado com $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ (notar que $c = 1$ implica

$\epsilon_0\mu_0 = 1$). Assim só há uma unidade independente, a energia. Por vezes, em vez da energia usa-se também a distância ou o tempo, sendo a conversão feita usando as relações:

$$1 = c = 2.999792 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \rightarrow 1 \text{ s} = 2.999792 \times 10^8 \text{ m} \quad (2.1)$$

$$1 = \hbar c = 197.327 \text{ MeV.fermi} \rightarrow 1 \text{ MeV}^{-1} = 197.327 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (2.2)$$

$$1 = \hbar = 1.054571 \times 10^{-34} \text{ Js} \rightarrow 1 \text{ J.s} = 9.482529 \times 10^{33} \quad (2.3)$$

Como exemplo, vamos escrever as várias unidades em termos da energia. Temos sucessivamente

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= 5.067730 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \\ 1 \text{ s} &= 1.520214 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \\ 1 \text{ Kg} &= \frac{1 \text{ J.s}}{1 \text{ m}^2 \times 1 \text{ s}^{-1}} = \frac{1 \text{ J.s} \times 1 \text{ s}}{1 \text{ m}^2} = 5.613088 \times 10^{29} \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Particularmente úteis são as relações:

$$\begin{aligned} 1 \text{ s}^{-1} &= 6.578023 \times 10^{-22} \text{ MeV} \\ 1 \text{ barn} &= 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.568189 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2} \\ 1 \text{ pb} &= 2.568189 \times 10^{-15} \text{ MeV}^{-2} \\ 1 \text{ MeV}^{-2} &= 3.893794 \times 10^{14} \text{ pb} \\ 1 \text{ GeV}^{-2} &= 3.893794 \times 10^8 \text{ pb} \\ 1 \text{ eV}^{-2} &= 1.5202 \times 10^{15} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Poderia parecer que ao fazer $\hbar = c = 1$ se perde informação. No entanto é sempre possível voltar atrás e re-introduzir estas constantes. Tomemos como exemplo a secção eficaz $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ em QED (isto é a baixas energias). No limite em que se desprezam as massas o resultado é

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \text{ GeV}^{-2} \quad (2.6)$$

onde s é o quadrado da energia no centro de massa e $\alpha = 1/137.032 \dots$, é a constante de estrutura fina. Se quisermos voltar para o sistema SI, usamos o facto de que uma secção eficaz tem as dimensões duma área. Então

$$\begin{aligned} L^2 &= (ML^2T^{-2})^{-2} \hbar^\beta c^\gamma \\ &= M^{-2} L^{-4} T^4 (ML^2T^{-1})^\beta (LT^{-1})^\gamma \\ &= M^{-2+\beta} L^{-4+2\beta+\gamma} T^{4-2\beta-\gamma} , \end{aligned} \quad (2.7)$$

que tem como solução, $\beta = 2, \gamma = 2$ e portanto a expressão correta, do ponto de vista dimensional, seria

$$\sigma = \frac{4\pi\hbar^2 c^2 \alpha^2}{s} . \quad (2.8)$$

2.3 Decays

We are interested in obtaining an expression for the transition rates. We have seen that in non-relativistic quantum mechanics this was given by the Fermi golden rule. Here we will describe the steps to go from non-relativistic to relativistic Lorentz invariant transition rates. Then we will use the formulas to obtain general expressions for the decay into two particles.

2.3.1 From non-relativistic to relativistic QM

Phase space

The first step is the phase space. We have seen that the number of states with momentum in the interval $p \rightarrow p + dp$ was given by (from now on we set $\hbar = c = 1$),

$$dN = V \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \equiv V dn, \quad dn = \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (2.9)$$

We will be using dn , number of states per unit volume, as we now that in the end the volume V cancels out. Consider now the decay of a particle a into N final state particles $a \rightarrow 1 + 2 + \dots + N$. Due to momentum conservation only $N - 1$ final state momenta are independent, therefore

$$\begin{aligned} dn &= \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \delta^3 \left(\vec{p}_a - \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) d^3p_N \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3 \left(\vec{p}_a - \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

where we used the delta function to write everything in a democratic way

Normalization

The second topic we have to address is the question of normalization of the wave functions. The wave functions appearing in the matrix element T_{fi} of the Fermi golden rule are normalized to one particle per unit volume

$$\int_V d^3x \psi^* \psi = 1 \quad (2.11)$$

This wave function normalization is not Lorentz invariant. In fact the volume will be Lorentz contracted. In relativistic QM the wave functions ψ' are normalized to $2E$ particles per unit volume

$$\int_V d^3x \psi'^* \psi' = 2E, \quad \rightarrow \quad \psi' = (2E)^{1/2} \psi \quad (2.12)$$

In relativistic QM, for a general process, $a + b + \dots \rightarrow 1 + 2 + \dots$ we define the Lorentz invariant matrix element

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 \dots | H' | \psi'_a \psi'_b \dots \rangle \quad (2.13)$$

Therefore $\mathcal{M}_{fi}$ is related to T_{fi} appearing in the golden rule by,

$$\mathcal{M}_{fi} = (2E_1 \cdot 2E_2 \dots 2E_a \cdot 2E_b \dots)^{1/2} T_{fi} \quad (2.14)$$

Lorentz invariant decays

We are now in position of writing the golden rule for the decays in a Lorentz invariant way. We consider the decay $a \rightarrow 1 + 2$. We have

$$\begin{aligned} \Gamma_{fi} &= 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_a - E_1 - E_2) dn \\ &= 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_a - E_1 - E_2) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \\ &= \int |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

We now write in terms of the Lorentz invariant matrix element,

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{2E_a} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \quad (2.16)$$

Two comments are in order: The first one is that the transition rate is inversely proportional to the energy of the decaying particle in the frame where it is observed, $E_a = \gamma m_a$, as expected from time dilation. Usually one calculates in the rest frame, where $E_a = m_a$. The second comment is related to the form of the phase space factors,

$$\frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \quad (2.17)$$

We can show that these are Lorentz invariant. Consider a Lorentz transformation along the z axis

$$d^3 p' = dp'_x dp'_y dp'_z = dp_x dp_y \frac{dp'_z}{dp_z} dp_z = d^3 p \frac{dp'_z}{dp_z} \quad (2.18)$$

Using

$$p'_z = \gamma(p_z - \beta E), \quad E' = \gamma(E - \beta p_z), \quad \frac{\partial E}{\partial p_z} = \frac{p_z}{E} \quad (2.19)$$

we get

$$\frac{dp'_z}{dp_z} = \gamma \left(1 - \beta \frac{\partial E}{\partial p_z} \right) = \gamma \left(1 - \beta \frac{p_z}{E} \right) = \frac{1}{E} \gamma (E - \beta p_z) = \frac{E'}{E} \quad (2.20)$$

implying

$$\frac{d^3 p'}{E'} = \frac{d^3 p}{E} \quad (2.21)$$

2.3.2 The meaning of the decay rate Γ

Let us clarify the meaning of the decay rate. Suppose a particle that can have different decay modes: $\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$, $\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau, \dots$ We define individual decay rates Γ_i . In the time interval dt an initial number N of such particles will give a total number of decays

$$dN = -N\Gamma_1 dt - N\Gamma_2 dt - \dots = -N \sum_i \Gamma_i dt = -N\Gamma dt \quad (2.22)$$

where $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ is the total decay rate or decay width. The number of particles that remains after time t is,

$$N(t) = N(0) e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau} \quad (2.23)$$

where the proper lifetime is

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (2.24)$$

The fraction of decays into a particular channel is called branching ratio or branching fraction and is defined as,

$$BR(i) = \frac{\Gamma_i}{\Gamma} \quad (2.25)$$

2.3.3 The Golden Rule for the decays

Consideremos a partícula 1, com massa m_1 , que no seu referencial próprio decai em várias outras partículas,

$$1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n \quad (2.26)$$

Então a fórmula para a largura de decaimento Γ é ($E_1 = m_1$),

$$\Gamma = \underbrace{\frac{1}{2m_1}}_A \underbrace{S}_B \int \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{C} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}}_D \quad (2.27)$$

Vamos explicar sucessivamente cada um dos fatores

A) Estado inicial

Este fator só depende do estado inicial através da massa da partícula que decai.

B) Fator de simetria

Para evitar contagens múltiplas, quando há partículas idênticas é preciso multiplicar por um fator $1/s!$ para cada conjunto de partículas idênticas, onde s é o número de partículas dessa espécie. Por exemplo para o decaimento $a \rightarrow b + b + c + c + c$, o fator será

$$S = \frac{1}{2!} \times \frac{1}{3!} \quad (2.28)$$

C) *Amplitude quadrada*

A dinâmica está contida neste fator. Veremos como obtê-lo a partir das regras de Feynman.

 D) *Estado final*

Este fator é o espaço de fases do estado final. A conservação de energia-momento é assegurada pela função delta, e as partículas estão na camada de massa (*on-shell* em inglês), satisfazendo $p_j^2 = m_j^2$. Nesta forma é claro que este fator é invariante de Lorentz e isto é importante em cálculos práticos. Pode-se usar a função $\delta(p_j^2 - m_j^2)\theta(p_j^0)$ para fazer uma das integrações e escrever o resultado na forma mais habitual,

$$\Gamma = \underbrace{\frac{1}{2m_1}}_A \underbrace{S}_B \underbrace{\int}_{C} \underbrace{|\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}}_D \quad (2.29)$$

onde, depois da integração as partículas finais estão on-shell com $p_j^0 > 0$.

Exemplo 2.1 Deduza a Eq. (2.29) a partir da definição, Eq. (2.27).

Para isso é preciso recordar que

$$\delta(f(x)) = \sum_i^n \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}} \quad (2.30)$$

onde x_i são os zeros de $f(x)$. Assim

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta((p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2) \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) + \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) \quad (2.32)$$

onde $p^0 \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Portanto

$$\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) \quad (2.33)$$

o que torna o resultado trivial usando agora,

$$d^4 p = dp^0 d^3 p \quad (2.34)$$

onde fazemos um abuso de notação. De facto $d^3 p = d^3 \vec{p}$

2.3.4 Dimensões de Γ e de $\mathcal{M}$

A largura de decaimento foi definida como o inverso do tempo de vida média, portanto tem as dimensões de s^{-1} . No sistema de unidades naturais tem portanto

as dimensões de mass ou energia. Usando esta informação podemos obter que as dimensões da amplitude são

$$[\mathcal{M}] = (\text{massa})^{4-n} \quad (2.35)$$

onde n é o número total de partículas do processo.

Exemplo 2.2 *Mostre a Eq. (2.35)*

Para isso comece por mostrar que

$$[A] = \left[\frac{1}{2m_1} \right] = (\text{massa})^{-1} \quad (2.36)$$

e que

$$[D] = (\text{massa})^{2n-6} \quad (2.37)$$

Usando as Eqs. (2.36) e (2.37) obtemos então a Eq. (2.35).

2.3.5 Decaimentos para duas partículas

Para decaimentos com duas partículas no estado final as integrações podem ser feitas até ao fim e o resultado é particularmente simples¹.

De facto da Eq. (2.29) obtemos,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2m_1} S \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \\ &= \frac{S}{32\pi^2 m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_2}{p_2^0} \frac{d^3 p_3}{p_3^0} \\ &= \frac{S}{32\pi^2 m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \delta \left(m_1 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2} \right) \frac{d^3 p_2}{p_2^0 p_3^0} \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde fizemos a integração em $\vec{p}_3$, da qual resultou $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$. Como anteriormente, $p_i^0 = \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2}$. Para prosseguir usamos coordenadas esféricas no espaço dos momentos, isto é,

$$d^3 p_2 = d\Omega_2 |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \quad (2.39)$$

Nas nossas hipótese $\mathcal{M}$ não depende dos ângulos e a integração nas variáveis angulares da partícula 2 podem ser feitas dando 4π . Obtemos então,

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi m_1} \int d|\vec{p}_2| |\vec{p}_2|^2 |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2})}{p_2^0 p_3^0} \quad (2.40)$$

¹Estamos a supor que somamos sobre todos os spins do estado final e fazemos médias sobre os spins do estado inicial. Assim a amplitude só pode depender dos produtos internos do 3 quadri-vetores e estes podem sempre ser escritos em termos das massas, não envolvendo ângulos.

Usando agora,

$$\delta(m_1 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2}) = \frac{\delta(|\vec{p}_2| - \dots)}{\frac{|\vec{p}_2|}{p_2^0} + \frac{|\vec{p}_2|}{p_3^0}} \quad (2.41)$$

obtemos finalmente,

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi m_1^2} |\vec{p}_2| |\mathcal{M}|^2 \quad (2.42)$$

2.4 Scattering processes

We consider now scattering processes. These are fundamental in particle physics, as most of the information we can derive from experiment comes from these processes. We first describe how to define the concept of cross section and how we can derive it from the Fermi golden rule. Then we consider the general case and work out the details for the simple case of the scattering $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ in the center of mass reference frame.

2.4.1 From transition rates to interaction cross sections

The total number of interactions detected, will be proportional to the number of target particles and to the intensity of the incident beam. This will vary from experiment to experiment, depending on particular conditions. To be able to compare different experiments and to compare these with the theoretical predictions, we define a quantity which is independent of the experimental setup. This is the interaction **cross section** defined by,

$$\sigma = \frac{\text{\#of interactions/unit time/target particle}}{\text{incident flux}} \quad (2.43)$$

where the incident flux is the number of particles per unit area and per unit time in the beam. The cross section has therefore the dimensions of an area and is independent of the details of the beams or targets. The general situation is described in the Fig. 2.1

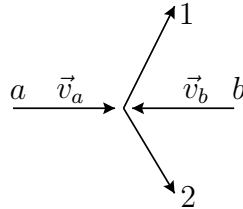


Figure 2.1: Scattering $a + b \rightarrow 1 + 2$.

The incident flux is given by

$$\phi_a = n_a |\vec{v}_a - \vec{v}_b| = \frac{1}{V} (v_a + v_b) \quad (2.44)$$

where we have assumed that the scattering is collinear (fixed target or collider experiments) and the volume V comes from the normalization. We also have to divide by the target density $n_b = 1/V$. We have seen that these will cancel out in the end so we will just set $V = 1$. With these considerations, the relation between the interaction cross section for the process $a + b \rightarrow 1 + 2$, and the transition rate given by the Fermi golden rule is,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\Gamma_{fi}}{v_a + v_b} \\ &= \frac{1}{v_a + v_b} \int |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^3} \end{aligned} \quad (2.45)$$

We now write the result in terms of the Lorentz invariant matrix element $\mathcal{M}_{fi}$,

$$\sigma = \frac{1}{4E_a E_b (v_a + v_b)} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \quad (2.46)$$

We have seen that the terms under the integral are Lorentz invariant separately. Now we show that the first factor, related with the initial state is also Lorentz invariant for collinear collisions. We define the factor,

$$F = 4E_a E_b (v_a + v_b) = 4E_a E_b \left(\frac{p_a}{E_a} + \frac{p_b}{E_b} \right) = 4(E_a p_b + E_b p_a) \quad (2.47)$$

where $p_a = |\vec{p}_a|$ and $p_b = |\vec{p}_b|$. We have therefore,

$$F^2 = 16(E_a^2 p_b^2 + E_b^2 p_a^2 + 2E_a E_b p_a p_b) \quad (2.48)$$

Now we evaluate the invariant $(p_a \cdot p_b)^2$ for collinear collisions,

$$(p_a \cdot p_b)^2 = (E_a E_b + p_a p_b)^2 = E_a^2 E_b^2 + p_a^2 p_b^2 + 2E_a E_b p_a p_b \quad (2.49)$$

Substituting the last term in the expression for F^2 we obtain

$$F^2 = 16 \left((p_a \cdot p_b)^2 + E_a^2 p_b^2 + E_b^2 p_a^2 - E_a^2 E_b^2 - p_a^2 p_b^2 \right) \quad (2.50)$$

$$= 16 \left((p_a \cdot p_b)^2 - (E_a^2 - p_a^2)(E_b^2 - p_b^2) \right) \quad (2.51)$$

$$= 16 \left((p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 \right) \quad (2.52)$$

showing that it is indeed Lorentz invariant. Note that in this derivation we used the same symbol for the 4-vector and for the modulus of the 3-vector. This is common

practice to avoid a more complicated notation like $|\vec{p}|$. The meaning should be clear from the context. Taking the square root for this factor we therefore get for the cross section,

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \quad (2.53)$$

as the product of several Lorentz invariant factors

2.4.2 The Golden Rule for cross sections

Consideremos que temos a colisão

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n \quad (2.54)$$

A regra de ouro para a secção eficaz é então,

$$\sigma = \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}}_A \underbrace{S}_B \underbrace{\int}_{C} \underbrace{|\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}}_D \quad (2.55)$$

A explicação dos termos B, C e D é a mesma que anteriormente. O único termos novo é

A) Estado inicial

Este fator tem que ver com o fluxo do feixe incidente e a densidade de partículas no alvo. A vantagem de escrever a secção eficaz como na Eq. (2.55), reside no facto de cada termo ser invariante de Lorentz para transformações ao longo do eixo do processo. Isto quer dizer em particular que se deve obter a mesma secção eficaz total no referencial do Laboratório e no referencial do CM.

Exemplo 2.3 *Mostre que as dimensões de $\mathcal{M}$ continuam a ser as da Eq. (2.35). Para isso comece por mostrar que a secção eficaz (uma área) é*

$$[\sigma] = (\text{massa})^{-2} \quad (2.56)$$

e que agora o termo do estado inicial vem também

$$[A] = (\text{massa})^{-2} \quad (2.57)$$

notando que agora

$$[D] = (\text{massa})^{2n-8} \quad (2.58)$$

obtemos a Eq. (2.35).

2.4.3 Colisões $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no CM

A colisão mais simples é a colisão $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Mas mesmo neste caso não é possível em geral fazer as integrações até ao fim sem saber a amplitude $\mathcal{M}$. A razão é que com 4 quadri-momentos não é possível exprimir todos os invariantes em termos das massas das partículas ou da energia total no centro de massa ($\sqrt{s}$). Mas é possível levar as integrações bastante longe deixando só uma integração nas variáveis angulares duma das partículas. Por simplicidade vamos mostrar isto no CM.

Consideremos então o processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no referencial CM. É conveniente usar a variável de Mandelstam s , definida por²,

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad (2.59)$$

Expandindo

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \quad (2.60)$$

e portanto

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (s - m_1^2 - m_2^2) \quad (2.61)$$

o que permite escrever

$$4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = 4\sqrt{s} |\vec{p}_1| \quad (2.62)$$

Exemplo 2.4 *Mostre a Eq. (2.62)*

Sabendo que

$$|\vec{p}_1|^2 = E_1^2 - m_1^2 = \left(\frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \right)^2 - m_1^2 \quad (2.63)$$

obtemos

$$\begin{aligned} s|\vec{p}_1|^2 &= \frac{1}{4} \left[(s + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4sm_1^2 \right] \\ &= \left[\frac{1}{4} (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right] \\ &= (p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde resulta a Eq. (2.62)

²Estou aqui a usar as convenções usuais em física de partículas e em particular do livro recomendado do Thomson [1] onde $\sqrt{s}$ é uma energia. Esta convenção difere do Griffiths [2], onde s tem as dimensões dum quadrado duma massa.

Obtemos então

$$\sigma = \frac{S}{64\pi^2\sqrt{s}|\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3p_3}{p_3^0} \frac{d^3p_4}{p_4^0} \quad (2.65)$$

Começamos por fazer a integração em $\vec{p}_4$,

$$\sigma = \frac{S}{64\pi^2\sqrt{s}|\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \delta(\sqrt{s} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2}) \frac{d^3p_3}{p_3^0 p_4^0} \quad (2.66)$$

Agora introduzimos coordenadas esféricas para o momento $\vec{p}_3$. Os ângulos θ e ϕ são os ângulos de difusão da partícula 3 em relação à partícula 1. Escrevemos então a secção eficaz diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{S}{64\pi^2\sqrt{s}|\vec{p}_1|} \int \frac{d|\vec{p}_3||\vec{p}_3|^2}{p_3^0 p_4^0} |\mathcal{M}|^2 \delta(\sqrt{s} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2}) \\ &= \frac{S}{64\pi^2\sqrt{s}|\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{d|\vec{p}_3||\vec{p}_3|^2}{p_3^0 p_4^0} \frac{\delta(|\vec{p}_3| - \dots)}{\frac{|\vec{p}_3|}{p_3^0} + \frac{|\vec{p}_3|}{p_4^0}} \\ &= \frac{S}{64\pi^2\sqrt{s}|\vec{p}_1|} \frac{|\vec{p}_3|}{p_3^0 + p_4^0} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{S}{64\pi^2s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (2.67)$$

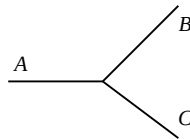
Para continuar temos de saber a forma explícita de $\mathcal{M}$, pois em geral depende dos ângulos de difusão.

2.5 Regras de Feynman para um modelo sem spin

Para prosseguir é necessário especificar as regras para calcular a amplitude $\mathcal{M}$. Para cada teoria as interações serão diferentes e algumas das regras são também diferentes. No entanto grande parte delas não depende da teoria. Assim antes de vermos casos mais complicados de partículas com spin vamos pensar num modelo com 3 tipos de partículas escalares neutras: A , B e C . Admitimos que têm massas tais que

$$m_A > m_B + m_C \quad (2.68)$$

de tal forma que A pode decair em $B + C$. O modelo tem uma única interação representada pelo diagrama, dito de Feynman,



com interação dada através duma constante g que nesta teoria tem as dimensões de momento. Com esta interação temos por exemplo a colisão $A + A \rightarrow B + B$ em ordem mais baixa dada pelos diagramas da Fig. 2.2. Notar que há dois diagramas pois ambos os processos são indistinguíveis e devem portanto ser somados. Para a

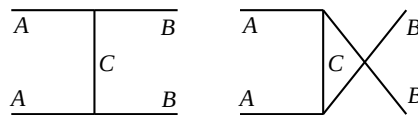


Figure 2.2: Processo $A + A \rightarrow B + B$ em ordem mais baixa.

colisão $A + B \rightarrow A + B$ temos os diagramas da Fig. 2.3. Estes processos, em ordem

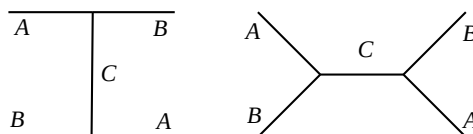


Figure 2.3: Processo $A + B \rightarrow A + B$ em ordem mais baixa.

mais baixa, designam-se por processos ao nível árvore (*tree level* em inglês) devido à sua estrutura ramificada. Os processos em ordem superior ocorrem com malhas fechadas (*loops* em inglês) como os indicados para as correções ao vértice indicadas na Fig. 2.4. No espírito da teoria das perturbações estas correções sendo de ordem

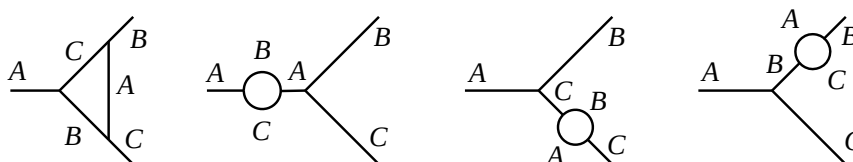


Figure 2.4: Correções a 1 loop ao vértice.

g^3 devem ser mais pequenas do que as de ordem mais baixa e portanto em primeira aproximação desprezáveis.

Vamos então enunciar as regras de Feynman. Designamos então por $p_1, \dots, p_n$ os momentos que entram e saiam do diagrama e por $q_1, \dots, q_n$ os momentos internos. Nas regras enunciadas abaixo, eu afasto-me do Griffiths pois o uso dele das funções delta, embora correto, é complicado e não é necessário. Assim eu exijo conservação de quadri-momento em cada vértice, o que para os diagramas ao nível árvore determina completamente todos os quadri-momentos. Para diagramas a 1 loop é fácil de ver que falta especificar um momento, que eu designo por q , para dois loops dois momentos q_1, q_2 e assim sucessivamente.

1. Desenhe todas as maneiras distintas de ligar o estado inicial ao estado final numa dada ordem da interação. Notar que de acordo com as regras da mecânica quântica se houver mais do que um diagrama as amplitudes têm de ser somadas.
2. Por cada vértice multiplique pelo fator

$$-i g \quad (2.69)$$

que nesta teoria tem as dimensões duma massa $\times c$.

3. Por cada linha interna com momento q multiplique por

$$\frac{i}{q^2 - m^2} \quad (2.70)$$

designado por propagador. A massa m é a massa da partícula que está associada a essa linha. Note que $q^2 \neq m^2$, isto é as partículas não estão na camada de massa.

4. Como explicado acima aplique conservação de energia-momento em cada vértice
5. Por cada loop escolha um momento q para uma linha interna qualquer e multiplique pelo fator

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \quad (2.71)$$

Os momentos de cada linha ficam então determinados por conservação de energia momento em cada vértice.

6. O resultado da aplicação das regras anteriores dá $-i \mathcal{M}$, por isso para obter $\mathcal{M}$ multiplique o resultado final por i .

2.5.1 Tempo de vida média de A

Como a partícula A decai, podemos calcular o seu tempo de vida média. O diagrama de Feynman coincide com a definição do vértice. A aplicação das regras de Feynman

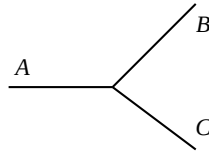


Figure 2.5: Decaimento $A \rightarrow B + C$ em ordem mais baixa.

dá neste caso

$$\mathcal{M} = g \quad (2.72)$$

Podemos usar agora a expressão da largura de decaimento, Eq. (2.42), para obter

$$\Gamma = \frac{g^2 |\vec{p}|}{8\pi m_A^2 c} \quad (2.73)$$

e obter para o tempo de vida média,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi m_A^2 c}{g^2 |\vec{p}|} \quad (2.74)$$

onde

$$|\vec{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad (2.75)$$

2.5.2 Colisão $A + A \rightarrow B + B$

Consideremos a cinemática da Fig. 2.6 A conservação de energia momento diz-nos

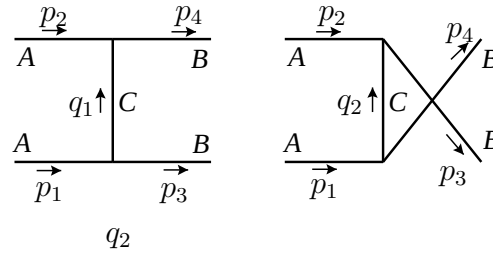


Figure 2.6: Cinemática para o processo $A + A \rightarrow B + B$.

que

$$q_1 = p_1 - p_3, \quad q_2 = p_1 - p_4 \quad (2.76)$$

e a aplicação das regras de Feynman dá

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} + \frac{g^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_C^2} \\ &= \frac{g^2}{t - m_C^2} + \frac{g^2}{u - m_C^2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde na última passagem usámos as variáveis de Mandelstam. Por esta razão estes diagramas costumam ser designados por canal t e canal u , respetivamente. Introduzindo esta expressão na secção eficaz diferencial, Eq. (2.67), obtemos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{g^4}{64\pi^2 s c^6} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} \left[\frac{1}{t - m_C^2} + \frac{1}{u - m_C^2} \right]^2 \quad (2.78)$$

Para prosseguir devíamos escrever t e u em termos dos ângulos de difusão no CM,

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2E_1 E_3 (1 - \beta_3 \beta_1 \cos \theta) \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2E_1 E_4 (1 + \beta_4 \beta_1 \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde β_i são as velocidades das partículas no CM, e θ é o ângulo de difusão entre a partícula 1 e 3. Notar que $E_3 = E_4$ e $\beta_3 = \beta_4$ pois têm a mesma massa. Notar ainda na Eq. (2.78), o fator $S = 1/2$ pois há duas partículas idênticas no estado final.

2.5.3 Processos de ordem superior

Os exemplos que vimos foram de processos em ordem mais baixa. Quando se pretende ir para as ordens seguintes de teorias de perturbação, os problemas aparecem. Não vamos aqui explicar em detalhe como eles são resolvidos, mas vamos dar um caso simples para vermos que tipo de problemas aparecem.

Para exemplificar vamos considerar as correções ao propagador da partícula A, também designada por *self-energy*. O diagrama de Feynman correspondente é mostrado na Fig. 2.7. Aplicando as regras de Feynman, obtemos para a amplitude,

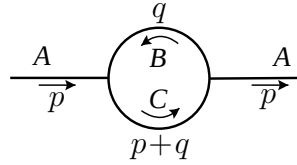


Figure 2.7: Self-energy da partícula A

$$\mathcal{M} = i g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - m_B^2][(p+q)^2 - m_C^2]} \quad (2.80)$$

As integrações são feitas de $-\infty$ a $+\infty$. Imediatamente vemos que há problemas pois para q grande o integral diverge logaritmicamente,

$$\int q^3 dq \frac{1}{q^4} = \int \frac{dq}{q} = \infty \quad (2.81)$$

Este problema levou mais de 30 anos a ser compreendido e resolvido através do procedimento chamado de renormalização. O estudo deste procedimento está para além deste curso introdutório, mas podemos dizer que o problema foi resolvido duma forma completamente satisfatória, produzindo a teoria renormalizada resultados comparáveis com sucesso com a experiência. Para uma explicação do procedimento em QED ver Ref. [3].

Problemas capítulo 2

2.1 O tempo de vida média τ duma partícula instável (que decai noutra) é definido como o tempo ao fim do qual o número de partículas é reduzido a $1/e$ do seu valor inicial, ou seja

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

onde N_0 é o número de partículas no instante inicial e τ é referido ao referencial no qual a partícula se encontra em repouso. Sabendo que os piões carregados têm $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8}$ s e $m_\pi = 140$ MeV calcule:

- O fator γ para um feixe de piões de 200 GeV.
- O tempo de vida média no referencial do Laboratório.
- Calcule a percentagem de piões que decaiu ao fim de percorrerem 300 m no Laboratório. Se não houvesse dilatação no tempo qual seria a percentagem ao fim da mesma distância?

2.2 Considere o decaimento $A \rightarrow B + C$ na teoria descrita na secção 2.5. Mostre que no referencial em que a partícula que decai está em repouso, o módulo do momento de cada uma das partículas no estado final é dado pela Eq. (2.75),

$$|\vec{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad (2.82)$$

2.3 Considere a colisão $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no referencial do lab (partícula 2 em repouso). Considere ainda que as partículas 3 e 4 não têm massa. Mostre que a secção eficaz diferencial se escreve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 S \frac{|\vec{p}_3| |\mathcal{M}|^2}{m_2 |\vec{p}_1| (E_1 + m_2) - |\vec{p}_1| c \cos \theta} \quad (2.83)$$

2.4 Considere a colisão $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, no referencial do lab (partícula 2 em repouso). Mostre que a secção eficaz diferencial se escreve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 S \frac{|\vec{p}_3|^2 |\mathcal{M}|^2}{m_2 |\vec{p}_1| |(E_1 + m_2) |\vec{p}_3| - |\vec{p}_1| E_3 \cos \theta|} \quad (2.84)$$

2.5 Nas condições do problema 2.4 os dados do problema são as massas das partículas e a energia do feixe incidente (partícula 1) no referencial do laboratório. (**Nota:** Neste problema considere $\hbar = c = 1$)

- a) Mostre que o momento $|\vec{p}_3|$ no lab se obtém resolvendo a equação

$$p_{3\text{Lab}} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.85)$$

com

$$\begin{aligned} A &= 4(E_1 + m_2)^2 - 4p_{1\text{Lab}}^2 \cos^2 \theta \\ B &= 2p_{1\text{Lab}} \cos \theta [(E_1 + m_2)^2 - m_4^2 + m_3^2 - p_{1\text{Lab}}^2] \\ C &= 4m_3^2 (E_1 + m_2)^2 - [(E_1 + m_2)^2 - m_4^2 + m_3^2 - p_{1\text{Lab}}^2]^2 \\ p_{1\text{Lab}}^2 &= E_1^2 - m_1^2 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Qual o significado dos sinais $\pm$ na Eq. (2.85)?

Sugestão: Veja a secção 3.6 e o problema 3.8 da Ref. [3].

- b) Considere agora que $m_1 = m_3 = 2 \text{ GeV}$, $m_2 = m_4 = 5 \text{ GeV}$. Considere ainda que $E_1 \in [100, 1000] \text{ GeV}$. Faça um gráfico da secção eficaz no referencial do lab e no referencial do CM e confirme numericamente que conduzem ao mesmo resultado.

2.6 Considere no quadro da teoria ABC, descrita na secção 2.5, o processo

$$A + B \rightarrow A + B \quad (2.87)$$

Em ordem mais baixa os diagramas são os indicados na Fig. 2.3.

- a) Calcule a amplitude $\mathcal{M}$.
- b) Escreva a expressão para a secção eficaz diferencial no referencial do centro de massa.

2.7 Considere o processo $A + A \rightarrow A + A$.

- a) Desenhe todos os diagramas (seis) que contribuem em ordem mais baixa.
- b) Assumindo $m_B = m_C = 0$ encontre a amplitude para este processo. Deixe o resultado na forma de integral.

Chapter 3

Symmetries in Particle Physics

We follow here chapter 4 of Griffiths [2] and chapter 9 of the recommended book of Mark Thomson [1].

3.1 Symmetries, Groups and Conservation Laws

Symmetries play an important role in physics in general and specially in Particle Physics. This is due to their connection to conservation laws, as we will discuss below, but also because they can provide information that that can be used to obtain certain results without doing the calculations.

Let us start by an example of this last case, adapted from Griffiths. Consider the function represented in Fig. 3.1. It represents an odd function, that is, $f(-x) = -f(x)$. This allow us to make many statements without doing the calculations,

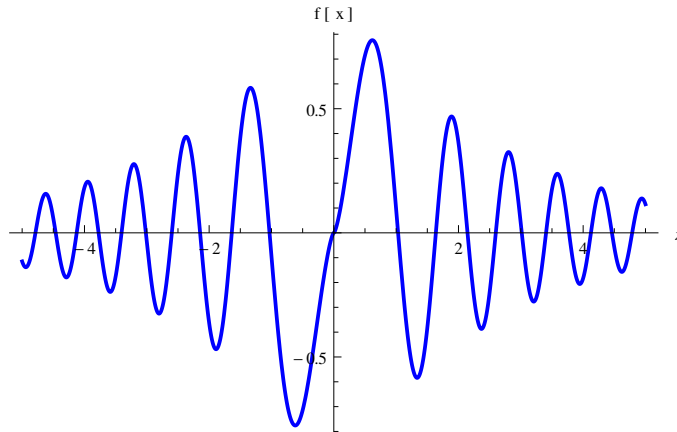


Figure 3.1: Example of an odd function.

$$(f(-x))^4 = (f(x))^4, \quad \int_{-3}^3 f(x)dx = 0, \quad \int_{-5}^5 [f(x)]^2 dx = 2 \int_0^5 [f(x)]^2 dx \quad (3.1)$$

We can also say that its Fourier series has only the sine and that its Taylor expansion only odd powers of x . We have in this way information about some properties without making the actual calculations.

In quantum mechanics a symmetry can be expressed by requiring that all physical predications (observables) are invariant under some transformation (U is an operator)

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (3.2)$$

A necessary requirement is that the normalization is preserved,

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle U\psi|U\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle \quad (3.3)$$

implying that the symmetry transformations must be unitary,

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \quad (3.4)$$

Furthermore the eigenvalues must be preserved, implying that $H \rightarrow H' = H$. This implies

$$H|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle, \quad H|\psi'_i\rangle = E_i|\psi'_i\rangle \quad (3.5)$$

giving

$$HU|\psi_i\rangle = E_iU|\psi_i\rangle = UE_i|\psi_i\rangle = UH|\psi_i\rangle \quad \rightarrow \quad HU - UH = [H, U] = 0 \quad (3.6)$$

meaning that the unitary operator of the symmetry must commute with the Hamiltonian.

Finite continuous transformations can be made up of infinitesimal transformations (in fact that there is a theorem in mathematics that states that all the information about the group is in the infinitesimal transformations)

$$U(\epsilon) = I + i\epsilon G \quad (3.7)$$

where ϵ is the infinitesimal parameter of the transformation and G is called the generator of the transformation. The unitarity of U implies

$$U(\epsilon)U^\dagger(\epsilon) = (I + i\epsilon G)(I - i\epsilon G^\dagger) = I + i\epsilon(G - G^\dagger) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.8)$$

The $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ can be neglected for infinitesimal transformations and we get

$$G = G^\dagger \quad (3.9)$$

that is, G is hermitian. This means that the operator G , the generator of the symmetry transformation, can be associated with a physical observable in quantum mechanics. Since U commutes with H the same is true for G , that is

$$[H, G] = 0 \quad (3.10)$$

meaning that the corresponding observable can be simultaneously measured with the energy. In quantum mechanics the evolution in time of the expectation value of an operator is

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = i \langle [H, G] \rangle \quad (3.11)$$

therefore for the generator of the symmetry transformation the expectation values are conserved in time

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = 0 \quad (3.12)$$

In general the infinitesimal transformations will depend on more than one parameter. We will write then

$$U(\epsilon) = I + i\epsilon_i G_i \quad (3.13)$$

with an implied sum in i . The number of G_i will depend on the type of transformation as we will see below.

One of the biggest interest of symmetries in Physics results from their connection with conservation laws as we just saw. This can be formalized in the form a theorem due to Emile Noether. This theorem states that for each continuous symmetry there is a conservation law. The more important examples are in the Table 3.1. The first

Symmetry	Conservation Law
Time translation	Energy
Space translation	Linear momentum
Rotation	Angular momentum
Gauge symmetry	Charge

Table 3.1: Noether's Theorem: Symmetries and conservation laws.

three are well known from elementary physics, the last one we will discuss later in this course.

In Particle Physics the more important version of Noether's theorem is the one in quantum field theory. We will not do here its proof (see my text *Introdução à Física da Interação Eletrofraca* [6]), but we will give an example from classical physics.

Consider a system with n degrees of freedom. The action is given by,

$$S = \int dt L(\dot{q}_k, q_k, t) \quad (3.14)$$

and leads to the Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.15)$$

The momentum is,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (3.16)$$

Let us now consider a system where the Lagrangian does not depend on the coordinates q_k . We say that the system has a symmetry because it is invariant under translations $q_k \rightarrow q_k + b$. What are the consequences of this? If we look at Eq. (5.15), we see that $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ hence,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt} = 0 \quad (3.17)$$

Therefore the linear momentum is conserved in this system. In a similar way we could prove other cases.

Up to now we have talked about symmetries in an intuitive and not very precise way. More rigorously, a symmetry is an operation that leaves the system invariant.

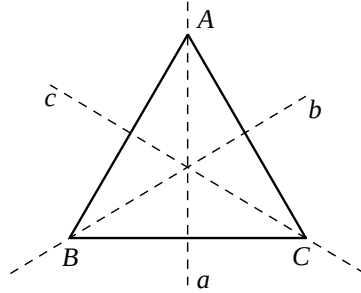


Figure 3.2: Symmetries of the equilateral triangle.

For the equilateral triangle the symmetries are reflections about the a , b and c axis, and rotations of 120° , clockwise and counter-clockwise. We denote these operations by R_a , R_b , R_c , R_+ and R_- , respectively. There is still the operation of doing nothing that we call identity and denote by I . These six operations are all the symmetry operations that we can perform on the equilateral triangle leaving it unchanged. They form what is known in mathematics as a group. A set of operations is a group if it respects the properties:

1. If two elements R_i e R_j are in the set, then the successive application $R_j R_i$ also belongs to the set.
2. Exists an element, known as the identity, such that $I R_i = R_i I = R_i$ for all the elements of the set.
3. For each element of the set, R_i , there exists an inverse, denoted by R_i^{-1} such that $R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$.
4. The associative property is verified, that is, $R_i (R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$.

In general $R_i R_j \neq R_j R_i$. If $R_i R_j = R_j R_i$ for all the group elements then the group is called an abelian group. If this is not verified the group is called non-abelian. We will see that both cases are important in the description of the symmetries of

fundamental interactions in Nature. If the number of elements in the set is finite we have a finite group, if not we have a continuous group. It is easy to verify that the set of symmetries of the equilateral triangle form a group. We can construct the multiplication table for these discrete group

	I	R_+	R_-	R_a	R_b	R_c
I	I	R_+	R_-	R_a	R_b	R_c
R_+	R_+	R_-	I	R_b	R_c	R_a
R_-	R_-	I	R_+	R_c	R_a	R_b
R_a	R_a	R_c	R_b	I	R_-	R_+
R_b	R_b	R_a	R_c	R_+	I	R_-
R_c	R_c	R_b	R_a	R_-	R_+	I

Notice that this is a non-abelian group, as we have,

$$R_a R_b \neq R_b R_a \quad (3.18)$$

We can also read from the Table that all the elements have an inverse, for instance,

$$(R_+)^{(-1)} = R_- \quad (3.19)$$

3.2 Continuous Groups in Physics

The more important groups in Physics are the groups of matrices. A partial list is:

1. $\mathbf{U}(n)$
Group of the Unitary matrices $n \times n$, that is, $\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^T)^* = \mathbf{U}^\dagger$.
2. $\mathbf{SU}(n)$
These are subgroups of the unitary groups, with $\det \mathbf{U} = 1$. The most important in the applications are $\mathbf{SU}(2)$ and $\mathbf{SU}(3)$.
3. $\mathbf{O}(n)$
Group of the orthogonal matrices $n \times n$, that is, $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T$. The Lorentz group of relativity is a *rotation* group in a pseudo-euclidean space, and it is denoted by $\mathbf{O}(3, 1)$, where 3, 1 refers to the signs of the pseudo-euclidean metric.
4. $\mathbf{SO}(n)$
This a subgroup of $\mathbf{O}(n)$ with $\det \mathbf{O} = 1$. The most important example is the group of rotations in the three dimensional space, $\mathbf{SO}(3)$.

3.2.1 Algebras

For groups of continuous symmetries, the infinitesimal transformations play a central role. These are expressed in terms of the generators of the algebra of the group. The

algebra is defined by the commutation rules of the generators. In quantum mechanics these generators correspond to operators that are associated to physical observables, like the angular momentum and the spin, to give two important examples. The generators of the algebra of the rotation group $\mathbf{SO}(3)$, are the angular momentum operators, that obey the algebra,

$$[L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k \quad (3.20)$$

For the spin, the generators are written in terms of the Pauli matrices, that obey the $\mathbf{SU}(2)$ algebra.

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (3.21)$$

We see that the algebras of $\mathbf{SO}(3)$ e $\mathbf{SU}(2)$ are identical, therefore all that we learn about one is true for the other. In Physics usually we are not very careful to distinguish the algebra from the group.

3.2.2 The Pauli Matrices and $\mathbf{SU}(2)$

Because of their connection with the spin, the Pauli matrices are very important in quantum mechanics. We recall here some of their properties. They are defined by,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

We are using here the convention of denoting the axis by indices with $\sigma_x = \sigma_1$ and so on. They are hermitian matrices, that is, $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$. They satisfy the properties

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1, \quad \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2, \quad \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 \\ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.23)$$

All these properties can be written in a compact form, using

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.24)$$

3.3 Angular Momentum and $\mathbf{O}(3)$

As we saw, the conservation of angular momentum is related with the invariance under rotations. In classical physics there is no restriction to the simultaneous measurement of all the components of the angular momenta, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ and the allowed values are continuous, meaning all the values are allowed. In quantum mechanics, using the fundamental commutation relation,

$$[x_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij} \Rightarrow [L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k \quad (3.25)$$

and therefore we cannot simultaneously measure two components of $\vec{L}$. If we define the square of the angular momentum,

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \sum_i L_i^2, \quad (3.26)$$

we can show that $[L^2, L_i] = 0$, for any i . Conventionally we take L_z

$$[L^2, L_z] = 0 \quad (3.27)$$

and therefore we can simultaneously measure L^2 and L_z . The other big difference with respect to classical physics, is that the allowed values are discrete. More precisely

$$L^2 Y_{lm_l}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm_l}(\theta, \phi) \quad (3.28)$$

$$L_z Y_{lm_l}(\theta, \phi) = \hbar m_l Y_{lm_l}(\theta, \phi). \quad (3.29)$$

With l, m_l taking the possible values

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m_l = -l, -l+1, -l+2, \dots, 0, \dots, l-1, l \quad (3.30)$$

Notice that

$$\sum_{m_l=-l}^l m_l = 2l+1 \quad (3.31)$$

3.4 Spin 1/2 and SU(2)

In Nature spin 1/2 is the most important. In fact all the quarks and leptons have spin 1/2. We say that they are fermions as they obey Fermi statistics. A particle with $s = 1/2$ can have only two spin projections, $m_s = \pm 1/2$. There are several equivalent notations to describe this situation, for instance $|\uparrow\rangle$ and $|\downarrow\rangle$. The more convenient is in terms of two component column vectors,

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

The importance of these states are that they are eigenstates of S_z . In fact if we define the the spin operator through the usual expression,

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (3.33)$$

where σ_i are the Pauli matrices, we get,

$$S_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

An arbitrary spin state can be therefore expressed as linear combination of those two eigenstates,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

The normalization conditions is, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, According to the basic rules of quantum mechanics, the probability of a measurement of S_z giving $+\hbar/2$ is $|\alpha|^2$. In a similar way the probability of obtaining $-\hbar/2$ is $|\beta|^2$.

3.4.1 Rotations of spinors

We know from basic physics that scalars (spin 0) are invariant under rotations, and that vectors (spin 1) transform as the coordinates in three dimensions. The question that naturally arises is, how objects with spin 1/2 (spinors) transform under rotations? The answer, that we do not demonstrate here, is

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \mathbf{U}(\vec{\theta}) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \mathbf{U}(\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}} \quad (3.36)$$

The vector $\vec{\theta}$ points in the direction of the rotation axis, and its modulus is the rotation angle. $\mathbf{U}(\vec{\theta})$ is an unitary matrix with determinant 1, therefore the set of all the rotations for spinors form the group $\mathbf{SU}(2)$. We say that spinors are in the two dimensional representation of the rotation group, while scalars are in the one dimensional and vectors in the three dimensional. Different spins correspond to different representations of the group $\mathbf{SU}(2)$ or $\mathbf{SO}(3)$ that, as we have seen, have the same algebra.

3.5 Internal Symmetries

In the description of the interactions of elementary particles, a special role is played by symmetries that act in an internal space not affected by spacetime.

3.5.1 Isospin

The best example is isospin. Observing that the proton and neutron masses were almost equal, Heisenberg proposed that they were two states of a new entity called nucleon, and that the mass difference could be explained by the fact that one has electric charge while the other not, that is due to the electromagnetic interaction. Having the spin in mind (hence the name isospin) we write for the nucleon,

$$N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

By analogy with spin, we introduce the isospin (no physical dimensions)

$$\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \quad [T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k \quad (3.38)$$

and therefore the proton has isospin $I_3 = +1/2$ while the neutron has $I_3 = -1/2$. We follow the conventions of Thomson denoting the operator by T and the eigenvalues of T^2 and T_3 by $I(I+1)$ and I_3 , respectively.

Up to now this is only notation. The consequences are obtained once we say that strong interactions are invariant for the group $\mathbf{SU}(2)$ of isospin. By Noether's theorem this means that isospin is conserved in the strong interactions and this has physical consequences. Consider the collisions of nucleons to give a deuteron and a pion.

$$p + p \rightarrow d + \pi^+, \quad p + n \rightarrow d + \pi^0, \quad n + n \rightarrow d + \pi^- . \quad (3.39)$$

The deuteron is a pn bound state. According to the rules of addition of isospin (like spin) it could be a state with $I = 0$ (singlet) or $I = 1$ (triplet),

$$\begin{aligned} \text{Triplet} \quad & \begin{aligned} |1, 1\rangle &= \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \\ |1, -1\rangle &= \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\text{Singlet} \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle . \quad (3.41)$$

As the states (pp) and (nn) do not exist the deuteron must have $I = 0$. The pion must have $I = 1$ as we have three states. Thus the final state is a pure $I = 1$ state.

The amplitudes, $\mathcal{M}_I$, are functions of the isospin I . For the first and third process the initial state is in a pure $I = 1$ state. However for the second process the initial state can be either in a $I = 0$ or $I = 1$ state. If isospin is conserved in the strong interactions, only the $I = 1$ will contribute. This means that (neglecting mass differences) the cross section for $p + n \rightarrow d + \pi^0$ will be smaller. To discover how much smaller we invert the previous equations for the singlet and triplet to obtain,

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle . \quad (3.42)$$

That is the initial state has probability $1/2$ of being in either isospin channel. As the cross sections (probabilities) are proportional to the square of the amplitudes we must have the result,

$$\sigma(pp \rightarrow d\pi^+) = \sigma(nn \rightarrow d\pi^-) = 2\sigma(pn \rightarrow d\pi^0) , \quad (3.43)$$

which is experimentally verified.

This symmetry was later passed to the quarks, once it was discovered that the nucleons were not elementary particles but made out of quarks. The quarks u and d have now the same properties of the proton and neutron. The discovery of strangeness and the s quark, lead to an enlargement of the group from

$\mathbf{SU}(2)$ to $\mathbf{SU}(3)$. Do not confuse this $\mathbf{SU}(3)$ with $\mathbf{SU}(3)_c$ from Chromodynamics (from colour), known as QCD. Sometimes this symmetry among the different types (flavours) of quarks, is called $\mathbf{SU}(3)_f$. One of the big successes of Particle Physics around 1960 was the discovery of the flavour structure of mesons and baryons by Murray Gell-Mann and Yuval Ne'eman, known as the **Eightfold Way**. In this construction, the mesons are constructed out of a quark-antiquark pair $q\bar{q}$, while baryons (anti-baryons) of three quarks (anti-quarks), that is qqq ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}$). To be able to discuss this construction we have to study in some detail the algebra of the group $\mathbf{SU}(3)$. Of course the mathematics does not care if the group is to be applied to the flavour structure or to colour symmetry (QCD)

3.5.2 The $\mathbf{SU}(3)$ Algebra: The Gell-Mann Matrices

We have already discussed the algebra of $\mathbf{SU}(2)$ where the Pauli matrices play a special role. In this case the number of generators is three, the same as the number of Pauli matrices. For the general case of $\mathbf{SU}(n)$ we have $n^2 - 1$ generators. This means that for $\mathbf{SU}(3)$ we have 8 generators. As the lowest representation of the group is a triplet, the role of the Pauli matrices is here played by 8, 3×3 matrices known as the Gell-Mann matrices. Its definition is,

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

The set $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ generate the $\mathbf{SU}(2)$ subgroup of isospin ($T_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$),

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}. \quad (3.47)$$

The other diagonal generator corresponds to the hypercharge ($Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$). As they commute they can describe compatible observables. Quarks can be represented in this two-dimensional space (I_3, Y) . We define

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

where

$$I_3 u = \frac{1}{2} u \quad I_3 d = -\frac{1}{2} d \quad I_3 s = 0 \quad (3.49)$$

$$Y u = \frac{1}{3} u \quad Y d = \frac{1}{3} d \quad Y s = -\frac{2}{3} s \quad (3.50)$$

Notice that I_3, Y obey the Gell-Mann, Nishijima relation

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y. \quad (3.51)$$

This can be represented in the following two dimensional diagrams for quarks and anti-quarks

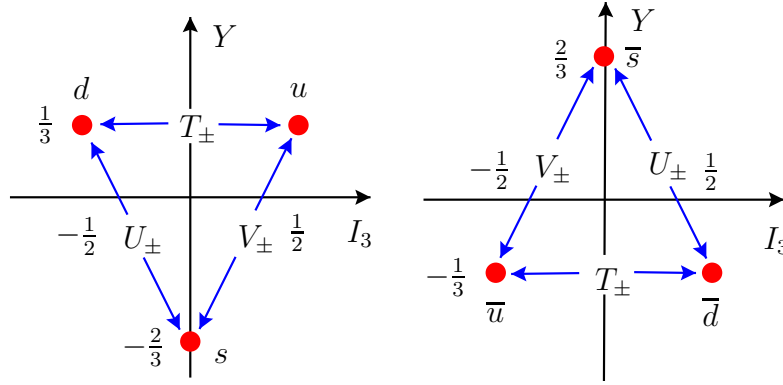


Figure 3.3: (I_3, Y) diagrams for light quarks and anti-quarks.

The operators

$$T_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5), \quad U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \quad (3.52)$$

are the equivalent of the ladder operators for the angular momentum. We have

$$T_+ d = u, T_- u = d; \quad V_+ s = u, V_- u = s; \quad U_+ s = d, U_- d = s \quad (3.53)$$

$$T_- \bar{d} = -\bar{u}, T_+ \bar{u} = -\bar{d}; \quad V_- \bar{s} = -\bar{u}, V_+ \bar{u} = -\bar{s}; \quad U_- \bar{s} = -\bar{d}, U_+ \bar{d} = -\bar{s} \quad (3.54)$$

We just give an example for quarks. From the definition,

$$V_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Therefore

$$V_+ s = u, \quad V_- u = s \quad (3.56)$$

all other applications of $V_{\pm}$ will vanish. Finally there is an analogue of total angular momentum,

$$T^2 = \sum_{i=1}^8 T_i^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{2} \lambda_i^2 = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Now we will apply these concepts in the construction of the quark model, the so-called *Eightfold Way*,

3.5.3 The Eightfold Way at work: The light mesons

Both I_3 and Y are additive quantum numbers of $\mathbf{SU}(3)_f$, like J_3 in the composition of angular momentum or spin. To obtain the states $q_i \bar{q}_j$ with $q_i = u, d, s$ (light quarks) we just add their quantum numbers. In the plane I_3, Y we obtain an hexagon as shown in Fig. 3.4. The states around the edge of the multiplet (hexagon) are uniquely defined. They can be related by the ladder operators:

$$T_+(d\bar{s}) = T_+(d)\bar{s} + dT_+(\bar{s}) = u\bar{s} + 0 = u\bar{s} \quad (3.58)$$

$$V_-(d\bar{s}) = V_-(d)\bar{s} + dV_-(\bar{s}) = 0 - d\bar{u} = -d\bar{u} \quad (3.59)$$

$$U_+(s\bar{u}) = U_+(s)\bar{u} + sU_+(\bar{u}) = d\bar{u} + 0 = d\bar{u} . \quad (3.60)$$

The remaining three states have $I_3 = Y = 0$. This reminds us of the addition of

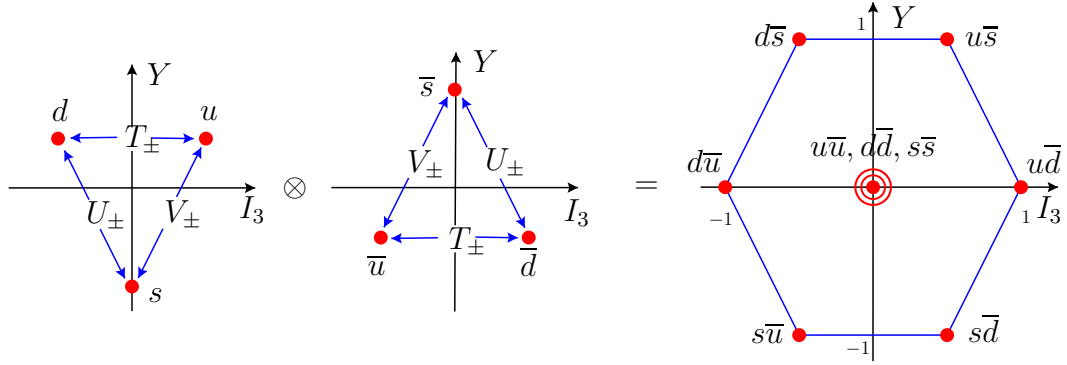


Figure 3.4: The light mesons.

two spin 1/2 where we had two states with $S_3 =$, one belonged to the singlet and the other to the triplet. We can try the trick we used there, using the ladder operators. The problem is that now we have three of these. We get

$$T_+(d\bar{u}) = (u\bar{u}) - (d\bar{d}), \quad T_-(u\bar{d}) = (d\bar{d}) - (u\bar{u}) \quad (3.61)$$

$$V_+(s\bar{u}) = (u\bar{u}) - (s\bar{s}), \quad V_-(u\bar{s}) = (s\bar{s}) - (u\bar{u}) \quad (3.62)$$

$$U_+(s\bar{d}) = (d\bar{d}) - (s\bar{s}), \quad U_-(d\bar{s}) = (s\bar{s}) - (d\bar{d}) . \quad (3.63)$$

As we can only make two linearly independent combinations out of these three differences, one must be in a different multiplet. It should be a singlet. We must then make two linearly independent combinations. How to choose? We observe that the symmetry is only approximate as $m_s > m_u, m_d$. On the other hand, *experimentally* the three pions, π^+, π^0, π^- have very similar masses $m_\pi \simeq 140$ MeV. So we define one state to be the π^0 (obtained with $T_\pm$),

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(u\bar{u}) - (d\bar{d})] \quad (3.64)$$

Now the other state belonging to the same multiplet (the octet has 8 states). This state identified experimentally with the meson $|\eta\rangle$ ($m_\eta = 549$ MeV) should be,

$$|\eta\rangle = \alpha [(u\bar{u}) - (s\bar{s})] + \beta [(d\bar{d}) - (s\bar{s})] \quad (3.65)$$

with the conditions, $\langle\pi^0|\eta\rangle = 0$, $\langle\eta|\eta\rangle = 1$. We get

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [(u\bar{u}) + (d\bar{d}) - (s\bar{s})] \quad (3.66)$$

We can easily verify that the singlet should be orthogonal to these two states. The state that fits experimentally is called $|\eta'\rangle$, with mass $m_{\eta'} = 958$ MeV

$$|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [(u\bar{u}) + (d\bar{d}) + (s\bar{s})] \quad (3.67)$$

The singlet must satisfy $T_\pm |\eta'\rangle = U_\pm |\eta'\rangle = V_\pm |\eta'\rangle = 0$. For instance,

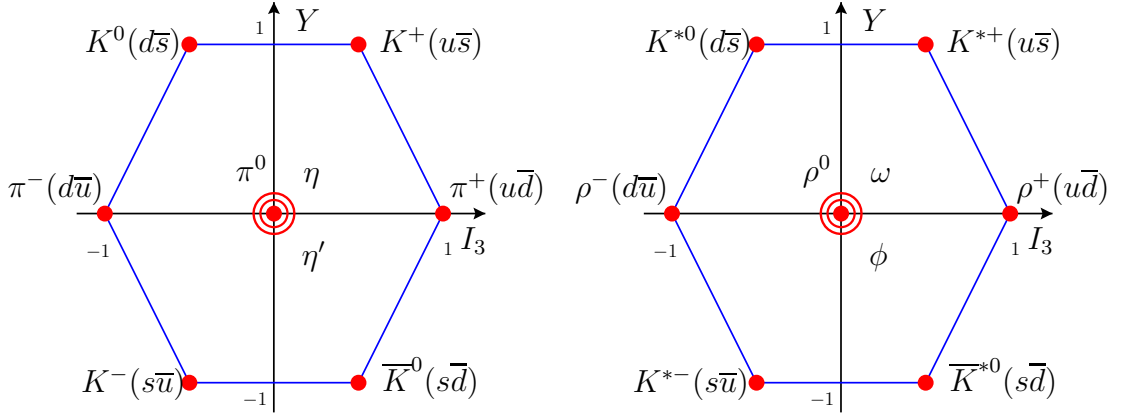
$$T_+ |\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [T_+(u\bar{u}) + T_+(d\bar{d}) + T_+(s\bar{s})] = \frac{1}{\sqrt{3}} [-(u\bar{d}) + (u\bar{d}) + 0] = 0 \quad (3.68)$$

In group theory language we say

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (3.69)$$

In the previous discussion we did not talk about the spin of the mesons. Being made out of two quarks with spin $1/2$, we could have $S = 0, 1$. The states that we discuss turn out to be pseudo-scalars ($S = 0$). There is another octet with $S = 1$, the vector meson octet

If the symmetry was exact, the masses of all the particles in the same multiplet would be the same. How well is this prediction verified in Nature. In Table 3.2 we show the values of the masses for the pseudo-scalar and vector octets. We see that the symmetry is broken, but that the isospin symmetry is better than the full $\text{SU}(3)_f$. In fact the masses in the horizontal lines are very much similar.

Figure 3.5: The pseudo-scalar ($S = 0$) and vector ($S = 1$) octets.

$\pi^\pm : 140$	$\pi^0 : 135$	$\rho^\pm : 770$	$\rho^0 : 770$
$K^\pm : 494$	$K^0, \bar{K}^0 : 498$	$K^{*\pm} : 892$	$K^{*0} : 896$
$\eta : 549$	$\eta' : 958$	$\omega : 782$	$\phi : 1020$

Table 3.2: Masses in GeV for the pseudo-scalar and vector octets.

3.5.4 The Eightfold Way at work: The light baryons ($q_1 q_2 q_3$)

We do the same construct for the product of three light quarks (u, d, s). In group theory notation we want to know what is $3 \otimes 3 \otimes 3$. From the 27 states only 3 are uniquely defined, the corners of the green triangle. Using the ladder operators we find that there are 10 states that belong to this multiplet. Hence we should have a 10 dimensional representation, the *decuplet*. There are 6 points with 3 states, the corners of the blue hexagon. As one of these states belongs to the decuplet we should have 2 independent octets. There are 6 states with $I_3 = Y = 0$. From these one belongs to the decuplet, four to the two octets, and therefore remains one state that should be a true singlet

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (uds - usd + dsu - dus + sud - sdu) \quad (3.70)$$

We have therefore in group theory language

$$\otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (3.71)$$

In Nature the lowest lying baryons fit in a $S = 1/2$ octet and in an $S = 3/2$ decuplet. There is no particle corresponding to the singlet. This is shown in Fig. 3.7. How good is the symmetry for baryons. To have an idea we show in Table the masses in MeV for the octet and decuplet.

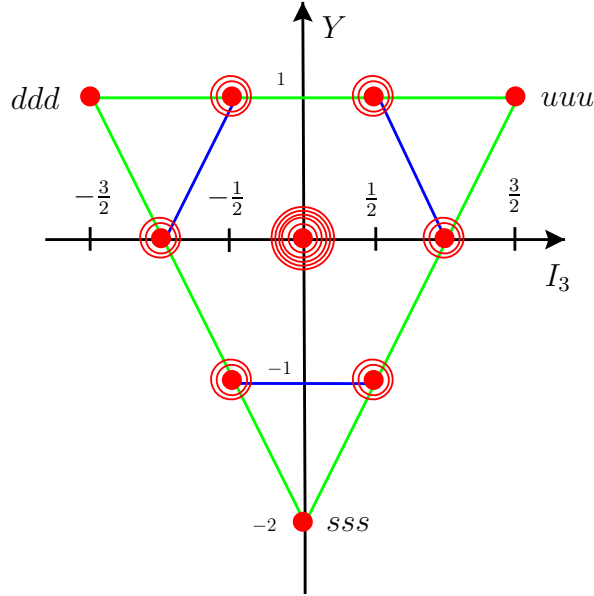


Figure 3.6: The light baryon multiplets.

$L = 0, S = 1/2, J = 1/2, P = +1$		$L = 0, S = 3/2, J = 3/2, P = +1$	
$N : 939$	$\Sigma : 1193$	$\Delta : 1232$	$\Sigma : 1318$
$\Lambda^0 : 1116$	$\Xi : 1318$	$\Xi : 1384$	$\Omega : 1672$

Table 3.3: Masses in MeV for the light baryon octet and decuplet.

3.5.5 The Eightfold Way at work: Comments and extensions

Despite the fact that the symmetry is only approximate (masses in the same multiplet are not equal) we can apply it with success to find formulas for the mass differences and for the magnetic moments. For instance the Gell-Mann–Okubo mass formula

$$M = a_0 + a_1 S + a_2 \left[I(I+1) - \frac{1}{4} S^2 \right], \quad I = \text{isospin}, S = \text{strangeness}$$

where a_0, a_1, a_2 are parameters to be determined. The application of this rule to the decuplet leads to the equal spacing rule, that is the difference between the masses of particles in the different levels of strangeness are equal, that is

$$M_\Delta - M_\Sigma = M_\Sigma - M_\Xi = M_\Xi - m_\Omega \quad (3.72)$$

At the time that the Eightfold Way was proposed the $\Omega(sss)$ baryon was not yet discovered. Using the above formula Gell-Mann predicted its mass to be around 1680

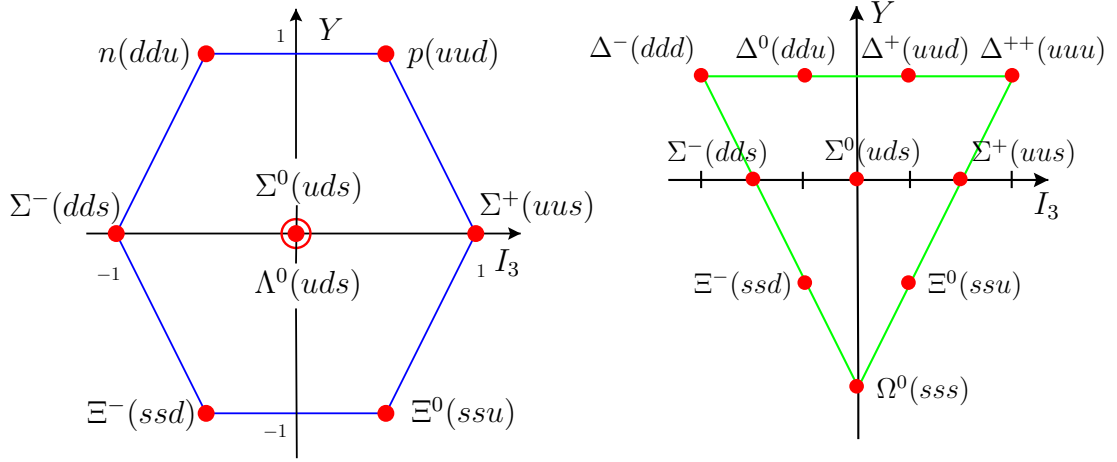


Figure 3.7: The $S = 1/2$ octet and in an $S = 3/2$ decuplet.

MeV. Its discovery in 1964 with the mass of 1672 MeV was a big success for the quark model construction. The mesons and hadrons are bound states of quarks. Therefore the quarks can have an orbital angular momentum. In the previous examples we had always $L = 0$, but heavier resonances can be classified in the same way allowing for $L \neq 0$. At the time of the discovery we only knew three types of quarks, u, d, s . However in 1974 the charm quark c was discovered with a much higher mass. People thought of enlarging the symmetry to $\mathbf{SU}(4)_f$, although the symmetry is much less perfect (see below). With the discovery of quarks b (1977) and t (1995) some people even thought of an $\mathbf{SU}(6)_f$, in this case badly broken and therefore with little use.

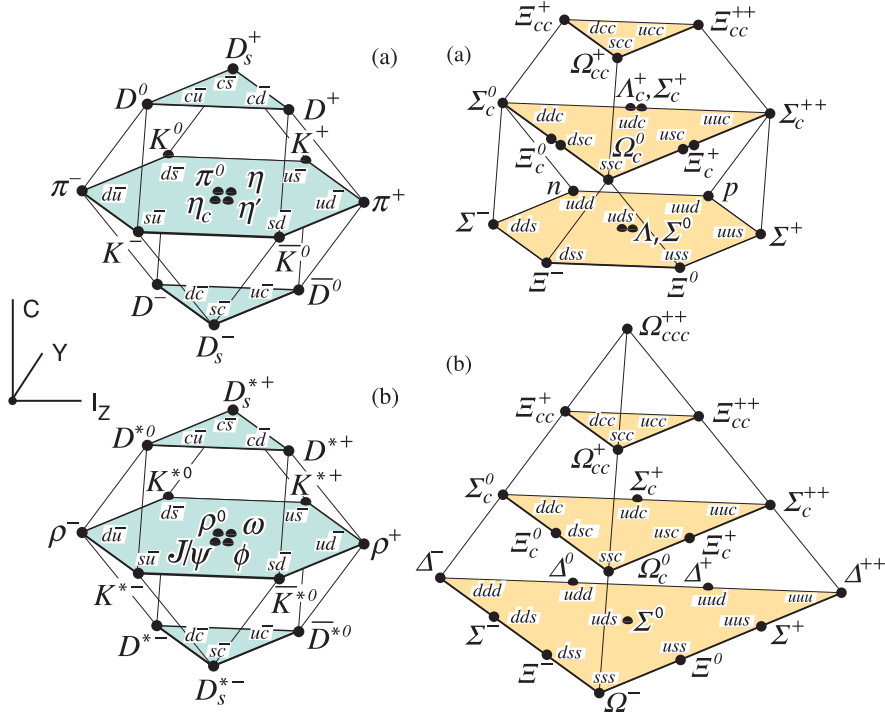
Adding the c quark the symmetry is $\mathbf{SU}(4)_f$ of flavour. The symmetry is not as good because the mass of the c quark is much larger. However we can still represent the multiplets and some conclusions can be drawn. In Fig. 3.8 we show the lowest lying multiplets of $\mathbf{SU}(4)_f$ for mesons and baryons.

3.6 Discrete Symmetries

Up to now we have discussed continuous symmetries, both internal and of the space-time. In this section we are going to see other type of symmetries that are discrete. They do not lead to conservation laws as the Noether theorem does not apply here, but that are very important in the construction of the theories describing the fundamental interactions.

3.6.1 Parity

Until 1957 all physicists believed that all laws of Nature were invariant with respect to reflections as indicated in the figure, The two operations only differ by a rotation

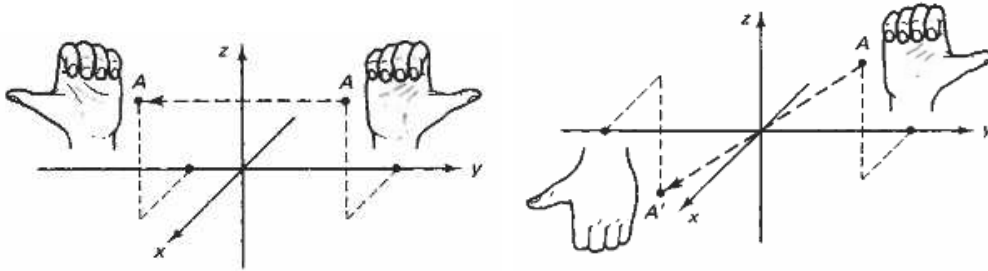
Figure 3.8: $\text{SU}(4)_f$ mesons and baryon multiplets. Source PDG.

(by 180° around the y axis in this case) and if the theory is invariant for rotations, as it is the usual case (rotations are part of the Lorentz group of special relativity), there is no difference between the two. In quantum mechanics we call this operation Parity, and the corresponding operator P . We have for vectors

$$P(\vec{r}) = -\vec{r}, \quad P(\vec{p}) = -\vec{p}, \quad P(\vec{E}) = -\vec{E}, \quad P(\vec{A}) = -\vec{A} \quad (3.73)$$

that is, vectors change sign under Parity as the coordinates. However from the previous relations it results that

$$P(\vec{L}) = P(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{L}, \quad P(\vec{B}) = P(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{B}. \quad (3.74)$$

Figure 3.9: Reflection in the plane xz and inversion $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$

Therefore, despite the usual name, the angular momentum and the magnetic field $\vec{B}$ are not true vectors. They are called pseudo-vectors, as they transform as ordinary vectors for all transformations except for Parity (space inversion). One consequence of this is that one cannot add vectors with pseudo-vectors. We can verify that, for example the Lorentz force is a true vector as

$$P(\vec{F}) = P\left(q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\right) = -\vec{F} \quad (3.75)$$

because $\vec{B}$ is a pseudo-vector but the cross product recovers the character of a true vector. We can also verify, from the above expressions that the cross product of two true vectors is a pseudo-vector. In a similar way there are two types of scalars, the true scalars that do not change sign under Parity,

$$P(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad (3.76)$$

and the pseudo-scalars that do change sign, as for example,

$$P(\vec{E} \cdot \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (3.77)$$

If we apply P twice we return to the initial situation, therefore

$$P^2 = I \quad \text{Eigenvalues are } \pm 1 \quad (3.78)$$

that indicates that the Parity group has only two elements (discrete) I and P . According to the rules of QFT, the parity of bosons should be equal to that of their anti-particles, while for fermions they should have opposite parities to the anti-fermions. If the angular momentum is not zero, the general result is

$$P = P_1 P_2 (-1)^l \quad (3.79)$$

which gives $(-1)^l$ for boson-anti-boson systems and $(-1)^{l+1}$ for fermion-anti-fermion. To complete this enumeration the photon is described by a vector and therefore we should have $P(\gamma) = -1$.

The strong and electromagnetic interactions were known to be invariant under parity transformations, and everybody thought that this should be a general rule, including also weak interactions. However, in 1956, there was a puzzle known as the $\tau - \theta$ puzzle. Two mesons with spin 0 and with the same mass had the following decays,

$$\begin{aligned} \theta^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0, & P &= (-1)^2 = +1 \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0, & P &= (-1)^3 = -1 \end{aligned} \quad (3.80)$$

The only difference between them was parity assuming that it should be conserved. As the lifetimes were very different with the decay in three pions much occurring at a much slower rate, Lee and Young proposed that the two mesons were the same

particle, with the first decay due to strong interactions and the second due to weak interactions and parity was not conserved in this case. Searching in the literature, they verified that there was no experimental proof that the weak interactions did conserve parity. They proposed then an experiment that was done by Wu in 1957, showing that in fact parity is not conserved in the weak interactions.

The experiment consisted in observing the electrons in the decay

$${}^{60}\text{Co}(J^P = 5^+) \rightarrow {}^{60}\text{Ni}(J^P = 4^+) + e + \bar{\nu}_e \quad (3.81)$$

with the spin of the nuclei of cobalt aligned in a given direction that we take as the positive direction of the z axis. The experiment showed that the electrons were always produced in the opposite direction to the spin of the nucleus. As the difference of spin is one unit, the spins of the electron and its anti-neutrino should be aligned to add to one unit of spin. This result means that the anti-neutrino has always its spin aligned with the direction of movement (positive helicity) and that the electron is produced in the direction opposite to its spin (negative helicity). As it was already known from the electromagnetic interactions that the electron could have both helicities, it should be the anti-neutrino that could only have positive helicity, and its anti-particle, the neutrino, should always have negative helicity. As the neutrinos only have weak interactions, these should violate parity. Many experiments since then have confirmed this result.

3.6.2 Charge Conjugation

Charge conjugation, C , transforms particle states into anti-particle states, leaving unchanged the coordinates and spin. It changes therefore the sign of the additive quantum numbers like the electric charge, baryon number, etc. As $C^2 = I$ its eigenvalues are ± 1 (discrete). Only neutral particles can be eigenstates of C . These are the photon, and some neutral mesons like π^0 . As the photon is the quanta of the electromagnetic field, it should change sign if we change all the signs of the charges that are at its origin, therefore we should have for the photon, $C = -1$. From the decay,

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (3.82)$$

we should have $C(\pi^0) = +1$. It can be shown that for a system of particle and anti-particle ($p\bar{p}$) with total spin s and orbital momenta l we have

$$C(p\bar{p}) = (-1)^{l+s} . \quad (3.83)$$

Charge conjugation is a symmetry of the strong and electromagnetic interactions but not of the weak interactions. This is because when applied to a neutrino (negative helicity) it produces an anti-neutrino also with negative helicity (helicity is not changed in the operation) and this particle does not exist in Nature.

3.6.3 CP Violation

Although C and P are not symmetries of the weak interactions, it is verified that the successive product CP is almost a symmetry of the weak interactions. In the previous example, if after applying C to the anti-neutrino, we apply P we invert the helicity and end up with a neutrino with negative helicity that it is observed in Nature. This led to an experimental confirmation of this hypothesis. In 1964 in the $K^0\bar{K}^0$ it was shown that this was not the case, and that there was a small violation of the product CP . More recently CP violation was confirmed also in the $B^0\bar{B}^0$ system. It is therefore a result that has to be incorporated in the description of the weak interactions. We will come back to this topic at the end of the course.

3.6.4 Time Reversal and the TCP theorem

There is a third discrete symmetry of spacetime, called time reversal, designated by the operator T . Classically the fundamental equations of the electromagnetism and of mechanics are invariant if we change the sign of the time. If we see the movie backwards we cannot distinguish. At the quantum level, both strong and electromagnetic interactions have this symmetry, but it could be that the weak interactions would not be invariant. The experiments to answer this question are very complicated, because it is not possible to use scattering. The best that we can do is to measure quantities that would vanish if time reversal was a good symmetry of the theory. The candidates are, for instance, the electric dipole moment of the electron or of the neutron. At this moment only upper limits were observed.

$$d_n < 6 \times 10^{-26} \text{ e cm}, \quad d_e < 1.6 \times 10^{-27} \text{ e cm} \quad (3.84)$$

In QFT there exists a theorem that states that the product of the three discrete operations, TCP, should be conserved (invariant). Up to the moment there is no evidence that this is not true. If we take it as true, knowing that the product CP is not truly conserved, we conclude that some violation of T should exist in the weak interactions.

Problemas capítulo 3

3.1 Construa a tabela de multiplicação do grupo de simetrias do triângulo equilátero, dada no exemplo 3.1. Verifique que o grupo é não abeliano.

3.2 O grupo de Poincaré é constituído pelo grupo de Lorentz mais as translações. Se $J_{\mu\nu}$ designarem os geradores do grupo de Lorentz e P_μ os geradores das translações, as relações de comutação são

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}) \quad (3.85)$$

$$[P_\alpha, J_{\mu\nu}] = i(g_{\mu\alpha}P_\nu - g_{\nu\alpha}P_\mu) \quad (3.86)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

Mostre que

$$[P^2, J_{\mu\nu}] = [P^2, P_\mu] = 0 \quad (3.87)$$

$$[W^2, J_{\mu\nu}] = [W^2, P_\mu] = [W^2, P^2] = 0$$

onde

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma$$

é o vetor (operador) de Pauli-Lubanski. Qual a importância deste resultado?

3.3 Um sistema de duas partículas ligadas, no seu referencial próprio com momento angular l e projeção m segundo o eixo dos z pode ser escrito como

$$||\vec{p}|, l, m\rangle = \sum_{\theta, \phi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) |\vec{p}, -\vec{p}\rangle \quad (3.88)$$

Use a propriedades das harmónicas esféricas,

$$Y_{lm}^*(\theta - \pi, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (3.89)$$

Para mostrar que a paridade do sistema é,

$$P = P_1 P_2 (-1)^l \tag{3.90}$$

onde P_i são as paridades intrínsecas dos dois constituintes.

Chapter 4

Klein-Gordon and Dirac equations

Seguimos aqui as secções 7.1 a 7.3 do Griffiths [2] e as secções 1.2 a 1.5 de ITC [3]. Vamos no entanto usar o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$) discutido na aula anterior.

4.1 A equação de Klein-Gordon.

Começamos pela partícula livre. Em mecânica quântica não relativista a equação de Schrödinger é obtida da equação fundamental

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \quad (4.1)$$

usando o Hamiltoniano livre não relativista que é

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (4.2)$$

e fazendo a substituição $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$. Obtemos então

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \quad (4.3)$$

A primeira ideia que surgiu para generalizar esta equação para uma partícula relativista foi usar em vez da Eq. (4.2) o Hamiltoniano relativista. Para uma partícula livre o Hamiltoniano é a sua energia e devemos ter

$$H = E \quad (4.4)$$

A energia está relacionada com o momento linear através da relação

$$p_\mu p^\mu = m^2 \quad (4.5)$$

onde

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}) \quad (4.6)$$

Temos então

$$E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 \quad (4.7)$$

ou seja

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (4.8)$$

Classicamente exige-se que as energias sejam positivas por isso deveríamos ter no caso relativista

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} \quad (4.9)$$

Somos imediatamente confrontados com o problema de interpretar a raiz quadrada dum operador. Para evitar este problema vamos encontrar uma equação para H^2 . Isto obtém-se facilmente iterando a Eq. (4.1) e observando que $[i \frac{\partial}{\partial t}, H] = 0$. Obtém-se então

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\vec{\nabla}^2 + m^2) \psi \quad (4.10)$$

ou ainda

$$[\square + m^2] \psi = 0 \quad (4.11)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Agora não temos dificuldades em interpretar os operadores mas introduzimos no problema as soluções de energia negativa que também são soluções da Eq. (4.11). Como veremos as soluções de energia negativa não podem deixar de existir em mecânica quântica relativista e a sua interpretação está relacionada com as antipartículas. A observação experimental de antipartículas veio a confirmar esta interpretação.

Mas não foi a existência de soluções com energia negativa que levou ao abandono da Eq. (4.11), chamada equação de Klein-Gordon [7–9], como equação relativista para o eletrão mas antes outro problema relacionado com a *densidade* de probabilidade. Partindo da Eq. (4.11) e da equação complexa conjugada obtemos

$$\psi^* [\square + m^2] \psi - \psi [\square + m^2] \psi^* = 0 \quad (4.12)$$

ou

$$0 = \psi^* \square \psi - \psi \square \psi^* = \partial_\mu (\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi) \quad (4.13)$$

onde $\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \equiv \psi^* \overrightarrow{\partial}^\mu \psi - \psi^* \overleftarrow{\partial}^\mu \psi$. Temos então

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad ; \quad J^\mu = \psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \quad (4.14)$$

Na identificação usual $J^\mu = (\rho c, \vec{J})$ pelo que a densidade será

$$\rho = \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (4.15)$$

Esta equação mostra que ρ não pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade por não ser definida positiva. Finalmente uma terceira razão fez abandonar a equação da Klein-Gordon. De facto ela não conduz aos níveis de energia do átomo de *hidrogénio* (ver Problema 4.3).

Se excetuarmos esta última razão, a Eq. (4.11) foi abandonada pelas razões erradas. De facto pode-se mostrar que ela é a boa equação relativista para partículas de *spin zero*, razão pela qual não pode explicar os níveis do átomo de hidrogénio onde os efeitos do spin são importantes. As soluções de energia negativa serão compreendidas e a densidade ρ será re-interpretada não como uma densidade de *probabilidade* mas antes como uma *densidade de carga*.

4.2 A equação de Dirac

Confrontado com os problemas anteriores Dirac propôs uma outra equação relativista para o eletrão [10, 11]. Como na equação fundamental, Eq. (4.1), a derivada em ordem ao tempo aparece linearmente é natural admitir num contexto relativista que o Hamiltoniano seja também linear nas derivadas em ordem às coordenadas e portanto escrevemos

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi \equiv H \psi \quad (4.16)$$

É fácil de ver que α^i e β não podem ser números pois então a relação entre energia e momento duma partícula relativista não seria verificada. Também ψ não pode ser um escalar se $\rho = \psi^* \psi$ é para ser interpretada como a componente temporal dum 4-vetor corrente. Assim Dirac propôs que $\vec{\alpha}$ e β sejam matrizes hermiticas $N \times N$ (para que H seja hermitico) e que ψ seja uma matriz coluna com N elementos.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A Eq. (4.16) é então interpretada como uma equação matricial. Para que ela faça sentido devemos satisfazer as condições:

- Deve dar a relação correta entre a energia e o momento isto é $E^2 = p^2 + m^2$, para uma partícula livre.
- Deve fornecer uma probabilidade definida positiva.
- Deve ser covariante para transformações de Lorentz.

Vejamos os dois primeiros requisitos. Para que se obtenha a relação energia-momento correta basta que cada componente satisfaça à equação de Klein Gordon. Para isso iteramos a Eq. (4.16)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (-i\alpha^i \nabla_i + \beta m) i \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \left[-\frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} \nabla_i \nabla_j - i m (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \nabla_i + \beta^2 m^2 \right] \psi \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para que cada componente satisfaça a equação de Klein- Gordon devemos ter

$$\begin{cases} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \\ (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

Complemento 4.1

Na Eq. (4.18), que conduziu às relações anteriores, simetrizámos o produto $\alpha^i \alpha^j$. Como este tipo de situação vai aparecer várias vezes, expliquemos um pouco mais. Tomemos como exemplo o espaço euclidiano a 3 dimensões com métrica δ_{ij} , mas os resultados são independentes desta hipótese. Seja T_{ij} um tensor de segunda ordem neste espaço (o que quer dizer que se transforma como as coordenadas em cada um dos seus índices), $A_{ij} = -A_{ji}$ um tensor anti-simétrico e $S_{ij} = S_{ji}$ um tensor simétrico. Então

$$\begin{aligned} A_{ij} S_{ij} &= A_{12} S_{12} + A_{21} S_{21} + \dots \\ &= A_{12} S_{12} - A_{12} S_{12} + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

pois é sempre possível rearranjar os termos para se cancelarem dois a dois. Dizemos que *a contração dum tensor simétrico com um tensor anti-simétrico é sempre nula*. Por outro lado, um tensor sem simetria definida, pode ser sempre decomposto nas suas partes simétrica e anti-simétrica, isto é,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \\ &= T_{ij}^S + T_{ij}^A \end{aligned} \quad (4.21)$$

Então obtemos facilmente

$$T_{ij} A_{ij} = T_{ij}^A A_{ij} \quad ; \quad T_{ij} S_{ij} = T_{ij}^S S_{ij} \quad (4.22)$$

Temos portanto que construir 4 matrizes que *anticomutem*, sejam *hermíticas* e cujo *quadrado* seja a *identidade*. É desde logo claro que não podem ser 2×2

pois só há 3 matrizes 2×2 que anticomutam, as matrizes de Pauli. Para ver a dimensão mínima em que é possível realizá-las, observemos que sendo hermiticas os seus valores próprios são reais e iguais a ± 1 pois $\alpha^{i2} = \beta^2 = 1$. Das relações de anticomutação pode-se concluir que têm traço nulo. Por exemplo

$$\alpha^i = -\beta\alpha^i\beta \quad (4.23)$$

ou seja

$$\text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(-\beta\alpha^i\beta) = -\text{Tr}(\alpha^i) = 0 \quad (4.24)$$

Isto tem como consequência que N deve ser par para que o número de valores próprios $+1$ e -1 seja igual. Como $N = 2$ está excluído devemos ter $N = 4$ como a dimensão mais baixa onde se realiza a Eq. (4.19). Uma representação explícita, a chamada *representação de Dirac* é

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

É um exercício trivial verificar que a Eq. (4.25) satisfaz as condições da Eq. (4.19). Claro que a escolha não é *única*, mas voltaremos a este assunto mais tarde.

Vamos agora ver a questão da corrente de probabilidade. Para isso escrevemos a equação conjugada hermitica da Eq. (4.16). Atendendo a que α^i e β são hermiticas, obtemos

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger (i \alpha^i \overleftarrow{\partial}_i + \beta m) \quad (4.27)$$

Multiplicando a Eq. (4.16) à esquerda por $\psi^\dagger$ e a Eq. (4.27) à direita por ψ e subtraindo obtemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -i \nabla_i (\psi^\dagger \alpha^i \psi) \quad (4.28)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) = 0 \quad (4.29)$$

o que permite identificar uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade:

$$\rho = \psi^\dagger \psi \quad (4.30)$$

$$\vec{j} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \quad (4.31)$$

Integrando a Eq. (4.29) em todo o espaço obtemos

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger \psi = 0 \quad (4.32)$$

o que está de acordo com identificarmos $\psi^\dagger \psi$ como uma densidade de probabilidade definida positiva.

A notação das Eq. (4.29) e (4.31) antecipa o facto de $\vec{j}$ ser um 3-vetor. De facto temos de mostrar isso e muito mais. Na secção seguinte demonstraremos que $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ é um 4-vetor conservado, $\partial_\mu j^\mu = 0$ e que a equação de Dirac é *covariante*, isto é, que mantém a mesma forma em todos os referenciais de inércia.

Antes de continuar a discutir a equação de Dirac vamos introduzir uma conveniente notação 4-dimensional. Multiplicamos a Eq. (4.16) por $\frac{1}{c}\beta$ à esquerda e introduzimos as matrizes

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad ; \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha^i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.33)$$

Então a equação de Dirac escreve-se

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (4.34)$$

ou ainda

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0 \quad (4.35)$$

onde se introduziu a notação, devida a Feynman

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \quad (4.36)$$

As matrizes γ^μ , na representação de Dirac, são

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

É fácil de ver que as relações da Eq. (4.19) se escrevem numa forma compacta em termos das matrizes γ , isto é

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} . \quad (4.38)$$

4.3 Spin e a equação de Dirac

Em mecânica quântica uma observável é conservada se comutar com o Hamiltoniano do sistema. Por exemplo, em mecânica não relativista o Hamiltoniano para a

partícula livre (equação de Schrödinger),

$$H_S = \frac{p^2}{2m} \quad (4.39)$$

comuta com o operador momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e portanto o momento angular é conservado. A questão que se põe agora é saber o que acontece em mecânica quântica relativista para o Hamiltoniano de Dirac,

$$H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (4.40)$$

Vamos calcular este comutador. Isto faz-se mais facilmente se usarmos as expressões com índices em vez de vectores. Como se trata de índices do espaço vamos usar os índices $i, j, k, \dots$. Obtemos

$$[H_D, L^i] = [\alpha^j p^j, L^i] \quad (4.41)$$

porque no espaço de Dirac, L^i é proporcional à matriz identidade que comuta com a matriz constante β . Usando agora $L^i = \epsilon^{ikm} x^k p^m$, obtemos sucessivamente,

$$\begin{aligned} [H_D, L^i] &= \epsilon^{ikm} [\alpha^j p^j, x^k p^m] \\ &= \epsilon^{ikm} \alpha^j [p^j, x^k] p^m \\ &= -i \epsilon^{ikm} \alpha^k p^m = -i (\vec{\alpha} \times \vec{p})^i \end{aligned} \quad (4.42)$$

isto é, o momento angular não comuta com o Hamiltoniano de Dirac,

$$[H_D, \vec{L}] = -i \vec{\alpha} \times \vec{p} \quad (4.43)$$

e não é portanto uma quantidade conservada, mesmo para a partícula livre.

Se pensarmos um pouco isto não devia ser uma surpresa, pois do estudo do átomo de hidrogénio em mecânica quântica não relativista sabemos que o electrão tem spin e é o momento angular total que é conservado. Em mecânica quântica não relativista o operador de spin é dado por ($\hbar = 1$),

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}. \quad (4.44)$$

Como os spinores de Dirac têm quatro componentes, vamos generalizar este operador para

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

e vamos ver quais as relações de comutação deste operador com H_D . Como $\vec{\Sigma}$ é diagonal comuta com a matriz também diagonal¹ β , portanto temos só de ver as relações de comutação com as matrizes α^i . Obtemos

$$[\alpha^i, \Sigma^j] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}$$

¹Estamos a considerar a representação de Dirac, claro.

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \\ [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2i\epsilon^{ijk} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

e portanto

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{\Sigma}] = 2i\vec{\alpha} \times \vec{p} \tag{4.47}$$

onde usámos $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$. Usando os resultados das Eqs. (6.18) e (6.22) podemos definir o momento angular total,

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{r} \times \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \tag{4.48}$$

que satisfaz,

$$[H_D, \vec{J}] = 0 \tag{4.49}$$

e portanto o momento angular total é conservado. Usando a Eq. (6.21) e as propriedades das matrizes de Pauli podemos facilmente mostrar que

$$S^2 = \frac{1}{4}\Sigma^2 = \frac{3}{4} \tag{4.50}$$

o que mostra que o electrão tem $s = 1/2$.

4.4 Soluções para a partícula livre

4.4.1 Soluções da equação de Dirac no referencial próprio

Tomemos a equação de Dirac para a partícula livre ($\hbar = c = 1$)

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0 \tag{4.51}$$

A Eq. (4.51) admite como soluções ondas planas

$$\psi(x) = w(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \tag{4.52}$$

desde que $p_\mu p^\mu = m^2$. Isto implica que $(p^0)^2 = E^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} + m^2$, e portanto temos soluções com energia positiva e negativa. Nas nossas convenções fazemos $p^0 = E/c = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} > 0$ sempre, pelo que devemos ter

$$\psi^r(x) = w^r(\vec{p})e^{-i\varepsilon_r p_\mu x^\mu} \tag{4.53}$$

onde $\varepsilon_r = \pm 1$ para soluções de energia positiva e negativa, respetivamente, e o índice r explicita as diferentes soluções independentes, como veremos de seguida.

Para determinar $w^r(\vec{p})$ vamos considerar primeiro o caso da partícula em repouso. No referencial próprio a equação de Dirac reduz-se a

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - m\right)\psi = 0 \quad (4.54)$$

Usando a representação de Dirac, Eq. (4.37), é fácil de ver que a equação se escreve

$$m(\varepsilon_r\gamma^0 - 1)\psi^r = 0 \quad (4.55)$$

onde

$$\psi^r = w^r(0)e^{-i\varepsilon_r mt} \quad (4.56)$$

com

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1, 2 \\ -1 & r = 3, 4 \end{cases} \quad (4.57)$$

e

$$w^{(1)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad w^2(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$w^3(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad w^4(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Vemos portanto que $r = 1, 2$ são soluções da energia *positiva* e $r = 3, 4$ da energia *negativa*. O factor $\sqrt{2m}$ da normalização foi introduzido por conveniência como será claro mais tarde (esta normalização é a nossa *única* diferença em relação às convenções de Bjorken e Drell). Se usarmos o operador

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

vemos ainda que $w^{(r)}(0)$ são funções próprias de Σ^3 com valores próprios ± 1 . Assim as soluções $r = 1, 2$ descrevem o elétron de *Schrödinger-Pauli* e as soluções de energia negativa, $r = 3, 4$ serão interpretadas mais tarde. Na re-interpretação de Dirac das soluções de energia negativa como as anti-partículas, a ausência de um elétron de energia negativa com spin CP corresponde a um positrão com spin down, por isso $w^3(0)$ corresponderá a spin down enquanto que $w^4(0)$ a spin up.

4.4.2 Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

Se tivéssemos visto como os spinores se transformam num transformação de Lorentz, poderíamos aqui fazer simplesmente uma mudança de referencial. Voltaremos a este

assunto na secção seguinte, mas sem demonstração, pelo que aqui vamos construir as soluções para $\vec{p} \neq 0$ diretamente seguindo de perto o Griffiths. Queremos soluções da forma

$$\psi(x) = N w(k) e^{-i k \cdot x} \quad (4.61)$$

onde N é uma normalização a determinar no final. Substituindo na Eq. (4.51) obtemos

$$(\gamma \cdot k - m)w(p) = (\not{k} - m)w(k) = 0 \quad (4.62)$$

onde usámos a notação, devida a Feynman,

$$\not{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu \equiv \gamma \cdot k = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \quad (4.63)$$

Comecemos por notar que a Eq. (4.62) é uma equação algébrica matricial. Na representação de Dirac temos

$$\not{k} = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} k^0 & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

pelo que escrevendo o 4-spinor w em termos de dois bi-spinores,

$$w(p) = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

obtemos

$$(\not{k} - m)w = \begin{bmatrix} k^0 - m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$= \begin{bmatrix} (k^0 - m)w_A & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_B \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_A & -(k^0 + m)w_B \end{bmatrix} = 0 \quad (4.67)$$

Estas equações conduzem às relações,

$$w_A = \frac{1}{k^0 - m}(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})w_B, \quad w_B = \frac{1}{k^0 + m}(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})w_A, \quad (4.68)$$

A consistência requer então que

$$w_A = \frac{1}{(k^0)^2 - m^2}(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 w_A \quad (4.69)$$

Mas usando $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$, concluímos que deve ser

$$|\vec{k}|^2 = (k^0)^2 - m^2, \quad (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = m^2 \quad (4.70)$$

Exemplo 4.1 Mostremos que $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$. Para isso usamos a propriedade das matrizes de Pauli,

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (4.71)$$

para obter

$$(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = k_i k_j \sigma_i \sigma_j = |\vec{k}|^2 \quad (4.72)$$

onde no último passo usamos o facto de a contração dum tensor simétrico com um anti-simétrico se anular.

Portanto k^μ deve ser um quadri-vetor relacionado com o 4-momento da partícula por

$$k^\mu = \pm p^\mu \quad (4.73)$$

correspondendo o sinal + às soluções de energia positiva, as partículas e o sinal – às soluções de energia negativa, as anti-partículas.

Podemos agora construir 4 soluções independentes da equação de Dirac. De facto

1. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então $(E = p^0)$

$$w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

2. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

3. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

4. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Com a normalização canónica,

$$w^\dagger w = 2E \quad (4.78)$$

obtemos finalmente as quatro soluções independentes,

$$u^{(1)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{bmatrix}, u^{(2)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

e

$$v^{(1)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v^{(2)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

onde usámos a notação convencional, u para as partículas e v para as anti-partículas. Notar que devido aos sinais na Eq. (4.73), as equações para u e v diferem dum sinal (ver Eq. (4.62))

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad (\not{p} + m)v = 0. \quad (4.81)$$

4.5 Covariância da equação de Dirac

4.5.1 Transformações de spinores

Escrevemos a equação de Dirac na forma,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (4.82)$$

sem nunca nos preocuparmos em que referencial estamos. A razão é que estamos implicitamente a usar o facto de que deve ter a mesma forma em todos os referenciais de inércia, isto é no referencial S' deverá ser

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0 \quad (4.83)$$

Numa transformação geral entre S e S' definida através das transformações,

$$x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu \quad (4.84)$$

um escalar fica invariante $\phi'(x') = \phi(x)$, mas um vetor muda como as coordenadas,

$$A'^\mu = a^\mu_\nu A^\nu. \quad (4.85)$$

A questão é saber como se transformam os spinores nas transformações da Eq. (4.84). Não vamos explicar esta questão aqui (ver a Ref. [3]) mas só dar o resultado. Se definirmos

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x) \quad (4.86)$$

então a equação de Dirac é covariante se

$$S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)a^\nu{}_\mu = \gamma^\nu \quad (4.87)$$

A forma explícita depende do tipo de transformações de Lorentz. Assim

1. Rotações

$$S_R = e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}} \quad (4.88)$$

onde $\vec{\theta}$ é um vetor coma direção da rotação e módulo igual ao ângulo de rotação e

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Notar que em cada bloco diagonal os spinors transforma-se como em mecânica quântica não relativista.

2. Transformações de Lorentz (boosts)

$$S_L = e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\alpha}} \quad (4.90)$$

onde $\vec{\alpha}$ são as matrizes de Dirac, e $\vec{\omega}$ é um vetor na direção da velocidade relativa entre S e S' tal que

$$\tanh \omega = \frac{|\vec{V}|}{c} \quad (4.91)$$

3. Inversão no espaço (Paridade)

Neste caso

$$a^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

e portanto a Eq. (4.87), dá

$$S_P = \gamma_0 . \quad (4.93)$$

4.5.2 Adjunto de Dirac

A escolha mais simplista para formar um invariante seria $\psi^\dagger\psi$. Contudo esta quantidade não é um escalar mas sim a componente temporal dum 4-vetor, como vimos na discussão da corrente de probabilidade. Como formar então um escalar? Para isso notemos, que

$$S_L^\dagger = S_L \neq S_L^{-1} \rightarrow \psi'^\dagger\psi' \neq \psi^\dagger\psi \quad (4.94)$$

contudo podemos mostrar que para todas as transformações de Lorentz devemos ter

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 \quad (4.95)$$

Por isso se definirmos o chamado **adjunto de Dirac**

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0 \quad (4.96)$$

então temos

$$\psi' = S\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1} \quad (4.97)$$

e portanto

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi \quad (4.98)$$

e é portanto um escalar, invariante para **todos** os tipos de transformações de Lorentz.

4.5.3 Covariantes bilineares

Tal como qualquer matriz complexa 2×2 se pode exprimir em termos de 4 matrizes linearmente independentes (por exemplo a matriz identidade mais as matrizes de Pauli) assim qualquer matriz 4×4 se pode exprimir em termos de 16 matrizes 4×4 linearmente independentes. Para introduzir estas matrizes é conveniente definir a seguinte matriz

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (4.99)$$

que na representação de Dirac tem a forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Da definição resultam as propriedades importantes

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (4.101)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (4.102)$$

Estamos agora em posição de definir as 16 matrizes 4×4

$$\Gamma^S = 1 \quad (4.103)$$

$$\Gamma_\mu^V = \gamma_\mu \quad (4.104)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (4.105)$$

$$\Gamma_\mu^A \equiv \gamma_5\gamma_\mu \quad (4.106)$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 \quad (4.107)$$

onde os símbolos S , V , T , A e P designam respetivamente: escalar, sector, tensor, pseudo sector e pseudo-escalar e têm a ver com a maneira como os bilineares

$$\bar{\psi} \Gamma^a \psi \quad a = S, V, T, A \text{ e } P \quad (4.108)$$

se transformam para transformações de Lorentz. Por exemplo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') \Gamma^A \psi'(x') &= \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \gamma^\mu \psi'(x') \\ &= \bar{\psi}(x) S^{-1} \gamma_5 \gamma^\mu S \psi(x) \\ &= \det a \, a^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\nu \psi(x) \end{aligned} \quad (4.109)$$

onde se usou o facto de $[S, \gamma_5] = 0$ para transformações de Lorentz próprias e $\{\mathcal{P}, \gamma_5\} = 0$ para a inversão no espaço. Isto mostra que $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)$ se transforma como um sector axial ou pseudo-sector. De forma semelhante se podiam demonstrar as propriedades de transformação dos outros bilineares.

4.6 Antipartículas

Apesar de todos os sucessos da equação de Dirac descritas anteriormente o problema das soluções com energia negativa continua por resolver. Este problema não é um problema académico, pois é preciso explicar porque é que os electrões nos átomos não efectuam transição para estados de energia negativa. Por exemplo um cálculo simples dá para o electrão, no estado fundamental do hidrogénio, uma taxa de transição de 10^8 s^{-1} para decair no intervalo $[-mc^2, -2mc^2]$

4.6.1 A teoria dos buracos de Dirac.

Foi Dirac quem primeiro forneceu um tratamento consistente das soluções de energia negativa. O argumento de Dirac só funciona para fermiões pois faz uso do *Princípio de Exclusão de Pauli*. Assim para Dirac o *vácuo* da teoria é constituído por todos os estados de energia negativa preenchidos. Devido ao princípio de exclusão de Pauli um electrão com energia $E > 0$ não pode então efectuar uma transição para um estado de energia negativa, explicando a estabilidade dos átomos. Claro que o vácuo tem energia e momento infinitos mas fisicamente só medimos diferenças em relação ao vácuo e essas serão finitas.

A principal consequência desta interpretação é a existência de antipartículas, neste caso o positrão. Consideremos que o vácuo tem uma lacuna ou buraco. Isto quer dizer a *ausência* dum electrão de energia $-E$ e carga $-|e|$. Mas isto pode ser igualmente interpretado como *presença* duma partícula de carga $+|e|$ a energia

positiva $+E$, isto é, o positrão. Assim a produção dum par electrão-positrão é explicada esquematicamente na Figura 4.1

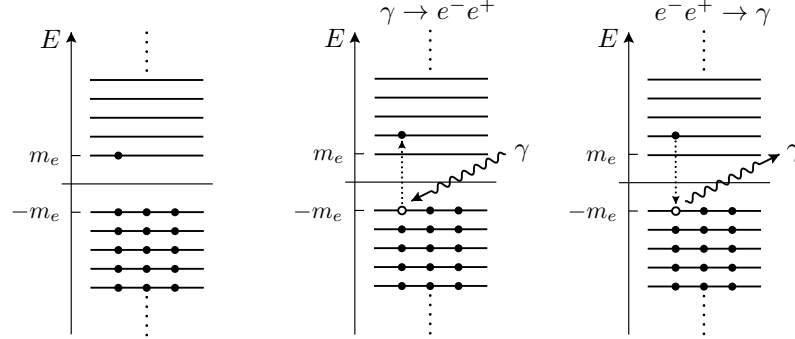


Figure 4.1: Esquema do mar de Dirac. Produção e aniquilação de pares.

Isto é, um electrão é excitado dum estado de energia negativa deixando atrás de si uma lacuna no mar de Dirac. Como esta lacuna corresponde a um positrão ficou criado um par e^+e^- . Igualmente a aniquilação electrão-positrão pode ser interpretada como um electrão com $E > 0$ que faz uma transição para um estado com $E < 0$ que estava livre (positrão) desaparecendo portanto o electrão e o positrão, conforme indicado na Figura 4.1

Com a teoria dos buracos abandonamos a interpretação em termos de funções de onda de uma partícula para passar a ser uma explicação em termo de muitas partículas. Só o formalismo da segunda quantificação, com os seus operadores de criação e destruição permitirá fazer uma descrição consistente desta teoria de muitas partículas. Essa explicação, como veremos, também se aplicará aos bósons, o que a este nível não é possível de explicar por não satisfazerem ao princípio de exclusão de Pauli. Contudo a interpretação de Dirac teve um papel determinante no desenvolvimento da teoria e a descoberta experimental das antipartículas foi um grande sucesso.

4.6.2 A interpretação de Feynman-Stückelberg

A interpretação moderna das soluções de energia negativa foi desenvolvida por Stückelberg e Feynman no contexto de teoria quântica dos campos. As partículas de energia negativa ($E < 0$) são interpretadas como partículas de energia negativa que se propagam para trás no tempo. Estas partículas de energia negativa correspondem a antipartículas de energia positiva que se propagam para o futuro. A dependência no tempo das funções de onda não virá alterada por esta dupla transformação, $E \rightarrow -E$ e $t \rightarrow -t$, isto é

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)} \quad (4.110)$$

Para ilustrar esta ideia consideremos os diagrama da Fig. 4.2. No diagrama da esquerda um electrão de energia E emite um fóton de energia $2E$ e para conservar

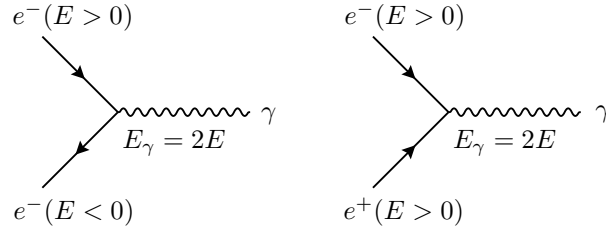


Figure 4.2: Equivalência entre electrões de energia negativa e positrões de energia positiva.

energia um electrão de energia $-E$. Sendo uma solução de energia negativa propaga-se para trás no tempo. Na interpretação de Feynman-Stückelberg, no diagrama da direita, um positrão de energia $E > 0$ aniquila-se com um electrão de energia $E > 0$ para produzir um fóton de energia $2E$. Nesta interpretação tanto a partícula como a antipartícula se propagam para o futuro. Notar no entanto que nos diagramas de Feynman as antipartículas são desenhadas com a seta para trás no tempo, como no diagrama do lado esquerdo. Voltaremos a esta questão no próximo capítulo.

4.6.3 Conjugação de carga

Da teoria dos buracos emerge assim numa nova simetria de natureza: para cada partícula existe uma antipartícula. Esta simetria designa-se por *conjugação de carga*. Vejamos como a podemos definir. De acordo com a teoria dos buracos devemos ter uma correspondência unívoca entre as soluções de energia negativa da equação de Dirac para os electrões

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0 \quad (4.111)$$

e as soluções de energia positiva da equação de Dirac para os positrões,

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m)\psi_c = 0 \quad (4.112)$$

onde ψ_c é a função de onda para o positrão. Para encontrar a relação observemos que o sinal relativo entre $i\cancel{\partial}$ e $e\cancel{A}$ é o contrário nas duas equações. Isso leva-nos a considerar o complexo conjugado da Eq. (4.111). Obtemos

$$(-i\gamma^{\mu*}\partial_\mu - e\gamma^{\mu*}A_\mu - m)\psi^* = 0 \quad (4.113)$$

Usando agora $\gamma^{0T}\psi^* = \bar{\psi}^T$ e $\gamma^{0T}\gamma^{\mu*}\gamma^{0T} = \gamma^{\mu T}$ obtemos

$$[-\gamma^{\mu T}(+i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0 \quad (4.114)$$

Se encontrarmos uma matriz C , não singular, tal que

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (4.115)$$

podemos então identificar (a menos duma fase que tomamos igual a 1)

$$\psi_c \equiv C\bar{\psi}^T \quad (4.116)$$

Que existe uma matriz C verificando a Eq. (4.115) pode ser demonstrado construindo um exemplo específico. Na representação de Dirac é

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \quad (4.117)$$

ou mais explicitamente

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

É instrutivo ver como é que a Eq. (4.116) relaciona as soluções de energia negativa com as funções de onda do positrão. Consideremos um electrão de energia negativa em repouso com spin para baixo. Então

$$\psi = N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt} \quad (4.119)$$

onde N é uma renormalização. Aplicando a Eq. (4.116) obtemos

$$\psi_c = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt} \quad (4.120)$$

isto é, um positrão de energia positiva e spin para cima. Portanto a *ausência* dum electrão de spin $\downarrow$ e energia negativa corresponde à *presença* dum positrão de energia positiva e spin $\uparrow$. Foi este facto que nos levou a identificar $v(p, \uparrow)$ com $w^4(\vec{p})$ e $v(p, \downarrow)$ com $w^3(\vec{p})$.

4.7 Spin e helicidade

Para partículas no referencial próprio, os spinores $u((E, \vec{0}), s)$ e $v((E, \vec{0}), s)$, são estados próprios do operador S_z ,

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.121)$$

Isto deixa de ser verdade quando $\vec{p} \neq 0$. No entanto, para o caso particular do momento linear ser segundo o eixo dos z , essa situação ainda se mantém. De facto se $\vec{p} = \pm|\vec{p}|\vec{e}_z$, obtemos das Eqs. (4.79) e (4.80),

$$u_{\uparrow} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow} = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \end{bmatrix}, \quad v_{\uparrow} = N \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow} = N \begin{bmatrix} \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.122)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} S_z u_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= +\frac{1}{2}u_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) \\ S_z u_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= -\frac{1}{2}u_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) \\ S_z^{(v)} v_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= -S_z v_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) = +\frac{1}{2}v_{\uparrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) \\ S_z^{(v)} v_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) &= -S_z v_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z) = -\frac{1}{2}v_{\downarrow}(E, \pm|\vec{p}|\vec{e}_z). \end{aligned} \quad (4.123)$$

Portanto para uma partícula com momento $\vec{p} = (0, 0, \pm|\vec{p}|)$ os spinores $u_{\uparrow}, v_{\uparrow}$ correspondem a spin up e os spinores $u_{\downarrow}, v_{\downarrow}$ a spin down, conforme indicado na Fig. 4.3.

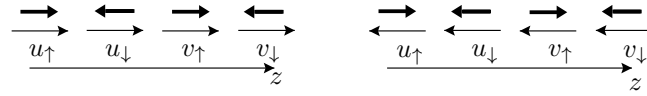


Figure 4.3: Spinores e spins para movimento segundo $\pm\vec{e}_z$.

4.7.1 Helicidade

As propriedades dos spinores para movimento segundo o eixo dos z descritas acima não são particularmente úteis nas aplicações, pois nem as partículas resultantes das colisões vão segundo o eixo dos z , nem as soluções anteriores fornecem uma base em que expandir os estados pois $[H_D, S_z] \neq 0$, e portanto não é possível definir uma base simultânea de H_D e S_z .

A base mais conveniente leva-nos ao conceito de helicidade. A helicidade é definida como a projeção do spin na direcção do movimento, isto é

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}. \quad (4.124)$$

É fácil de mostrar que $[H_D, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = 0$ e que portanto h comuta com o Hamiltoniano livre de Dirac. Como o spin medido segundo qualquer eixo está quantizado e só pode tomar os valores $\pm\frac{1}{2}$, os valores próprios da helicidade são também $\pm\frac{1}{2}$. Designamos

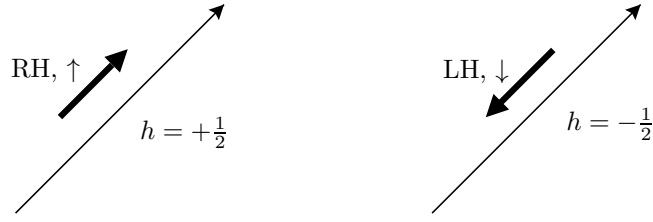


Figure 4.4: Estados próprios da helicidade para spin 1/2.

estes estados por $\uparrow$ ou RH para $h = +\frac{1}{2}$ e $\downarrow$ ou LR para $h = -\frac{1}{2}$, conforme indicado na Fig. 4.4. Notar que o conceito de helicidade não é invariante de Lorentz pois, para partículas com massa, é sempre possível ir para um referencial onde se muda o sentido do momento. Já o conceito de quiralidade que, como veremos, está relacionado é invariante de Lorentz. Preferimos a notação $\uparrow, \downarrow$, para não confundir com os estados próprios da quiralidade que veremos depois.

4.7.2 Spinores de helicidade

Para as aplicações é útil ter uma representação explícita dos spinores de helicidade. Começemos pelos spinores u para as soluções de energia positiva. Queremos resolver a equação aos valores próprios,

$$h u = \lambda u. \quad (4.125)$$

Podemos escrever esta equação na forma

$$\frac{1}{2|\vec{p}|} \begin{bmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}, \quad (4.126)$$

donde resulta

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = 2|\vec{p}|\lambda u_A, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B = 2|\vec{p}|\lambda u_B. \quad (4.127)$$

Usando agora $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$, obtemos,

$$|\vec{p}|^2 = 2|\vec{p}|\lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = 4|\vec{p}|^2\lambda^2, \quad (4.128)$$

donde resulta $\lambda = \pm 1/2$ como era de esperar. Vamos agora encontrar os vectores próprios correspondentes a estes valores próprios. Basta encontrar u_A pois usando a equação de Dirac, $(\not{p} - m)u = 0$ obtemos,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = (E + m)u_B, \quad (4.129)$$

e usando agora a Eq. (9.100) obtemos

$$u_B = 2\lambda \frac{|\vec{p}|}{E + m} u_A. \quad (4.130)$$

Para encontrar u_A escrevemos

$$\vec{p} \equiv |\vec{p}| \vec{n}, \quad \vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (4.131)$$

e então encontrar os valores próprios da Eq. (9.100), é equivalente a encontrar os valores próprios de

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.132)$$

Este é um problema bem conhecido do spin em mecânica quântica não relativista com o resultado,

$$u_{A\uparrow} = \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad u_{A\downarrow} = \begin{bmatrix} -\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad (4.133)$$

onde os vectores estão normalizados e escolhemos as fases globais de tal forma que no limite $\theta \rightarrow 0$ recuperamos os resultados da Eq. (6.12). Pondo tudo junto obtemos para os spinores u ,

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} -\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (4.134)$$

Os estados próprios de v obtêm-se de forma idêntica, não esquecendo que $\vec{S}^{(v)} = -\vec{S}$, e portanto

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{2|\vec{p}|} v_{\uparrow} = -\frac{1}{2} v_{\uparrow}. \quad (4.135)$$

O resultado final é

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \\ -\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \\ \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

Quando estudarmos as colisões em QED, voltaremos a este assunto e mostraremos a sua utilidade nas aplicações.

Problemas capítulo 4

4.1 Mostre que a construção usual da corrente de probabilidade aplicada à equação de Schrödinger conduz à densidade de probabilidade usual $|\psi|^2$ definida positiva. Compare com a Eq. (4.12) e discuta a origem da diferença entre os dois casos.

4.2 Considere o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. A partir deste tensor define-se o chamado *tensor dual*

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} .$$

a) Mostre que as equações de Maxwell são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

e que estas reproduzem as leis de Gauss e Ampère (incluindo a corrente de deslocamento introduzida por Maxwell).

b) Mostre que se tem

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

Verifique que esta equação contém as chamadas equações de Maxwell homogêneas, isto é, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$. Verifique que aquela relação é equivalente à forma mais usual (identidade de Bianchi)

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

c) Exprima os invariantes $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$ em termos dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

d) Mostre que se $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares num dado referencial, então são perpendiculares em todos os referenciais de inércia.

e) Considere um referencial S onde se tem $\vec{E} \neq 0$ e $\vec{B} = 0$. Será possível encontrar um referencial S' onde $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} \neq 0$? Justifique.

4.3 Introduza na equação de Klein-Gordon o acoplamento mínimo

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu$$

e considere as soluções estacionárias do átomo de hidrogénio, isto é ($\hbar = c = 1$)

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-iEt} \quad ; \quad A_0 = -\frac{e}{4\pi r}$$

a) Mostre que a equação de Klein-Gordon se escreve

$$\left[-\nabla^2 + m^2 - \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] \phi(\vec{r}) = 0$$

b) Mostre que esta equação se pode resolver exatamente pelos métodos usuais dando as energias

$$E_{n\ell} = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(n-\varepsilon_\ell)^2}}} \quad ; \quad \begin{cases} n = 1, 2, \dots \\ \ell = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

onde

$$\varepsilon_\ell = \ell + \frac{1}{2} - \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{1/2}$$

c) Expandindo em potências de α compare com os resultados da teoria de Schrödinger incluindo correções relativistas.

4.4 Utilize as expressões explícitas

$$\begin{aligned} S_R &= \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{\theta} \cdot \vec{\Sigma} \sin \frac{\theta}{2} \\ S_L &= \cosh \frac{\omega}{2} - \hat{\omega} \cdot \vec{\alpha} \sinh \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

para verificar que para transformações finitas também temos

$$S^{-1} \gamma^\mu S = a^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

4.5 Considere um eletrão incidente da região I com energia E conforme indicado na Figura 4.5. Admita que a partícula incidente tem a função de onda

$$\psi_{\text{inc}} = a e^{ik_1 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_1}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

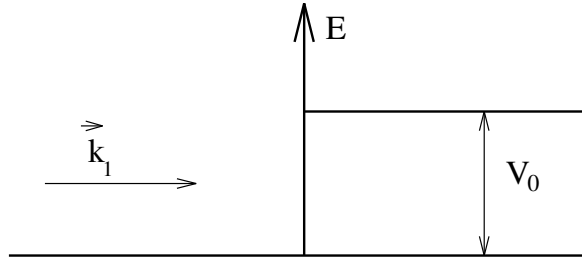


Figure 4.5: Paradoxo de Klein

- a) Calcule a onda reflectida e a onda transmitida.
b) Mostre que a corrente reflectida e transmitida obedecem a

$$\frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad ; \quad \frac{J_{\text{refl}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}$$

isto é, aparentemente tudo bem pois

$$J_{\text{inc}} = J_{\text{trans}} + J_{\text{refl}}$$

contudo

$$r = \frac{k_2}{k_1} \frac{E+m}{E-V_0+m} \quad \text{e se} \quad V_0 > E+m \quad \text{então} \quad r < 0$$

Portanto

$$J_{\text{refl}} > J_{\text{inc}}$$

Comente este resultado.

4.6

- a) Construa o Hamiltoniano H da equação de Dirac para partículas livres no espaço dos momentos.
b) Calcule o comutador $[H, \vec{L}]$, onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular orbital.
c) Calcule o comutador $[H, \vec{S}]$, onde $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ é o momento angular intrínseco ou spin.
d) Use os resultados anteriores para calcular $[H, \vec{J}]$, onde $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Comente.

4.7 Considere um elétron descrito pela equação de Dirac.

a) Mostre que no caso do elétron livre se tem,

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})}{dt} = 0$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Qual o significado desta lei de conservação?

b) Considere agora que o elétron está num campo eletromagnético exterior A^μ , independente do tempo. Calcule agora

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi})}{dt}$$

onde $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$ é o momento canónico.

c) Em que condições

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi})}{dt} = 0?$$

Qual o interesse prático deste resultado?

Sugestão: Para um operador $\mathcal{O}$ que não dependa do tempo tem-se

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = i[H, \mathcal{O}]$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema. Não esquecer que H é diferente nas alíneas a) e b).

Chapter 5

Quantum Field Theory and Feynman Diagrams

Seguimos aqui os capítulos 5 e 6 do Thomson e 7 e 8 do Griffiths. Algumas destas questões estão mais desenvolvidas em ITC [3]. This is part in English and part in Portuguese, to be improved next year.

5.1 Feynman Diagrams and Time Ordering

This a complement of what we have seen in Chapter 2¹.

Consider the process $a + b \rightarrow c + d$ as shown in Fig. 5.1 Using second order

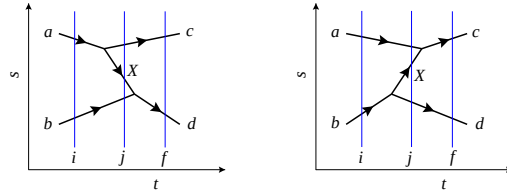


Figure 5.1: Time ordered diagrams

perturbation theory the first diagram is

$$T_{fi}^{ab} = \frac{\langle f|V|j\rangle \langle j|V|i\rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle d|V|X+b\rangle \langle c+X|V|a\rangle}{E_a + E_b - (E_c + E_X + E_b)} \quad (5.1)$$

In non-relativistic QM one uses the transition amplitude T_{fi} while in relativistic QM one uses the Lorentz Invariant (LI) amplitude $\mathcal{M}_{fi}$. The relation is

$$T_{fi} = \mathcal{M}_{fi} \prod_k (2E_k)^{-1/2} \quad (5.2)$$

¹Next year it should be included there

Therefore

$$V_{ji} = \langle c + X | V | a \rangle = \frac{\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X}}{(2E_a 2E_c 2E_X)^{1/2}} \quad (5.3)$$

Take the LI amplitudes in the simplest case, a constant

$$\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X} = g_a, \quad \mathcal{M}_{X+b \rightarrow d} = g_b \quad (5.4)$$

Then

$$\mathcal{M}_{fi}^{ab} = (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2} T_{fi}^{ab} = \frac{(2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}}{2E_X (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}} \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X} \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X} \quad (5.6)$$

For the second diagram we get

$$\mathcal{M}_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{E_b - E_d - E_X} \quad (5.7)$$

and the total LI amplitude is

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{2E_X} \left[\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \frac{1}{E_b - E_d - E_X} \right] \quad (5.8)$$

$$= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left[\frac{1}{E_a - E_c - E_X} - \frac{1}{E_a - E_c + E_X} \right] \quad (5.9)$$

$$= \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} \quad (5.10)$$

wher we have used

$$E_a + E_b = E_c + E_d \Rightarrow E_b - E_d = -(E_a - E_c) \quad (5.11)$$

But we can relate E_X with the momenta. We have

$$E_X^2 = |\vec{p}_X|^2 + m_X^2 = |\vec{p}_a - \vec{p}_c|^2 + m_X^2 \quad (5.12)$$

and therefore we get

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - |\vec{p}_a - \vec{p}_c|^2 - m_X^2} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2} \quad (5.13)$$

where $q = p_a - p_c$ is the momentum in the Feynman propagator. Therefore we concluded that Feynman diagrams represents the two time orderings, therefore the relative position of the vertices with respect to time does not matter, as shown in Fig. 5.2.

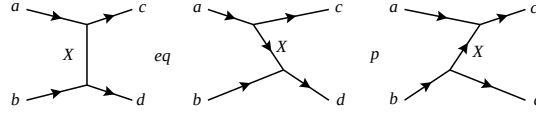


Figure 5.2: Feynman Diagrams and time ordering

5.2 O fóton

Em teoria quântica a quantidade fundamental é o potencial vetor. A regra é sempre que os 4-vetores contravariantes, isto é aqueles que se transformam como as coordenadas, têm as dimensões e os nomes da parte espacial. Assim definimos (nesta secção não estamos a fazer $c = 1$)

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (5.14)$$

Podemos facilmente verificar que a condição de gauge de Lorentz [12]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.15)$$

se escreve nesta notação (notar que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$),

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.16)$$

O outro 4-vetor importante é a corrente J^μ definida por

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad (5.17)$$

satisfazendo a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 = \partial_\mu J^\mu. \quad (5.18)$$

Os campos eletromagnéticos fazem parte do chamado *tensor de Maxwell* definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.19)$$

que é invariante para transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (5.20)$$

Usando as relações usuais [12] entre os potenciais e os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, obtemos numa conveniente representação matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

ou ainda

$$F^{0i} = -\frac{1}{c} E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (5.22)$$

As equações de Maxwell não homogéneas (isto é com cargas e correntes) obtém-se a partir da equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (5.23)$$

As equações homogéneas são uma consequência do tensor $F_{\mu\nu}$ ser antisimétrico. De facto, se definirmos o tensor dual (ver Problema 4.2)

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (5.24)$$

então o facto do tensor de Maxwell ser antisimétrico implica que

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.25)$$

e esta equação é equivalente às equações homogéneas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Este resultado é conhecido por identidade de Bianchi.

A equação de Maxwell não homogénea na gauge de Lorentz, Eq. (5.16), escreve-se,

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (5.26)$$

Contudo esta escolha não eliminou completamente a ambiguidade dos potenciais. De facto podemos ainda usar uma transformação de gauge em que $\square \Lambda = 0$, sem modificar a Eq. (5.26). Esta dificuldade está na base de muitos problemas em quantizar a teoria de Maxwell, que não vamos detalhar aqui.

No espaço livre a equação é a equação das ondas,

$$\square A^\mu = 0 \quad (5.27)$$

que tem com o solução ondas planas

$$A^\mu(x) = N e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \epsilon^\mu(p) \quad (5.28)$$

onde N é uma normalização e $\epsilon^\mu(p)$ é o vetor polarização que caracteriza ao spin do fóton. A condição de Lorentz implica que

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0. \quad (5.29)$$

Sabe-se do eletromagnetismo clássico que o fóton tem dois estados de polarização (spin 1 sem massa), mas aqui o vetor polarização tem quatro graus de liberdade (4-vetor). Esta dificuldade está relacionada com a ambiguidade dos potenciais e resolve-se escolhendo uma dada condição de gauge. A condição na Eq. (5.29) já retira um grau de liberdade. Para fixar completamente os graus de liberdade escolhe-se muitas vezes a gauge de Coulomb, que é uma restrição da classe de gauges de Lorentz onde

$$A^0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.30)$$

Nesta gauge

$$\epsilon^0 = 0, \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0 \quad (5.31)$$

o que quer dizer que as polarizações são perpendiculares à direção de movimento. Se tomarmos essa direção como o eixo dos z então os dois vetores independentes são

$$\epsilon(p, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon(p, 2) = (0, 0, 1, 0) \quad (5.32)$$

Estes vetores obedecem às relações gerais

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0, \quad \epsilon_\mu(p, 1)\epsilon^\mu(p, 2) = 0, \quad \epsilon_\mu(p, \lambda)\epsilon^\mu(p, \lambda) = -1 \quad (5.33)$$

e

$$\sum_{\text{Pol}} \epsilon^{\mu*} \epsilon^\nu = -g^{\mu\nu} \quad (5.34)$$

5.3 A eletrodinâmica quântica (QED)

A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria quântica da interação de elétrons (e pósitrons) com fótons. No capítulo 6 discutiremos em detalhe a construção do lagrangeano de QED. Aqui vamos somente discutir a forma da interação. Vimos no capítulo 4 que para a equação de Dirac temos uma corrente de probabilidade conservada dada por,

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.35)$$

Se multiplicarmos pela carga do elétron, $q_e = -e$, onde e é a carga do próton, obtemos a corrente eletromagnética

$$J^\mu = -e j^\mu = -e \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (5.36)$$

Esta é a corrente que aparece na Eq. (5.26). Como é que esta corrente interatua com o fóton? Do eletromagnetismo clássico sabemos que o lagrangeano para uma partícula não relativista com carga q em interação com o campo eletromagnético é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (5.37)$$

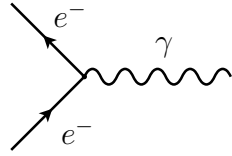
o que com a identificação (ver capítulo 6)

$$L \equiv \int d^3x \mathcal{L} \quad (5.38)$$

dá

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -J^\mu A_\mu = e \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -e Q_e \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (5.39)$$

onde definimos $Q_e = -1$. Na linguagem dos diagramas de Feynman descrevemos a interação da forma seguinte



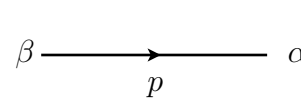
$$-ie Q_e \gamma^\mu \quad (5.40)$$

Vemos assim que a regra de Feynman corresponde a *tirar* os campos do lagrangeano de interação e multiplicar o resultado por i .

5.4 Regras de Feynman para QED

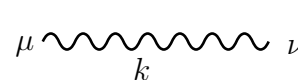
Vamos agora indicar o conjunto completo de regras de Feynman para QED. Elas seguem o que vimos para o modelo ABC com as modificações necessárias devido a termos spinores e antipartículas.

1. Para num dado processo desenhar todos os diagramas topologicamente distintos.
2. Para cada eletrão que entra no diagrama um fator $u(p, s)$. Se sai do diagrama um fator $\bar{u}(p, s)$.
3. Para cada positrão deixando o diagrama um fator $v(p, s)$. Entrando o diagrama um fator $\bar{v}(p, s)$.
4. Para cada fóton no estado inicial o vetor polarização $\varepsilon_\mu(k)$ e no estado final $\varepsilon_\mu^*(k)$.
5. Por cada linha fermiônica interna o propagador



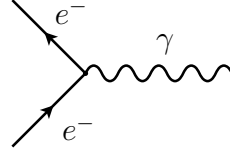
$$S_{F\alpha\beta}(p) = i \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (5.41)$$

6. Por cada linha interna do fóton o propagador (na gauge de Feynman)



$$D_{F\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (5.42)$$

7. Por cada vértice o fator



$$(-ieQ_e \gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (5.43)$$

onde passamos a usar a notação, mais convencional, de introduzir o sinal da carga explicitamente. Portanto, a partir daqui, $e = |e|$, é a carga do positrão ou do próton e claro que para o eletrão $Q_e = -1$.

8. Por cada momento interno não fixado por conservação de energia-momento (*loops*) um fator

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \quad (5.44)$$

9. Por cada loop de fermiões um sinal (-1) .

10. Um fator -1 entre diagramas que diferem por permutações ímpares de linhas fermiônicas (estatística de Fermi dos fermiões).

11. O resultado da aplicação das regras anteriores dá $-i\mathcal{M}$, por isso para obter $\mathcal{M}$ multiplique o resultado final por i .

Comentários

1. As regras 9) e 10) são um pouco difíceis de explicar sem operadores e teorema de Wick. A este nível aparecem mais como uma receita.
2. Para escrever corretamente as linhas fermiônicas devemos notar que elas no final devem dar um número, isto é uma matriz 1×1 no espaço de Dirac. Para obter isso deve-se usar a regra empírica que se começa a escrever cada linha do diagrama pela ponta da seta.
3. Os denominadores dos propagadores têm a mesma forma do que no caso da teoria escalar ABC . Os numeradores diferem para eletrões e fótons (gauge de Feynman) da maneira indicada.
4. The $i\epsilon$ in the denominators is here for completeness. It only matters for one and higher loops diagrams. For tree level we can forget about it, putting $\epsilon \rightarrow 0$.

5.5 Exemplos

Se nos ficarmos por duas partículas no estado final, o número de processos em causa é muito reduzido. Na tabela 5.1 está feito um resumo.

Processo	Observação
$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	Efeito Compton
$\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$	Em QED
$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$	Difusão Bhabha
$e^- + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow e^- + \text{Núcleo}(Z) + \gamma$	Bremsstrahlung
$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$	Aniquilação de pares
$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	Difusão Möller
$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$	Criação de pares
$\gamma + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow \text{Núcleo}(Z) + e^- + e^+$	Criação de pares

Table 5.1: Processos simples em QED.

Vamos analisar os três primeiros casos.

5.5.1 Colisão elástica eletrão-muão

Consideremos primeiro a colisão elástica eletrão-muão. Embora este processo não seja em QED no sentido restrito, o muão é em tudo, exceto na massa, igual ao eletrão e tem a vantagem de haver só um diagrama que se mostra na Fig. 5.3. Com

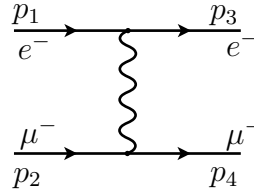


Figure 5.3: Difusão $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ em QED.

a cinemática da figura obtemos para a amplitude,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= i \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2) \\
 &= - \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Para prosseguir e calcular a secção eficaz, Eq. (2.67), temos de calcular $|\mathcal{M}|^2$. Antes de fazer isso vamos ver mais dois processos e voltaremos então ao cálculo das secções eficazes.

5.5.2 Colisão elástica eletrão-positrão

Neste processo, conhecido por difusão Bhabha, temos dois diagramas conforme indicado na Fig. 5.4. Temos ainda uma situação em que existe um sinal menos entre

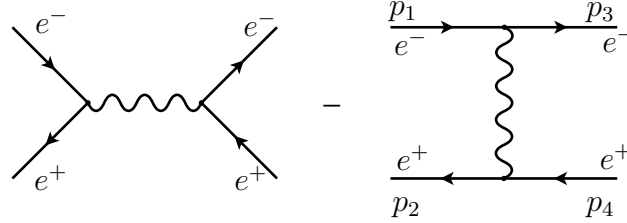


Figure 5.4: Difusão Bhabha $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

os dois diagramas, uma consequência da regra 10. A amplitude escreve-se

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (5.46)$$

onde

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4), \quad \mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{t} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(p_4) \quad (5.47)$$

onde as variáveis de Mandelstam s, t são

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2. \quad (5.48)$$

5.5.3 Efeito de Compton

Consideremos finalmente o efeito de Compton. Com a cinemática indicada na Fig. 5.5, obtemos para a amplitude

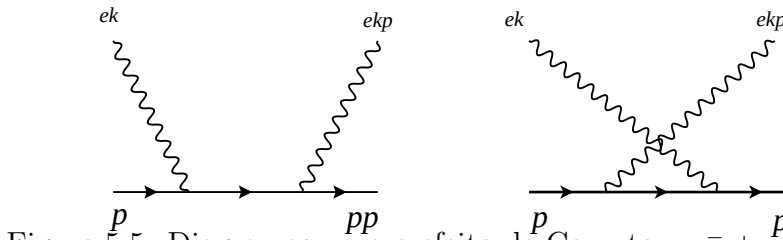


Figure 5.5: Diagramas para o efeito de Compton, $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (5.49)$$

com

$$\mathcal{M}_1 = \frac{e^2}{(p+k)^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k') \quad (5.50)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{(p-k')^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma_\nu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k'). \quad (5.51)$$

5.6 A real calculation: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

Let us learn how to do a real calculation. To avoid unnecessary complications we choose the simplest process, $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, that has just one Feynman diagram, shown in Fig. 5.6. The amplitude for this process is

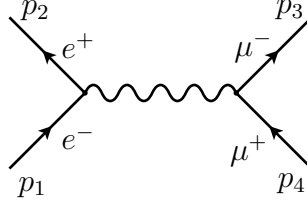


Figure 5.6: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ scattering.

$$\mathcal{M} = i \bar{v}(p_2)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\nu)v(p_4) \quad (5.52)$$

$$= -\frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4) \quad (5.53)$$

where we have the CM kinematics of Fig. 5.7.

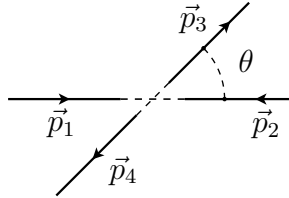


Figure 5.7: CM kinematics

5.6.1 The helicity amplitudes

In the amplitude in Eq.(A.38) we did not show the spin states. We will use the helicity states basis. We have sum over the the final state spins and take the average over the initial state (non-polarized beams). For the initial state (in the CM) we have the four possibilities shown in Fig. 5.8

For the final state (in the CM) we also have four possibilities as shown in Fig. 5.9

Therefore we want to calculate

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} [|\mathcal{M}(\uparrow\uparrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\uparrow\uparrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots]$$

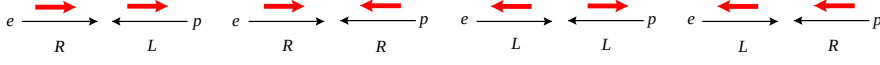


Figure 5.8: Helicity combinations for the initial state. $R \equiv \uparrow$ positive helicity, $L \equiv \downarrow$ negative helicity.

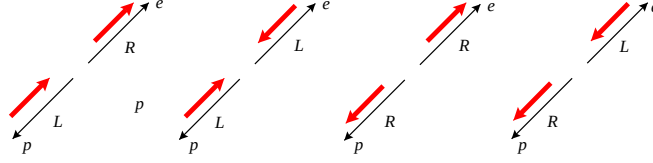


Figure 5.9: Helicity combinations for the final state.

$$\begin{aligned}
 & +|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots \\
 & +|\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots \\
 & +|\mathcal{M}(\downarrow\downarrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\downarrow\downarrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots]
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

To simplify matters we take all masses to zero. This is usually a very good approximation, as the center of mass energy is much higher than the masses of the particles. Then the four momenta are given by,

$$\begin{aligned}
 p_1 &= E(1, 0, 0, 1), & p_2 &= E(1, 0, 0, -1) \\
 p_3 &= E(1, \sin \theta, 0, \cos \theta), & p_4 &= E(1, -\sin \theta, 0, -\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Now we recall the helicity spinors using the conditions, $|\vec{p}| = E$, with $E = \sqrt{s}/2$. We have

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

and

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

Making the substitutions

$$\begin{aligned}
 p_1 : \theta \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0, & & p_2 : \theta \rightarrow \pi, \phi \rightarrow \pi \\
 p_3 : \theta \rightarrow \theta, \phi \rightarrow 0, & & p_4 : \theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

we get for the initial state

$$u_{\uparrow}(p_1) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow}(p_1) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_{\uparrow}(p_2) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow}(p_2) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

and for the final state

$$u_{\uparrow}(p_3) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow}(p_3) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

and

$$v_{\uparrow}(p_4) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow}(p_4) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

In order to organize the calculation we write the LI amplitude as

$$\mathcal{M}(h_1, h_2, h_3, h_4) = -\frac{e^2}{s} J_{u_1 v_2}(h_1, h_2)^\mu J_{u_3 v_4}(h_3, h_4)_\mu \quad (5.62)$$

where $h_i = \uparrow, \downarrow$, and the currents are given by,

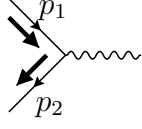
$$J_{u_1 v_2}(h_1, h_2)^\mu = \bar{v}(p_2, h_2) \gamma^\mu u(p_1, h_1), \quad J_{u_3 v_4}(h_3, h_4)^\mu = \bar{u}(p_3, h_3) \gamma^\mu v(p_4, h_4) \quad (5.63)$$

We want to calculate the components of these 4-vectors. It has to be done component by component. For instance

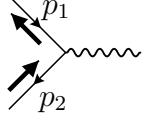
$$J_{u_1 v_2}(\uparrow, \uparrow)^0 = (\sqrt{E})^2 v^\dagger(p_2, \uparrow) \gamma^0 \gamma^0 u(p_1, \uparrow) = E [1, 0, -1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} J_{u_1 v_2}(\uparrow, \downarrow)^2 &= (\sqrt{E})^2 v^\dagger(p_2, \downarrow) \gamma^0 \gamma^2 u(p_1, \uparrow) \\ &= E [0, -1, 0, -1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E [0, -1, 0, -1] \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ i \end{bmatrix} \\ &= -2i E \end{aligned} \quad (5.65)$$

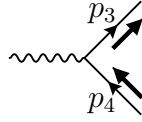
Although this is straightforward, it is a bit boring and with a large possibility of errors. But we can program the procedure in **Mathematica** and get the final results that are quite simple. We get that the only non-zero currents are,



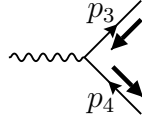
$$J_{u_1 v_2}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -1, -i, 0) \quad (5.66)$$



$$J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -1, i, 0) \quad (5.67)$$



$$J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, i, \sin \theta) \quad (5.68)$$



$$J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (5.69)$$

Therefore we get

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow) &= -\frac{e^2}{s} [\sqrt{s}(0, -1, -i, 0)] \cdot [\sqrt{s}(0, -\cos \theta, i, \sin \theta)] \\ &= \frac{e^2}{s} s (1 + \cos \theta) \equiv 4\pi\alpha (1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Similarly

$$|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow)|^2 = |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \downarrow\uparrow)|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos \theta)^2 \quad (5.71)$$

$$|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \downarrow\uparrow)|^2 = |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\downarrow)|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 - \cos \theta)^2 \quad (5.72)$$

and

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} (4\pi\alpha)^2 [2(1 + \cos \theta)^2 + 2(1 - \cos \theta)^2] \quad (5.73)$$

$$= (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (5.74)$$

Finally for the cross section, using Eq. (2.67), we get

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad (5.75)$$

and the total cross section is obtained after integration in the angles to give,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (5.76)$$

The comparison with the experimental result is given in Fig. 5.10

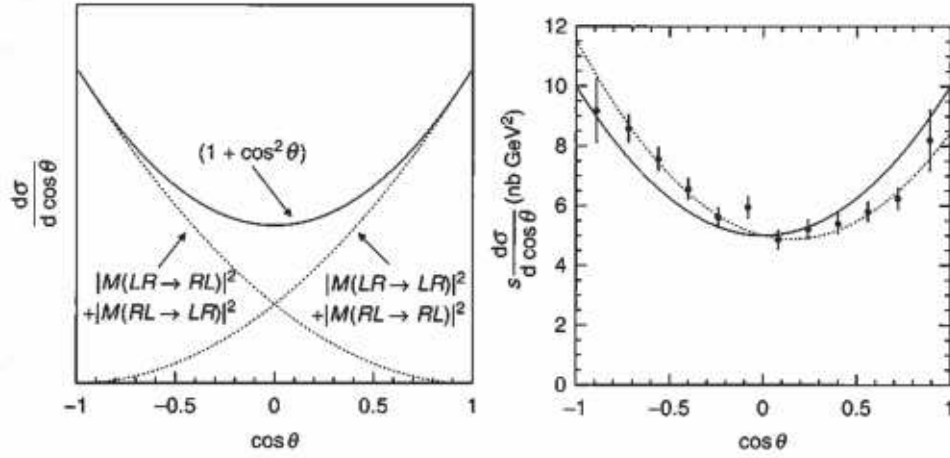


Figure 5.10: Solid curve is QED prediction. Dotted curve includes electroweak corrections. From JADE experiment (Bartel et al. (1985))

5.6.2 Understanding the result

Now that we have obtained the final result we can go back and try to understand what we got, because that will help us in doing other calculations in a simpler manner. First we realize that the only non-vanishing amplitudes correspond to those cases where the total spin along the axis of the particle-antiparticle pair is ± 1 . This is shown in Fig. 5.11. This can be understood as follows. First the fact that we

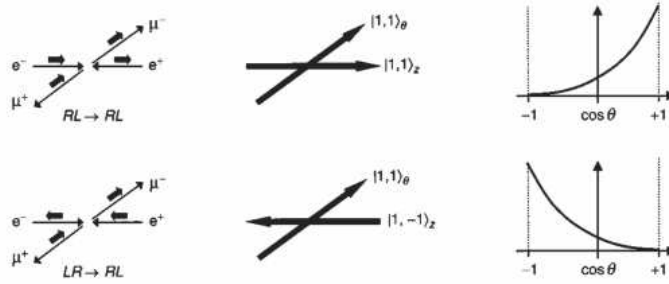


Figure 5.11: Non-zero contributions and the spin projections

have spin 1 is due to the fact that a photon with spin 1 is exchanged. On the other hand, we can express the state with spin 1 and projection +1 along the θ direction, $|1, +1\rangle_\theta$, as a linear combination of the states along the z axis. The result is

$$|1, +1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) |1, -1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta |1, 0\rangle_z + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) |1, 1\rangle_z \quad (5.77)$$

therefore we get easily

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow) \propto \langle 1, +1 | 1, +1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (5.78)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\downarrow) \propto {}_\theta \langle 1, +1 | 1, -1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad (5.79)$$

$$(5.80)$$

5.6.3 Chirality

We see that (for zero masses) the non-zero interactions do not flip the spin

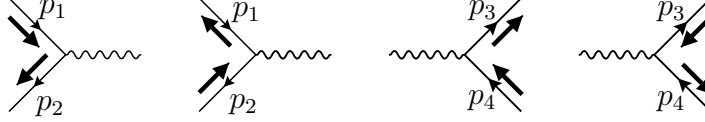


Figure 5.12: Non-zero interactions

This is due to a property known as chirality, that is related to the eigenvalues of the γ_5 matrix. Define the projectors²

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$$P_L + P_R = 1, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0 \quad (5.82)$$

Then, for the massless case

$$P_R u_\uparrow = u_\uparrow, \quad P_L u_\uparrow = 0, \quad P_R u_\downarrow = 0, \quad P_L u_\downarrow = u_\downarrow \quad (5.83)$$

$$P_R v_\uparrow = 0, \quad P_L v_\uparrow = v_\uparrow, \quad P_R v_\downarrow = v_\downarrow, \quad P_L v_\downarrow = 0 \quad (5.84)$$

Therefore for zero masses we have Helicity $\equiv$ Chirality.

5.6.4 Chirality in QED

Define the left and right components of a spinor through

$$\psi = (P_L + P_R)\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L \equiv P_L \psi, \quad \psi_R \equiv P_R \psi \quad (5.85)$$

Then

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R = (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 + (P_R \psi)^\dagger \gamma^0 = (P_L^2 \psi)^\dagger \gamma^0 + (P_R^2 \psi)^\dagger \gamma^0 \quad (5.86)$$

$$= (P_L \psi)^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 + (P_R \psi)^\dagger P_R^\dagger \gamma^0 = (P_L \psi)^\dagger P_L \gamma^0 + (P_R \psi)^\dagger P_R \gamma^0 \quad (5.87)$$

$$= (\psi_L)^\dagger \gamma^0 P_R + (\psi_R)^\dagger \gamma^0 P_L = \bar{\psi}_L P_R + \bar{\psi}_R P_L \quad (5.88)$$

Therefore for the current term in the QED Lagrangian

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\bar{\psi}_L P_R + \bar{\psi}_R P_L) \gamma^\mu (\psi_L + \psi_R) \quad (5.89)$$

²I use L,R for chirality and $\uparrow, \downarrow$ for helicity

$$= \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \quad (5.90)$$

while for the mass term

$$m \bar{\psi} \psi = m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (5.91)$$

Therefore we see that QED current interaction preserves chirality. As in the massless limit chirality and helicity are the same, it also preserves helicity. Do not forget that in this identification the positive (negative) helicity anti-particle is left-handed (right-handed), respectively (see Eq. (5.84))

5.7 How to calculate other processes

Now that we have learned how to calculate the amplitudes and cross section for a particular process, the question is how can we handle other processes? We just stay with process with two electrons or positrons in the initial and final states and keeping all masses at zero.

5.7.1 Bhabha scattering

Let us exemplify how we can extend what we have learned with another process, $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ (Bhabha scattering). For this process we have the two diagrams of Fig. 5.13

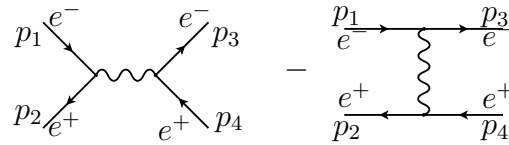


Figure 5.13: Diagrams for Bhabha

Using the fact that, for $m_e = 0$, chirality must be conserved we have only six possible combinations that we represent schematically in terms of diagrams

$$\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) = \text{diagram 1} - \text{diagram 2} \quad (5.92)$$

$$\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \downarrow, \uparrow) = \text{diagram 3} \quad (5.93)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \uparrow, \downarrow) = \text{diagram 4} \quad (5.94)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = \text{diagram} - \text{diagram} \quad (5.95)$$

$$\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow; \uparrow, \uparrow) = \text{diagram} \quad (5.96)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow; \downarrow, \downarrow) = \text{diagram} \quad (5.97)$$

5.7.2 t-channel currents

To be able to write the amplitudes in the previous diagrams we need, besides the s-channel results already discussed in Eqs. (A.18)-(A.21), the non-zero amplitudes for the t-channel. These can be obtained easily with a simple `Mathematica` program. We have in a obvious notation for $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$ processes

$$J_{u_1 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.98)$$

$$J_{u_1 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.99)$$

$$J_{v_1 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.100)$$

$$J_{v_1 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.101)$$

$$J_{u_2 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.102)$$

$$J_{u_2 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.103)$$

$$J_{v_2 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.104)$$

$$J_{v_2 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.105)$$

5.7.3 Final result for Bhabha scattering

The general amplitude for Bhabha scattering can then be written in the form

$$\mathcal{M}(h_1, h_2; h_3, h_4) = -\frac{e^2}{s} J_{u_1 v_2}(h_1, h_2) \cdot J_{u_3 v_4}(h_3, h_4) + \frac{e^2}{t} J_{u_1 u_3}(h_1, h_3) \cdot J_{v_2 v_4}(h_2, h_4) \quad (5.106)$$

Summing the six non-zero helicity amplitudes we get finally

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2e^4 \left[\frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2 \frac{(s+t)^2}{st} \right] \quad (5.107)$$

$$= 2e^4 \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \quad (5.108)$$

where

$$t = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) = -s \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) = -s \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (5.109)$$

5.7.4 u-channel Amplitudes

To be able to calculate all the processes with electrons and positrons we also need the u-channel amplitudes. These are,

$$J_{u_1 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.110)$$

$$J_{u_1 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.111)$$

$$J_{u_2 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.112)$$

$$J_{u_2 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.113)$$

$$J_{v_1 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.114)$$

$$J_{v_1 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.115)$$

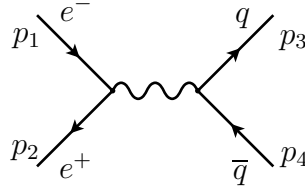
$$J_{v_2 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.116)$$

$$J_{v_2 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.117)$$

5.8 Produção de hádrões em colisões $e^- + e^+$

5.8.1 Hadronização

Na colisão $e^- + e^+$ podemos produzir um grande número de estados finais: $e^- + e^+$ (Bhabha), $\mu^- + \mu^+$, $\gamma + \gamma$ e em geral qualquer par de fermiões $f\bar{f}$. Podemos portanto ter também a produção de pares quark-antiquark, $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$. Se as

Figure 5.14: Difusão $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$.

energias foram baixas isso ocorre através do diagrama de QED indicado na Fig 5.14. Como os quarks não são estados livres (confinamento), quando estão a distâncias da ordem da dimensão dos hádrões ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) a interação forte vai produzir muitos novos pares $q\bar{q}$ e glúões que finalmente se combinam para produzir os hádrões que são medidos no detetor. Este processo chama-se hadronização e está representado na Fig. 5.15. Quando estes acontecimentos são observados nos dete-

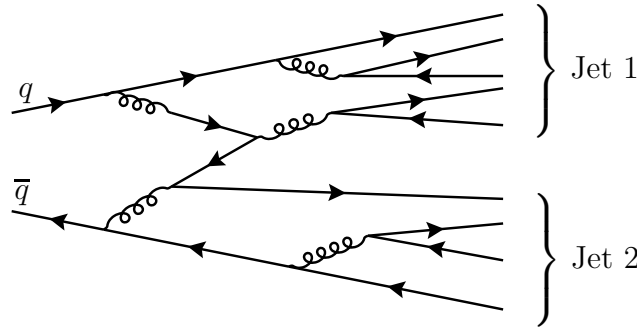


Figure 5.15: Processo de Hadronização

tores eles mantêm a memória do acontecimento original e aparecem como dois jatos de partículas que aparecem em sentidos opostos (*back-to-back*) e apontando para as direções dos quarks iniciais que lhes deram origem, como representado no lado esquerdo da Fig. 5.16. Por vezes parecem acontecimentos com três jatos que podem ser interpretados como resultado da hadronização do glúão, um processo de ordem mais elevada, desde que esse glúão leve uma percentagem significativa da energia, como representado na Fig. 5.17. De facto a observação deste acontecimentos são uma prova experimental da existência dos glúões, os portadores da força forte na chamada Cromodinâmica Quântica (QCD).

5.8.2 Processo elementar

Apesar de todas as complicações anteriores o processo elementar que está na base de todas estas considerações é um processo simples em QED (desde que as energias sejam tais que $\sqrt{s} \ll M_Z$),

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \quad (5.118)$$

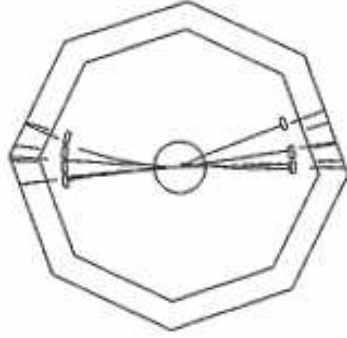


Fig. 8.2 A typical two-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

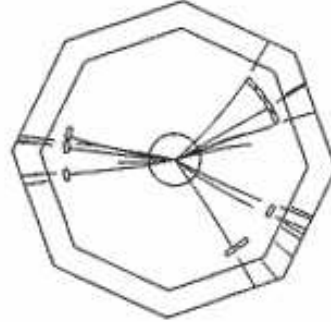


Fig. 8.3 A three-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

Figure 5.16: Acontecimentos com dois e três *jets*.

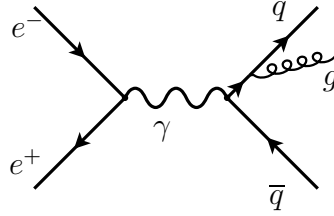


Figure 5.17: Processo elementar com emissão dum glúão

que corresponde ao diagrama da Fig. 5.14. A amplitude é então

$$\mathcal{M} = \frac{Q_q e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)] \quad (5.119)$$

onde Q_q é a carga do quark em unidades de e , isto é, $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$. Usando o truque de Casimir obtemos para a amplitude não polarizada, isto é, somando todos os spins finais e fazendo a média sobre os spins iniciais,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_q) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_q) \gamma_\nu] \quad (5.120)$$

onde $s = (p_1 + p_2)^2$. Usando os teoremas dos traços podemos obter,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &\quad + m_e^2(p_3 \cdot p_4) + m_q^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 m_q^2] \\ &= Q_q^2 e^4 \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s} \right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s} \right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (5.121)$$

onde usámos a cinemática para obter

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta_e), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -\beta_e) \\ p_3 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta_q \sin \theta, 0, \beta_q \cos \theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta_q \sin \theta, 0, -\beta_q \cos \theta) \\ \beta_e &= \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}, \quad \beta_q = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \end{aligned} \quad (5.122)$$

onde β_e, β_q são as velocidades do eletrão e do quark no referencial do CM, respetivamente. Usando a Eq. (2.67) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\beta_q}{\beta_e} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\ &= \frac{Q_q^2 e^4}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (5.123)$$

A secção eficaz obtém-se fazendo a integração final nas variáveis angulares com o resultado

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{2m_e^2}{s} \right] \left[1 + \frac{2m_q^2}{s} \right] \quad (5.124)$$

Notar nesta equação o limiar de produção. A energia no CM tem de ser maior que duas vezes a massa do quark para a reação ter lugar, isto é, $\sqrt{s} > 2m_q$ assegurando que as raízes quadradas são bem definidas. Quando $\sqrt{s} \gg m_e, m_q$ a expressão simplifica-se enormemente para dar,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s}. \quad (5.125)$$

5.8.3 A razão R

Quando começamos com uma energia do feixe mínima para aparecer o primeiro par de quarks e começamos a aumentar essa energia vamos passando os diferentes limiares de produção para as diferentes espécies de leptões e quarks. Este efeito pode ser descrito duma forma muito conveniente definindo a razão R ,

$$R \equiv \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} \quad (5.126)$$

Se usamos a expressão aproximada na Eq. (5.125) devemos obter

$$R(\sqrt{s}) = 3 \sum_i Q_i^2 \quad (5.127)$$

onde a soma é sobre todos os quarks tais que $\sqrt{s} > 2m_q$. O fator 3 vem porque cada quark aparece em 3 cores. Assim se estivermos a uma energia onde só podem ser produzidos os quarks u, d, s temos

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad (5.128)$$

Acima do limiar de produção do quarks c devemos ter

$$R = 2 + 3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{10}{3} = 3.33 \quad (5.129)$$

e acima do limiar do b

$$R = \frac{10}{3} + 3 \left(\frac{-1}{3} \right)^2 = \frac{11}{3} = 3.67 \quad (5.130)$$

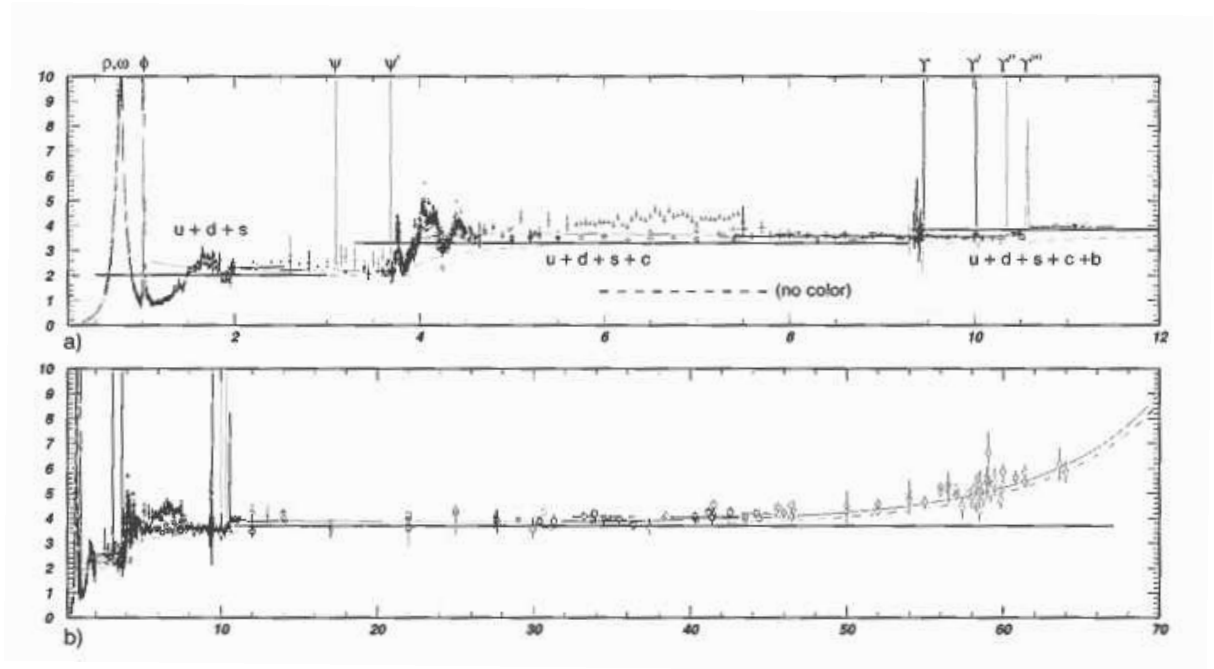


Figure 5.18: Gráfico de R baseado em dados experimentais. Tirado do Griffiths.

Se houve energia suficiente para produzir o quark top tínhamos $R = 5$. Temos assim um efeito de escada em que há medida que a energia aumenta o R vai subindo a escada.

Como compara isto com a experiência? Vemos na Fig. 5.18 o gráfico de R baseado em dados experimentais. Vemos que o andamento em patamares se confirma, incluindo o fator 3 da cor. No entanto há zonas de ressonâncias que não

são explicadas pelo argumento acima. Quando a reação tem a energia exata podem ser produzidos estados ligados quark-antiquark que aparecem como ressonâncias na figura: $\rho, \omega, \phi, \psi, \dots$. Mas se excluirmos estas ressonâncias o andamento geral confirma os cálculos e em particular constitui uma demonstração experimental da existência de tripletos de cor, a base para a construção da Cromodinâmica Quântica, a teoria das interações fortes. Voltaremos a esta teoria depois de vermos as teorias de gauge no capítulo 6.

Problemas capítulo 5

5.1 Considere os processos em QED:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma, \quad e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-, \quad \gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad (5.131)$$

- a) Desenhe os diagramas de Feynman para cada um destes processos.
- b) Escreva as respectivas amplitudes.

5.2 Utilize as expressões explícitas dos spinores u e v , Eq. (4.79) e Eq. (4.80) para mostrar as seguintes propriedades

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = \bar{v}(p, s)v(p, s') = 2m\delta_{ss'} \quad (5.132)$$

$$u^\dagger(p, s)u(p, s') = -v^\dagger(p, s)v(p, s') = 2E\delta_{ss'} \quad (5.133)$$

$$\sum_s u(p, s)_\alpha \bar{u}(p, s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (5.134)$$

$$\sum_s v(p, s)_\alpha \bar{v}(p, s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (5.135)$$

5.3 Considere o processo $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$. Defina as variáveis de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \quad (5.136)$$

Mostre que satisfazem a relação

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (5.137)$$

isto é, só duas delas são independentes.

5.4 Evaluate the differential cross section for Bhabha scattering: $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$. Do not forget that there is a minus sign between the two diagrams.

5.5 Evaluate the differential cross section for $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$, Möller scattering. Do not forget that there is a minus sign between the two diagrams.

5.6 Para entender a Eq. (5.34), veja o Complemento 4.1 de *Introdução à Teoria de Campo* [3].

Chapter 6

Gauge Invariance

Aqui seguimos as secções 10.1 a 10.2 do Griffiths [2] e o capítulo 2 do meu texto FIE [6].

6.1 Lagrangeanos em mecânica clássica

Em mecânica clássica a equação fundamental é a lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (6.1)$$

Se um sistema for conservativo então a força pode ser obtida duma função potencial, $U(\vec{r})$, através da relação 5

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (6.2)$$

e portanto as equações do movimento escrevem-se

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U . \quad (6.3)$$

A mesma dinâmica pode ser obtida num formalismo alternativo, designado por formalismo lagrangeano. Aí começa-se por definir o lagrangeano (ou função de Lagrange) através da relação

$$L = T - U \quad (6.4)$$

onde T é a energia cinética,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.5)$$

e U a energia potencial. As equações da dinâmica resultam de exigir que a ação definida como o integral do lagrangeano,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L \quad (6.6)$$

seja estacionária ($\delta S = 0$) para a trajetória da partícula. Este requisito conduz às chamadas equações de Euler-Lagrange, que se escrevem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (6.7)$$

para um sistema com n coordenadas q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ e onde se definiu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} . \quad (6.8)$$

Aplicando a um problema a três dimensões obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\nabla_i U \quad (6.10)$$

e a Eq. (6.7) conduz à mesma Eq. (6.3).

A este nível parece uma complicação desnecessária. No entanto, os lagrangeanos são muito úteis por duas razões. Primeiro porque alguns problemas são mesmo mais fáceis de resolver usando este formalismo (por exemplo pêndulos acoplados), e em segundo lugar porque as simetrias conduzem naturalmente a leis de conservação. De facto já discutimos no capítulo 3 esta relação. Por exemplo, se L não depender das coordenadas, a Eq. (6.7) imediatamente nos diz que o momento linear é conservado.

6.2 Lagrangeanos em teoria de campo

Os lagrangeanos em teoria de campo relativista têm uma importância fundamental. Isto deve-se fundamentalmente à importância que as simetrias têm na descrição das interações fundamentais da Natureza e essas simetrias são implementadas duma maneira muito mais simples nos lagrangeanos. Em mecânica clássica as variáveis dependem do tempo, $x_i(t)$, enquanto que em teoria de campo lidamos com campos que dependem do ponto do espaço tempo $x^\mu = (t, \vec{x})$, por exemplo para um campo escalar, $\phi(x)$.

Não vamos aqui fazer uma dedução da passagem de sistemas com um número finito de graus de liberdade para a situação em teoria do campo onde temos infinitos graus de liberdade. Vamos só dar o resultado sobre a forma de dicionário, conforme indicado na Tabela 6.1. É fácil de verificar que para o campo real de Klein-Gordon a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (6.11)$$

reproduz a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi = 0 . \quad (6.12)$$

Sistemas Finitos graus liberdade	Teoria do Campo
t	x^μ
q	$\phi(x)$
$\dot{q}$	$\partial_\mu \phi(x)$
$S = \int dt L(q, \dot{q})$	$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

Table 6.1: Dicionário para lagrangeanos em teoria de campo.

Para o campo de Dirac temos que tratar o spinor e o seu adjunto como graus de liberdade independentes (tal como acontece no campo escalar complexo, ver problema 6.4). Assim é fácil de ver que a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

conduz à equação de Dirac. De facto As equações de Euler-Lagrange são, para o caso do campo de Dirac,

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \quad (6.13)$$

Do lagrangeano, Eq. (6.13), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad (6.14)$$

e portanto

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (6.15)$$

como queríamos mostrar. A densidade Lagrangeana de Dirac tem uma propriedade notável. É invariante para as transformações

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad ; \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi} e^{-i\alpha} \quad (6.16)$$

com α constante. Isto corresponde a redefinir a fase da função de onda, que certamente é arbitrária. Veremos na secção seguinte as implicações que esta observação terá.

Antes de terminar consideremos mais dois exemplos, o caso dum campo de spin 1 com massa e o caso do fóton, spin 1 sem massa.

Exemplo 6.1 Considere o lagrangeano de Proca para uma partícula de spin 1 com massa,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (6.17)$$

Onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.18)$$

Vamos deduzir as equações de Euler-Lagrange. Obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu \quad (6.20)$$

e portanto as equações de movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (6.21)$$

que foi a equação de movimento que usámos no capítulo anterior quando discutimos o bóson vetorial intermédio.

Exemplo 6.2 Considere o lagrangeano de Maxwell com interação com uma corrente exterior,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \quad (6.22)$$

Obtemos facilmente as equações de Maxwell,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (6.23)$$

6.2.1 Comments on the Dirac Lagrangian

The Dirac Lagrangian,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (6.24)$$

has the following important properties. First it is a scalar under Lorentz Transformations

$$x' = a^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \psi'(x') = S\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1} \quad (6.25)$$

In particular this means that,

- $\bar{\psi}\psi$ is a scalar under Lorentz transformations

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (6.26)$$

- As under Lorentz transformations

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = a^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (6.27)$$

is a vector (transforms like the coordinates) and ∂_μ is also a vector, then the Lorentz scalar product of two vectors is a scalar

The second property is that it is a number, 1×1 matrix, in Dirac space. For instance,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = [\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2$$

6.3 Invariância de gauge. O eletromagnetismo

Nas transformações consideradas na secção anterior o parâmetro α era constante. A invariância *global* queria então dizer que a escolha das fases era arbitrária e que se escolhêssemos as fases doutra maneira ao mesmo tempo em todos os pontos do espaço-tempo a teoria seria idêntica. Dissemos no capítulo 3 que a existência destas invariâncias implicava que houvesse quantidades conservadas no tempo.

Posta a questão nestes termos, a pergunta que surge naturalmente é saber se há teorias em que a escolha das convenções das fases pode ser feita localmente, isto é, diferente para cada ponto do espaço-tempo. Em princípio, estas teorias se puderem ser formuladas, deverão ser mais relevantes para a Física pois parece-nos lógico que dois experimentadores em laboratórios diferentes possam fazer escolhas diferentes das convenções e obter os mesmos resultados físicos. Queremos portanto teorias em que o lagrangeano seja invariante debaixo de transformações de simetria interna mas que dependem do ponto do espaço tempo.

Estas teorias existem e são as denominadas teorias com *invariância padrão* ou *teorias de gauge* na designação inglesa. Usaremos esta última designação por ser a mais corrente entre os físicos. Pedir que uma teoria possua invariância local é uma condição muito restritiva. De facto se tivermos uma teoria que tenha uma dada invariância global, normalmente não será possível torná-la localmente invariante sem adicionar mais qualquer coisa. Essa qualquer coisa é o conceito de força traduzido em teoria quântica dos campos por um campo que é trocado entre as partículas que interagem. Consideremos como exemplo o caso do campo de Dirac. O lagrangeano é dado na Eq. (6.13),

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (6.28)$$

Esta teoria é invariante quando efetuamos transformações de fase constantes como na Eq. (6.16). Vamos ver o que se passa quando as transformações são locais, isto é, a escolha de fase é independente em cada ponto do espaço-tempo, e para simplificar vamos considerar transformações infinitesimais¹,

$$\delta\psi = i\alpha(x)\psi \quad ; \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha(x)\bar{\psi} \quad (6.29)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -i\alpha(x)\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + i\alpha(x)\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \partial_\mu\alpha(x) \\ &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Portanto o lagrangeano deixa de ser invariante. É fácil de ver que o problema está ligado ao facto de $\partial_\mu\psi$ não se transformar como ψ . Assim introduzimos o conceito de *derivada covariante* D_μ tal que numa transformação de gauge, Eq. (6.29), se transforme como os campos, isto é

$$\delta(D_\mu\psi) = i\alpha(x)D_\mu\psi \quad (6.31)$$

¹Para transformações contínuas (grupos de Lie) o que se passa para transformações infinitesimais também é verdade para transformações finitas. Ver problema 6.1

Definimos a derivada covariante pela relação

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (6.32)$$

e vamos ver que transformações deve ter o campo vetorial A_μ para satisfazer a Eq. (6.34). Obtemos sucessivamente,

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \psi) &= \delta(ieA_\mu)\psi + D_\mu(\delta\psi) \\ &= ie\delta A_\mu \psi + \partial_\mu(i\alpha(x)\psi) + ieA_\mu(i\alpha(x)\psi) \\ &= i\alpha(x)D_\mu \psi + ie\delta A_\mu \psi + i\partial_\mu \alpha(x)\psi \end{aligned} \quad (6.33)$$

Agora comparando a Eq. (6.33) com a Eq. (6.31), obtemos a lei de transformação do campo vetorial A_μ , dada por

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (6.34)$$

Esta lei de transformação é exatamente uma transformação de gauge do eletromagnetismo se A_μ for interpretado como o campo do fóton. Assim vemos que o campo vetorial A_μ representa a força de que tínhamos falado anteriormente que assegura que podemos escolher a fase de maneira diferente em diferentes pontos do espaço tempo. A introdução do campo A_μ força a introdução de novos termos no lagrangeano, em particular os termos de energia cinética² para esse campo. A única combinação quadrática nas primeiras derivadas do campo A_μ que é invariante para a Eq. (6.34) é o tensor de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.35)$$

De facto usando 6.34 em 6.35 obtemos trivialmente

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (6.36)$$

Por outro lado termos de massa da forma $A^\mu A_\mu$ não são invariantes exigindo que o fóton não tenha massa. Portanto o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (6.37)$$

$$\equiv \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{interacção}} \quad (6.38)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (6.39)$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{interacção}} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \quad (6.40)$$

é invariante para as transformações de fase locais, Eqs. (6.29) e (6.34). Diz-se que é uma teoria com invariância de gauge. O lagrangeano 6.38 descreve a interação dos elétrons com os fótons. É chamada eletrodinâmica quântica (QED). Para aplicação posterior recordemos aqui os passos que nos levaram até ela.

²Isto é os termos quadráticos nos campos.

- i) Tínhamos uma teoria que era invariante para transformações globais. Neste caso o grupo de transformações era abeliano, multiplicação por uma fase, $U(1)$.
- ii) O requisito que a invariância se mantivesse quando as transformações fossem locais levou-nos à introdução dum novo campo, o fóton A_μ , com transformações univocamente dadas por essa condição. Fisicamente é o fóton que assegura que as diversas escolhas de fase são consistentes.
- iii) Foi necessário introduzir um novo termo no lagrangeano para nos dar a propagação dos fótons livres. Este termo deve possuir invariância de gauge.

6.4 Teorias de Yang-Mills

Os mesmos passos que nos levaram a QED podem ser dados quando o grupo de transformações das fases é não abeliano. Neste caso dizemos que temos uma teoria não abeliana com invariância de gauge ou teoria de *Yang-Mills* [13], embora este nome se devesse só aplicar ao caso em que o grupo é $SU(2)$. Como alguns conceitos têm que ser generalizados vamos ver os passos em detalhe.

Começemos pelo lagrangeano para campos fermiônicos generalizando QED. Seja

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi \quad (6.41)$$

onde Ψ é um vetor coluna

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

num espaço vetorial de dimensão n , onde atua uma representação do grupo não abeliano G

$$\delta\Psi = i\varepsilon^a(x)\Omega^a\Psi, \quad a = 1, 2, \dots, m \quad (6.43)$$

Ω^a são m matrizes hermiticas $n \times n$ que obedecem às relações de comutação de G ,

$$[\Omega^a, \Omega^b] = if^{abc}\Omega^c \quad (6.44)$$

sendo f^{abc} as constantes de estrutura de G . Desta relação resulta que m é a dimensão da representação adjunta de G , pois esse é também o número de geradores do grupo que obedecem a uma relação semelhante à Eq. (6.44).

O lagrangeano 6.41 não é invariante sob a ação das transformações 6.43. Para o tornar invariante introduzimos a derivada covariante, generalizando a Eq. (6.32),

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igA_\mu^a\Omega^a)\Psi \quad (6.45)$$

onde A_μ^a são m campos vetoriais, que vão desempenhar um papel análogo ao do fóton no eletromagnetismo, e que são designados por *campos de gauge*. As matrizes Ω^a

são as apropriadas para a representação de Ψ de dimensão n . A lei de transformação de A_μ^a é obtida pelo requisito de que $D_\mu \Psi$ se transforme como Ψ . Para a calcular introduzimos a notação compacta

$$\underline{\varepsilon} \equiv \varepsilon^a \Omega^a \quad (6.46)$$

$$\underline{A}_\mu \equiv A_\mu^a \Omega^a \quad (6.47)$$

onde $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{A}_\mu$ são matrizes $n \times n$ e funções de $(\vec{x}, t)$. Então 6.43 escreve-se simplesmente

$$\delta \Psi = i \underline{\varepsilon} \Psi \quad (6.48)$$

Calculemos então a variação de $D_\mu \Psi$. Obtemos

$$\delta(D_\mu \Psi) = \partial_\mu(\delta \Psi) + ig \underline{A}_\mu (\delta \Psi) + ig (\delta \underline{A}_\mu) \Psi \quad (6.49)$$

$$= i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi + i (\partial_\mu \underline{\varepsilon} \Psi) - g \underline{A}_\mu \underline{\varepsilon} \Psi + ig (\delta \underline{A}_\mu) \Psi \quad (6.50)$$

Nós queremos que

$$\delta(D_\mu \Psi) = i \underline{\varepsilon} D_\mu \Psi \quad (6.51)$$

$$= i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi - g \underline{\varepsilon} \underline{A}_\mu \Psi \quad (6.52)$$

Comparando as Eqs. (6.50) e (6.52) obtemos

$$\delta \underline{A}_\mu = i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \quad (6.53)$$

que é a transformação dos campos de gauge escrita numa forma matricial. Em termos das componentes A_μ^a a equação 6.53 escreve-se

$$\delta A_\mu^a = -f^{bca} \varepsilon^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a \quad (6.54)$$

Notar que no caso do grupo ser abeliano tanto a Eq. (6.53) como a Eq. (6.54) se reduzem à expressão válida numa teoria abeliana como QED, Eq. (6.34) (nesse caso $m = 1$).

A derivada covariante, Eq. (6.45) tem algumas propriedades importantes para o seguimento e que vamos aqui indicar.

i) A derivada covariante pode ser escrita na forma

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + g A_\mu^a \frac{\delta \Phi}{\delta \varepsilon^a} \quad (6.55)$$

para um campo arbitrário Φ , fermiónico ou bosónico. Esta expressão permite-nos escrever a derivada covariante de qualquer campo, ou funções de campos, desde que se saibamos as suas propriedades de transformação.

ii) A derivada dum produto pode ser facilmente calculada a partir de

$$\delta(\phi\psi) = (\delta\phi)\psi + \phi\delta\psi \quad (6.56)$$

Então a Eq. (6.55) implica

$$D_\mu(\phi\psi) = (D_\mu\phi)\psi + \phi D_\mu\psi \quad (6.57)$$

iii) O comutador de duas derivadas covariantes pode ser facilmente calculado. De facto não é zero, nem mesmo para um grupo abeliano. Obtemos

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\Psi = (\partial_\mu + ig \underline{A}_\mu)(\partial_\nu + ig \underline{A}_\nu) \Psi - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (6.58)$$

$$= ig (\partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu]) \Psi \quad (6.59)$$

Portanto

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = ig \underline{F}_{\mu\nu} \Psi \quad (6.60)$$

onde $\underline{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a \Omega^a$ é definido por

$$\underline{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu] \quad (6.61)$$

Vemos assim que $\underline{F}_{\mu\nu}$ é a generalização para o caso não abeliano do tensor de Maxwell. Podemos verificar que se transforma numa forma covariante (não é invariante) para as transformações dos campos de gauge, Eq. (6.53),

$$\begin{aligned} \delta(\underline{F}_{\mu\nu}) &= \partial_\mu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - \frac{1}{g} \partial_\nu \underline{\varepsilon} \right) - \partial_\nu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \right) \\ &\quad - g [[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu], \underline{A}_\nu] - i [\partial_\mu \underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - g [\underline{A}_\mu, [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu]] - i [\underline{A}_\mu, \partial_\nu \underline{\varepsilon}] \\ &= i [\underline{\varepsilon}, \underline{F}_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (6.62)$$

Contrariamente ao caso abeliano, $\underline{F}_{\mu\nu}$ não é invariante. De facto transforma-se como um vetor num espaço de dimensão m (a dimensão do grupo), isto é

$$\delta F_{\mu\nu}^a = -f^{bca} \varepsilon^b F_{\mu\nu}^c \quad (6.63)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{bca} A_\mu^b A_\nu^c \quad (6.64)$$

A lei de transformação, Eq. (6.63), permite mostrar que a generalização do lagrangeano de Maxwell

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (6.65)$$

é invariante para as transformações de gauge 6.53. Juntando todas as peças, concluímos que a generalização do lagrangeano 6.41 que possui invariância de gauge local é

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (6.66)$$

Antes de acabarmos esta secção vamos fazer alguns comentários sobre o que acabámos de ver e as suas aplicações. Primeiro que tudo o lagrangeano na Eq. (6.66) descreve a teoria física para uma das interações fundamentais da Natureza, quando o grupo G é $SU(3)$. É a chamada Cromodinâmica Quântica (QCD) que descreve as interações fortes. Nessa teoria os campos de matéria são os *quarks* que se encontram na representação fundamental do grupo (tripletos de $SU(3)$) e os campos de gauge são os *gluões* que se encontram na representação adjunta de $SU(3)$ que é aquela que tem a mesma dimensão que o grupo (8 para $SU(3)$). Outra observação tem que ver com a massa para os campos de gauge. Um termo de massa para os campos de gauge teria a forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A^{a\mu} \quad (6.67)$$

e é fácil de ver que as transformações na Eq. (6.54) não deixam o lagrangeano na Eq. (6.67) invariante. Assim o fóton e os gluões aparecem naturalmente como partículas sem massa. Contudo para as interações fracas este facto levanta problemas pois nós sabemos que devido ao seu curto alcance, os portadores da força fraca devem ter massa. Este problema que persistiu na física de partículas durante várias décadas só foi resolvido com a quebra espontânea da simetria e o mecanismo de Higgs que veremos no capítulo seguinte. Finalmente um comentário sobre o caso do grupo G não ser *simples*, por exemplo

$$G = SU(2) \times U(1) \quad (6.68)$$

Neste caso a generalização da Eq. (6.66) obtém-se do modo seguinte. Para os campos de matéria o lagrangeano tem a mesma forma mas a derivada covariante, Eq. (6.45) é agora uma soma sobre todos os campos de gauge com uma constante de acoplamento por cada grupo fator. O lagrangeano para os campos de gauge é simplesmente a soma de lagrangeanos do tipo da Eq. (6.65) para cada grupo fator.

Para dar um exemplo concreto vamos considerar o grupo $G = SU(2) \times U(1)$ que como veremos mais à frente vai ser precisamente o caso do modelo standard das interações eletrofracas. Neste caso o lagrangeano será,

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f(i\not{D} - m)\Psi_f - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (6.69)$$

onde a soma é sobre todos os fermiões da teoria. Os campos de gauge introduzidos são convencionalmente designados por W_μ^a para $SU(2)$ e B_μ para $U(1)$, com os tensores do campo dados por

$$W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f^{bca} W_\mu^b W_\nu^c \quad (6.70)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (6.71)$$

A derivada covariante tem agora uma contribuição de cada campo de gauge com uma constante de acoplamento diferente. Assim temos,

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + ig'Y B_\mu) \Psi \quad (6.72)$$

onde $\Omega^a = \frac{\sigma^a}{2}$ para SU(2) e Y , designada por hipercarga, uma matriz proporcional à matriz identidade para o grupo U(1). Voltaremos a este assunto no capítulo 9.

6.5 Regras de Feynman para a teoria de gauge

Consideremos uma teoria de gauge simples descrita pelo lagrangeano da Eq. (6.66). Vamos aqui enunciar as regras de Feynman para essa teoria sem demonstração. O objetivo é comparar com QED para ver as semelhanças e diferenças. De facto essas regras só são suficientes para calcular em ordem mais baixa de teoria de perturbações, mas a quantização das teorias de gauge não abelianas está muito para além deste curso elementar (ver o meu texto *Advanced Quantum Field Theory* [14]).

6.5.1 Propagadores

Começemos pelos propagadores. Aqui não há nada de novo, para além do facto que agora temos m campos de gauge. A estrutura dos termos quadráticos é a mesma que a teoria de Dirac e de Maxwell e portanto obtemos³,

$$\mu, a \quad \text{~~~~~} \nu, b \quad \quad \quad -i\delta_{ab} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \quad (6.73)$$

$$\text{~~~~~} \xrightarrow{p} \quad \quad \quad \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2} \quad (6.74)$$

6.5.2 Vértices

Os vértices vêm dos termos com três ou mais campos no lagrangeano. Da Eq. (6.66) obtemos

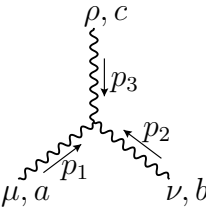
$$\mathcal{L}_{int} = gf^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} - g \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j \Omega_{ij}^a A_\mu^a \quad (6.75)$$

³Tecnicamente na gauge de Feynman. Para mais detalhes sobre a escolha de gauges ver a Ref. [14].

o que conduz a interações com três e quatro campos de gauge, que não existiam em QED, para além da generalização da interação entre fermiões e campos de gauge. As regras de Feynman estão descritas nas figuras seguintes.

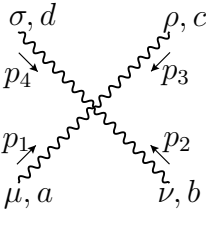
Notar que para grupos abelianos as constantes de estrutura, $f^{abc} = 0$, e as interações triplas e quárticas desaparecem, mantendo-se somente a interações entre os fermiões e o campo de gauge, como em QED.

Interações triplas de campos de gauge



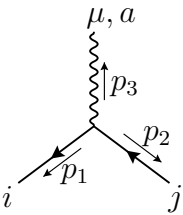
$$-gf^{abc} [g^{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\rho + g^{\nu\rho}(p_2 - p_3)^\mu + g^{\rho\mu}(p_3 - p_1)^\nu] \quad (6.76)$$

Interações quárticas de campos de gauge



$$-ig^2 \left[f_{eab}f_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + f_{eac}f_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + f_{ead}f_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \right] \quad (6.77)$$

Interações de fermiões com campos de gauge



$$-i g \gamma^\mu \Omega_{ij}^a \quad (6.78)$$

Problemas capítulo 6

6.1 Mostre que o lagrangeano de QED, Eq. (6.38), é invariante para transformações finitas,

$$\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (6.79)$$

6.2 Mostre que o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (6.80)$$

é invariante para as transformações

$$\delta A_\mu^a = -f^{bca} \varepsilon^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a \quad (6.81)$$

6.3 Para o grupo das rotações num espaço a n dimensões, $O(n)$, os $\frac{1}{2} n(n-1)$ geradores independentes são dados por

$$(L_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad ; \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n \quad (6.82)$$

com $L_{ij} = -L_{ji}$. Considere agora o caso de $O(3)$.

a) Identifique

$$J_1 = L_{23} \quad ; \quad J_2 = L_{31} \quad ; \quad J_3 = L_{12} \quad (6.83)$$

Mostre que os J_i têm as seguintes relações de comutação

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ikm} J_m \quad (6.84)$$

b) Um vetor de E_3 transforma-se como

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} V \quad (6.85)$$

Para uma transformação infinitesimal encontre a lei de transformação

$$\delta V_i = \dots \quad (6.86)$$

c) Verifique que esta lei para uma rotação em torno do eixo dos zz dá o resultado conhecido

$$\begin{aligned}\delta V_1 &= \theta V_2 \\ \delta V_2 &= -\theta V_1 \\ \delta V_3 &= 0\end{aligned}\tag{6.87}$$

d) Mostre que para transformações infinitesimais se tem

$$\delta(V_i V_i) = 0\tag{6.88}$$

e) Considere agora transformações finitas

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} V\tag{6.89}$$

Mostre que

$$V'^T V' = V^T V\tag{6.90}$$

6.4 Considere o lagrangeano seguinte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

a) Verifique que as equações de movimento são as equações de Klein-Gordon.

b) Verifique que o lagrangeano é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha} \phi \quad ; \quad \alpha = \text{constante}$$

c) Considere a acção definida para campos reais, ϕ_i , $i = 1, 2$. Mostre que se a acção

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

é invariante para uma transformação

$$\phi'_i = \phi_i - i\varepsilon \lambda_{ij} \phi_j$$

onde ε é infinitesimal e λ_{ij} são constantes, então existe uma corrente conservada, isto é

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

onde

$$J^\mu = -i\lambda_{ij} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \phi_j$$

Este resultado é conhecido pelo nome de *teorema de Noether*.

d) Aplique este resultado ao lagrangeano dado. Para isso faça

$$\phi_1 = \frac{\phi + \phi^*}{\sqrt{2}}, \quad \phi_2 = -i \frac{\phi - \phi^*}{\sqrt{2}} \quad (6.91)$$

e) Mostre que se $\alpha = \alpha(x)$ o lagrangeano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)^* \phi^* (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi - m^2 \phi^* \phi$$

é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha(x)} \phi$$

se A_μ se transformar de forma apropriada. Qual? Comente.

Chapter 7

Weak Interactions: from Fermi Model to the V-A Theory

Seguimos aqui as secções 7.1 a 7.4 do livro do Bettini [15] e as secções 4.1 e 4.5 do meu livro FIE [6].

7.1 A teoria de Fermi

A teoria das interações fracas começou com a teoria de Fermi para o decaimento β .

$$n \rightarrow p + e + \nu \quad (7.1)$$

Na altura eram conhecidos o protão, o neutrão, o eletrão e o neutrino que foi precisamente introduzido para que a conservação da energia fosse satisfeita. Para explicar o decaimento 7.1 Fermi introduziu o seguinte lagrangeano

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (7.2)$$

que corresponde ao diagrama de Feynman da Fig. 7.1. Com este lagrangeano pode-se

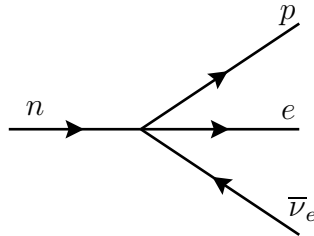


Figure 7.1: Decaimento β do neutrão

calcular a largura do decaimento. Obtemos para a amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1) \gamma^\alpha u(p) \bar{u}(k) \gamma_\alpha v(q_2) \quad (7.3)$$

De facto não podemos descrever os nucleões por ondas planas, mas temos que usar funções de onda nucleares. Isto resulta nalguma complicação em que não vamos aqui entrar [16]. Com algumas aproximações obtemos para o espectro de energia do eletrão emitido

$$N(E) = \frac{d\Gamma}{dE} = \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \quad (7.4)$$

onde E é a energia do eletrão e

$$\Delta = m_n - m_p \quad (7.5)$$

O espectro de energias está representado na Fig. 7.2

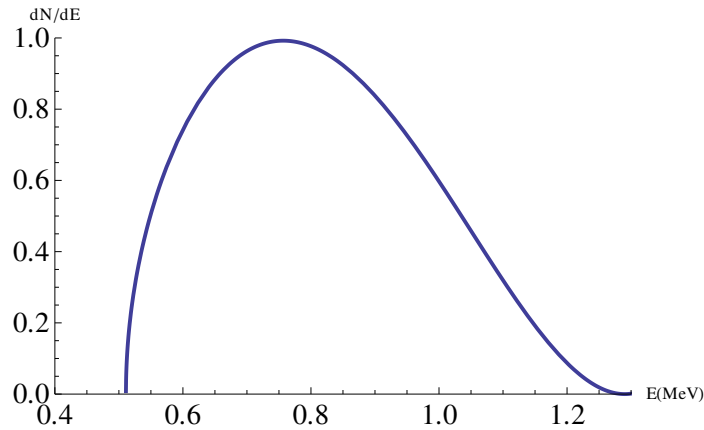


Figure 7.2: Espectro de energias do eletrão no decaimento β . As unidades são arbitárias

Para a largura total vem então

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \int_{m_e}^{\Delta} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \\ &= 3.6 \times 10^{-3} G_\beta^2 \quad \text{todas as grandezas em MeV} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Conhecendo o tempo de vida média do neutrão obtinha-se um valor para G_β

$$G_\beta \simeq 1.4 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (7.7)$$

Notar que o valor de G_β é ajustado para se obter o valor de Γ . O sucesso da teoria estava em prever um espectro $N(E)$ em acordo com o que era na altura medido.

7.2 A teoria V-A

7.2.1 Introdução

Depois do sucesso da teoria de Fermi, procurou-se estender o método a outros decaimentos radioativos. Para isso foi importante notar que o lagrangeano 7.2 se pode escrever na forma

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} J_p^\alpha J_{e\alpha} + \text{h.c.} \quad (7.8)$$

onde J_e^α e J_p^α são as *correntes* definidas por

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu, \quad J_p^\alpha = \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \quad (7.9)$$

Estas correntes são semelhantes à corrente eletromagnética em QED. Como vimos no capítulo 4, (ver a Ref. [3] para mais detalhes) estas correntes têm um carácter vetorial, isto é, numa transformação de Lorentz transformam-se como um vetor. O lagrangeano assim construído é portanto um escalar de Lorentz. Mas em 1936 Gamow e Teller [17] mostraram que a Eq. (7.2) não é única e que o lagrangeano escalar mais geral deveria ser uma mistura da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & c_1 \bar{\psi}_p \psi_n \bar{\psi}_e \psi_\nu & S \times S \\ & + c_2 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu & V \times V \\ & + c_3 \bar{\psi}_p \sigma^{\alpha\beta} \psi_n \bar{\psi}_e \sigma_{\alpha\beta} \psi_\nu & T \times T \\ & + c_4 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu & A \times A \\ & + c_5 \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu & P \times P \end{aligned}$$

e os coeficientes da combinação linear só podem ser determinados pela experiência. Na Eq. (7.10) estão indicadas as propriedades de transformação para transformações de Lorentz dos diferentes termos. Gamow e Teller mostraram que no limite não relativista se obtém

$$SS, VV \rightarrow \Delta J = 0 \quad (7.10)$$

$$AA, TT \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1 \quad (7.11)$$

Portanto, enquanto que a descrição de Fermi ($V \times V$) poderia explicar transições com $\Delta J = 0$, alguma parte de $A \times A$ ou $T \times T$ deverá estar presente para explicar as transições com $|\Delta J| = 1$. Um grande trabalho experimental foi então empreendido para determinar os coeficientes c_i .

7.2.2 Violação de paridade nas interações fracas

Todo o trabalho anterior foi feito tendo como hipótese de base que a Paridade era conservada nas interações fracas, tal como o é no eletromagnetismo. Contudo, como

vimos no capítulo 3, em 1956 Lee e Yang [18] mostraram que esta ideia devia ser abandonada para explicar o chamado $\tau - \theta$ puzzle. Este consistia em compreender porque é que os dois decaimentos

$$\begin{aligned}\theta & : K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \\ \tau & : K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \end{aligned} \quad (7.12)$$

podiam ocorrer simultaneamente quando as paridades dos dois estados finais eram diferentes, isto é

$$P(\pi^+ \pi^0) = +1 \quad ; \quad P(\pi^+ \pi^+ \pi^-) = -1 \quad (7.13)$$

Isto poderia acontecer se a Paridade não fosse conservada nas interações fracas. Eles propuseram então um conjunto de experiências para testar esta ideia, e nos dois anos seguintes foi mostrado que de facto assim é, em particular na experiência de Wu *et al.*, [19]. Assim a construção de Gamow e Teller tem que ser modificada para incluir, por exemplo, termos da forma $V \times A$,

$$\bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu \quad (7.14)$$

Era preciso recomeçar do início e comparar com a experiência de novo.

7.2.3 Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica

Nesta busca experimental que levou à descoberta da violação da Paridade nas interações fracas uma descoberta importante que foi feita diz respeito aos neutrinos, nomeadamente que eles têm helicidade negativa. Como o projetor da helicidade negativa é

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (7.15)$$

isto quer dizer que

$$\psi_\nu = P_L \psi_\nu \quad (7.16)$$

Como consequência disto a corrente leptónica para o eletrão deverá ser

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} \quad (7.17)$$

o que também foi confirmado experimentalmente. Convém aqui notar que para uma partícula qualquer com massa, como o eletrão, se pode sempre escrever

$$\psi_e = P_L \psi_e + P_R \psi_e \quad (7.18)$$

Então a estrutura da corrente leptónica mostra que só a componente esquerda do eletrão participa na interação. De facto

$$\bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L^2 \psi_\nu = \bar{\psi}_e P_R \gamma^\alpha P_L \psi_\nu$$

$$= \psi_e^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \overline{(P_L \psi_e)} \gamma^\alpha P_L \psi_\nu \quad (7.19)$$

Se tivermos uma interação geral da forma $V - A$

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi \quad (7.20)$$

e se introduzirmos

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (7.21)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) (\psi_L + \psi_R) \\ &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R \end{aligned} \quad (7.22)$$

pois os termos cruzados são nulos. Mostremos isso para um deles. Obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R &= \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_L P_R \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

onde se usaram as propriedades de ortogonalidade dos projetores P_L e P_R . Isto quer dizer que uma corrente vetorial ou vetorial axial conserva a helicidade. Por outras palavras quer também dizer que pode ser construída para partículas que tenham só uma helicidade, como é o caso dos neutrinos. O mesmo não se passa para o termo de massa. O termo de massa usual de Dirac é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{massa} &= -m \bar{\psi} \psi \\ &= -m (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) (\psi_L + \psi_R) \\ &= -m \bar{\psi}_L \psi_R - m \bar{\psi}_R \psi_L \end{aligned} \quad (7.24)$$

pois

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \psi_L &= \overline{(P_L \psi)} P_L \psi = \psi^\dagger P_L \gamma^0 P_L \psi = \psi^\dagger \gamma^0 P_R P_L \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

e de igual modo para $\bar{\psi}_R \psi_R$. Como conclusão, o neutrino não poderá ter um termo de massa do tipo acima indicado¹.

¹De facto há a possibilidade de ter termos de massa do tipo de Majorana, que não serão discutidos aqui.

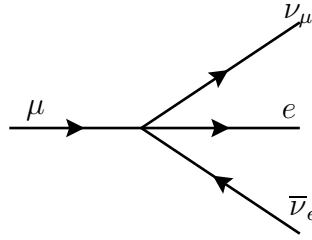


Figure 7.3: Decaimento do muão.

7.2.4 A interação corrente-corrente de Feynman e Gell–Mann

Fazendo a síntese de todo o trabalho iniciado com a teoria de Fermi, em 1958 Feynman e Gell-Mann [20] propuseram que as interações fracas deveriam ser descritas pelo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^{\mu\dagger} \quad (7.26)$$

onde

$$J^\mu = \ell^\mu + h^\mu \quad (7.27)$$

sendo ℓ^μ e h^μ as partes leptónica e hadrónica dessa corrente. Os resultados experimentais mostraram que a estrutura da corrente leptónica deveria ser do tipo $V - A$, isto é

$$\ell^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\tau} \quad (7.28)$$

Quando a teoria foi proposta não existia o τ . Mas experimentalmente foi verificado que a estrutura para o τ era a mesma e que a intensidade relativa das três partes da corrente era igual. Este resultado é conhecido por universalidade da corrente fraca leptónica. A constante G_F que aparece em 7.26 é de facto ligeiramente diferente de G_β da teoria de Fermi. O seu valor podia ser determinando calculando o decaimento do muão descrito pelo diagrama da Fig. 7.3 e que não tem as complicações da física hadrónica referidas a propósito do decaimento do neutrão.

A amplitude que resulta de 7.26 é

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(q_2) \quad (7.29)$$

e um cálculo simples (ver por exemplo a Ref. [3]) dá (desprezando m_e),

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192 \pi^3} \quad (7.30)$$

donde se conclui que

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (7.31)$$

A parte hadrónica da corrente fraca, h^α , será estudada mais adiante. Vejamos aqui com um pouco mais de detalhe a corrente leptónica. Para isso notemos primeiro que podemos escrever

$$\ell^\alpha = 2\bar{\psi}_L(e)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_e) + 2\bar{\psi}_L(\mu)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\mu) + 2\bar{\psi}_L(\tau)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\tau) \quad (7.32)$$

isto é, a corrente escreve-se completamente em termos das componentes esquerdas dos campos. Definimos agora um *isospin esquerdo* para os leptões, agrupando o leptão carregado e o seu neutrino num dubleto da forma

$$\chi_L(e) \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\mu) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (7.33)$$

Então a corrente leptónica escreve-se

$$\ell^\alpha = 2 \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) + \bar{\chi}_L(\mu)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\mu) + \bar{\chi}_L(\tau)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\tau) \right] \quad (7.34)$$

onde

$$\bar{\chi}_L(e) = \left[\bar{\nu}_e, \bar{e} \right] \quad (7.35)$$

e expressões semelhantes para os outros leptões, e onde definimos

$$\tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tau^1 - i\tau^2) \quad (7.36)$$

Notar que

$$\tau^-\chi_L(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_e \end{pmatrix}_L \quad (7.37)$$

Somos assim tentados a definir uma corrente de isospin esquerdo através de

$$j_L^{i\alpha} = \frac{1}{2} \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^i\chi_L(e) + \dots \right] \quad (7.38)$$

Então se introduzirmos a notação

$$j_L^{\pm\alpha} \equiv \frac{j_L^{1\alpha} \pm ij_L^{2\alpha}}{\sqrt{2}} \quad (7.39)$$

vemos que

$$\ell^\alpha = 2\sqrt{2} (j_L^-)^\alpha \quad (7.40)$$

e que

$$\ell^{\alpha\dagger} = 2\sqrt{2} (j_L^+)^\alpha \quad (7.41)$$

Embora estejamos a introduzir um formalismo adaptado a $SU_L(2)$ o lagrangeano na Eq. (7.26) não é invariante para esse grupo pois falta o termo² $j_{L\mu}^{3\dagger}j_L^{3\mu}$. Dito de

²De facto considerando só a parte do eletrão e seu neutrino obtemos

$$\mathcal{L}_{lep} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) \bar{\chi}_L(e)\gamma_\alpha\tau^+\chi_L(e) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (j_L^{1\alpha}j_{L\alpha}^1 + j_L^{2\alpha}j_{L\alpha}^2)$$

outro modo, todos os resultados experimentais conhecidos até à década de sessenta indicavam que a corrente fraca era carregada pois $\Delta Q \neq 0$. Um termo como $j_{L\mu}^{3\dagger} J_L^{3\mu}$ que faria a Eq. (7.26) invariante para transformações de $SU_L(2)$, implicaria a existência de correntes fracas neutras, o que só viria a ser descoberto mais tarde. Vemos assim que a parte leptónica do lagrangeano de Feynman e Gell-Mann sugeria já que o grupo de simetria fosse $SU_L(2)$ e a descoberta das correntes neutras veio confirmá-lo, como discutiremos no capítulo 9.

7.3 As interações fracas dos hádrões

7.3.1 Universalidade e a teoria de Cabibbo

As interações fracas dos hádrões são um pouco mais complicadas. Parte dessa complicação resulta, claro, das próprias interações fortes e da sua propriedade de *confinamento*, que quer dizer que a teoria fundamental é simples de escrever em termos dos quarks mas que estes não são partículas livres, só aparecendo na natureza como estados ligados. Assim todos os cálculos de interações com hádrões são muito difíceis. Nós apresentaremos primeiro os resultados em termos das correntes dos hádrões, mas depois traduziremos esses resultados para o lagrangeano ao nível dos quarks.

Do ponto de vista das interações fracas, há dois tipos principais de correntes hadrónicas. O primeiro é relevante para o decaimento β do neutrão representado na Fig. 7.1. Dizemos que este decaimento corresponde a $\Delta S = 0$, isto é não há variação do número quântico estranheza (é zero para todas as partículas envolvidas). Há no entanto outro tipo de decaimentos em que $\Delta S = \pm 1$, como por exemplo

$$\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e \quad (7.42)$$

representado na Fig. 7.4. A parte da corrente leptónica é igual, mas a parte

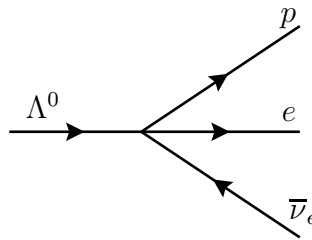


Figure 7.4: O decaimento $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$.

hadrónica tem agora $\Delta S = 1$ ($\Lambda^0 = uds$). Além disso, a parte hadrónica também é carregada, tal como para o decaimento do neutrão. Os resultados experimentais podem ser resumidos da forma seguinte

$$h_\mu = g_V h_\mu^{(0)} + g_S h_\mu^{(1)} \quad (7.43)$$

onde tanto a parte $\Delta S = 0$, $h_\mu^{(0)}$, como a parte $\Delta S = 1$, $h_\mu^{(1)}$, têm a forma $V - A$, isto é

$$\begin{aligned} h_\mu^{(0)} &= V_\mu^{(0)} - A_\mu^{(0)} \\ h_\mu^{(1)} &= V_\mu^{(1)} - A_\mu^{(1)} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Considerações de simetria relativas ao grupo $SU(3)$ para as interações fortes dos quarks u , d e s , levaram Cabibbo em 1963 [21] a propor que

$$g_V^2 + g_S^2 = 1 \quad (7.45)$$

o que foi verificado experimentalmente. Em vez de g_V e g_S , é mais normal introduzir um ângulo designado por *ângulo de Cabibbo*, tal que

$$g_V = \cos \theta_c \quad ; \quad g_S = \sin \theta_c \quad (7.46)$$

Experimentalmente verifica-se que

$$\sin \theta_c \simeq 0.22 \quad (7.47)$$

Em resumo o facto essencial é que há uma diferença de intensidade entre a corrente leptónica e as duas partes da corrente hadrónica. Mais concretamente se tomarmos a corrente leptónica como referência temos a situação descrita na Tabela 7.1 o que mostra que a universalidade é menos perfeita no sector hadrónico.

Corrente	Intensidade
ℓ_α	1
$h_\alpha^{(0)}$	$\cos \theta_c$
$h_\alpha^{(1)}$	$\sin \theta_c$

Table 7.1: Intensidade relativa das correntes fracas leptónica e hadrónica.

Estes factos permitem-nos descrever agora as correntes hadrónicas ao nível dos quarks. A corrente hadrónica tem então a forma seguinte

$$h^\alpha = \cos \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_d + \sin \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_s . \quad (7.48)$$

A ideia é que a interação que transforma um neutrão

$$n = (udd) \quad ; \quad Q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (7.49)$$

num protão

$$p = (uud) \quad ; \quad Q_p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \quad (7.50)$$

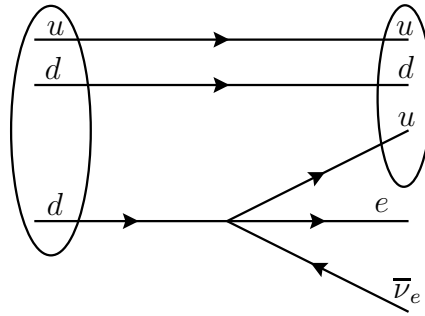


Figure 7.5: Decaimento $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ em termos de quarks.

deve ser aquela que leva um quark $d \rightarrow u$ ($\Delta Q = 1$) e em termos de quarks o decaimento β seria representado nesta aproximação pela Fig. 7.5 Claro que o confinamento torna esta descrição demasiado simplista, mas a hipótese é que a estrutura da teoria ao nível do lagrangeano em termos de quarks está correta. Não nos preocupando mais com as complicações das interações fortes, vejamos melhor a estrutura em termos dos campos dos quarks. Como o u e d diferem duma unidade de carga, as correntes $h_\alpha^{(0)}$ e $h_\alpha^{(1)}$ são correntes carregadas, tal como acontecia para a corrente leptónica. Por outro lado são também correntes esquerdas. Vejamos se é possível dar-lhes uma forma onde apareçam sinais do grupo $SU_L(2)$. Para isso observemos que

$$\begin{aligned} h^\alpha &= \cos \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) d + \sin \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) s \\ &= \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c) \end{aligned} \quad (7.51)$$

onde passámos a representar os campos pelo seu nome, isto é, por exemplo para o quark u , $u \equiv \psi_u$. Se olharmos para a equação anterior somos levados a introduzir um dubleto de quarks da forma

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L \quad (7.52)$$

onde

$$d_c \equiv d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \quad (7.53)$$

Então a corrente pode ser escrita na forma

$$h^\alpha = 2 \bar{Q}_L \tau^+ Q_L \quad (7.54)$$

onde

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2} \quad (7.55)$$

Na Eq. (7.52) o índice L quer dizer

$$Q_L = \begin{pmatrix} P_L u \\ P_L d_c \end{pmatrix}. \quad (7.56)$$

Mais uma vez para que o lagrangeano (7.26) tenha invariância para $SU_L(2)$ falta a componente neutra

$$h^{3\alpha} = 2\sqrt{2}\bar{Q}_L\gamma^\alpha\tau^3Q_L \quad (7.57)$$

7.3.2 O mecanismo de GIM e a descoberta do charm

Como vimos a teoria de Cabibbo para as correntes carregadas permite escrever a corrente hadrónica carregada através de

$$h_\alpha^+ = 2\bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^+Q_L \quad ; \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_{cL} \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

onde o sinal + em h_α^+ quer dizer que a corrente aumenta a carga por uma unidade, isto é

$$\Delta Q = Q(u) - Q(d) = +1 \quad (7.59)$$

De igual modo podemos introduzir a corrente que diminui a carga por uma unidade,

$$h_\alpha^- = 2\bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^-Q_L \quad (7.60)$$

e portanto o lagrangeano para a parte hadrónica será³

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{had}} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha h^{\alpha\dagger} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha^- h^{+\alpha} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (h_\alpha^1 h^{1\alpha} + h_\alpha^2 h^{2\alpha}) \end{aligned} \quad (7.61)$$

onde

$$h_\alpha^i = \bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^iQ_L \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (7.62)$$

Tal como para o sector leptónico somos levados a pensar se não falta o termo $h_\alpha^3 h^{3\alpha}$ para ter o lagrangeano (7.61) invariante para $SU_L(2)$. Ora a corrente h_α^3 escreve-se

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^3Q_L \\ &= \bar{u}_L\gamma_\alpha u_L - \bar{d}_{cL}\gamma_\alpha d_{cL} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Esta corrente tem $\Delta Q = 0$ e é portanto uma corrente neutra. A questão é então saber se existem correntes neutras na parte hadrónica das interações fracas. Experimentalmente verificou-se que sim, mas só com $\Delta S = 0$, isto é, não havia, ou eram extremamente suprimidas, as correntes neutras com mudança de estranheza. Isto põe um problema à interpretação acima pois o termo $\bar{d}_{cL}\gamma^\alpha d_{cL}$ contém partes com $\Delta S \neq 0$. De facto

$$\bar{d}_{cL}\gamma^\alpha d_{cL} = \cos^2\theta_c \bar{d}_L\gamma^\alpha d_L + \sin^2\theta_c \bar{s}_L\gamma^\alpha s_L$$

³Estamos a considerar neste ponto que há só os quarks u, d, s . Mais à frente veremos como aparecem os outros.

$$+ \sin \theta_c \cos \theta_c (\bar{d}_L \gamma^\alpha s_L + \bar{s}_L \gamma^\alpha d_L) \quad (7.64)$$

e o último termo tem $\Delta S \neq 0$. Portanto se quisermos insistir na simetria $SU_L(2)$ com a consequente introdução de h_α^3 , temos que resolver este problema. Em 1970, Glashow, Iliopoulos e Maiani [22] resolveram esta questão numa forma muito elegante. Para isso postularam a existência dum segundo dubleto de $SU_L(2)$ onde apareceria um novo quark de carga $Q = 2/3$, designado por *charm* e a combinação ortogonal a d_c designada agora por s_c ,

$$s_c = -\sin \theta_c + s \cos \theta_c \quad ; \quad Q = -\frac{1}{3} \quad (7.65)$$

Designemos esse dubleto por

$$Q'_L = \begin{pmatrix} c_L \\ s_{cL} \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

Então a corrente neutra completa deverá ser

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^3 Q_L + \bar{Q}'_L \gamma_\alpha \tau^3 Q'_L \\ &= \bar{d}_L \gamma_\alpha d_L + \bar{s}_L \gamma_\alpha s_L \end{aligned} \quad (7.67)$$

pois os termos cruzados na Eq. (7.64) cancelam agora exatamente. A este mecanismo dá-se o nome de *mecanismo de GIM*. Na altura em que o quark c foi proposto não havia ainda evidência experimental para ele. Este facto foi atribuído por GIM a ele dever ser relativamente pesado. É para crédito de GIM que eles não só propuseram o quark c como também forneceram uma estimativa para a sua massa. O argumento é o seguinte. Tomemos o decaimento

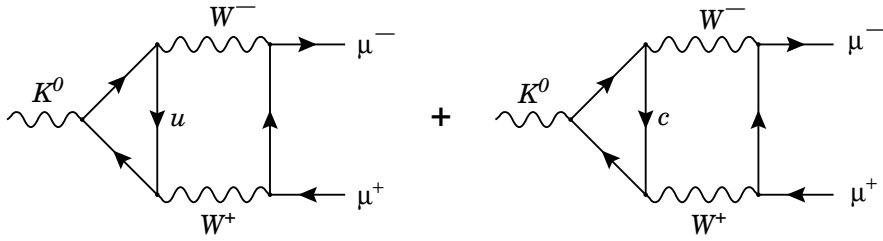
$$K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad (7.68)$$

É um decaimento com corrente neutra e $\Delta S \neq 0$ pelo que não deveria existir de acordo com o mecanismo de GIM. Na realidade não é assim e experimentalmente verifica-se que existe, embora seja extremamente raro. De facto

$$BR(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) \equiv \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{tudo})} = (6.3 \pm 1.1) \times 10^{-9} \quad (7.69)$$

Como é que isto se enquadra no que dissemos acima? Muito simplesmente o mecanismo de GIM proíbe interações de corrente neutra com $\Delta S \neq 0$ somente ao nível árvore. Em ordem superior tais processos poderão existir. Assim para este processo podemos temos os dois diagramas da Fig. (7.6). Comparando os acoplamentos nos vértices o diagrama com o quark u tem uma amplitude

$$M_u \propto \sin \theta_c \cos \theta_c \quad (7.70)$$

Figure 7.6: Diagramas para $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

enquanto que o diagrama com o quark c tem a amplitude

$$M_c \propto -\sin \theta_c \cos \theta_c \quad (7.71)$$

Tudo o mais é igual exceto a massa dos quarks. Se $m_u = m_c$ os dois diagramas cancelariam exatamente dando uma contribuição zero em conflito com a Eq. (7.69). Se $m_c \gg m_u$ o segundo diagrama será muito pequeno (não esquecer a massa no denominador do propagador do quark) e GIM calcularam que a contribuição do primeiro diagrama era demasiado grande para comparar com o valor observado experimentalmente. Para satisfazer o valor experimental a massa do quark c deveria estar num intervalo não muito largo. Eles encontraram

$$1 \text{ GeV} < m_c < 3 \text{ GeV} \quad (7.72)$$

em comparação com o valor hoje aceite

$$m_c = 1.4 \text{ GeV} \quad (7.73)$$

Mais uma vez a via da simetria obtinha resultados importantes. Com o mecanismo de GIM é possível promover a simetria da parte hadrónica do lagrangeano fraco ao grupo $SU_L(2)$.

7.4 A hipótese do bóson vetorial intermédio

Como vimos a teoria de Fermi foi motivada pela analogia com QED. Mas essa analogia é imperfeita pois não há o análogo do fóton, o portador da interação eletromagnética. Assim, desde muito cedo apareceu a ideia de que deveria existir o análogo do fóton para as interações fracas. Esse campo, designado por W , deveria ser também vetorial e carregado, pois as correntes consideradas até então eram carregadas. Na linguagem dos diagramas de Feynman, devíamos ter para o decaimento do muão o diagrama da Fig. (7.7) e as interações fracas seriam então mediadas pelo W da mesma maneira que as interações eletromagnéticas são mediadas pelo fóton. Ao W foi dado na altura o nome de *Bosão Vetorial Intermédio*

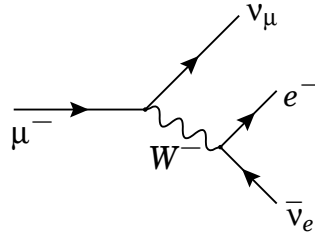


Figure 7.7: Decaimento do muão com bóson vetorial intermédio.

ou IVB atendendo às iniciais em inglês. A ideia seria então que o lagrangeano na Eq. (7.26) seria substituído por um outro do tipo

$$\mathcal{L}_{weak} = g_w J_\mu W^\mu + \text{h.c.} \quad (7.74)$$

onde g_w é agora uma constante de acoplamento sem dimensões. Para tornar a teoria completa precisamos de saber o seu propagador. Para isso necessitamos da equação de onda para partículas de spin 1 com massa. Essa equação, designada por *equação de Proca* e escreve-se

$$(\square + m^2)W^\mu - \partial^\mu \partial_\nu W^\nu = J^\mu \quad (7.75)$$

O propagador é então a função de Green solução da equação

$$[(\square + m^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] G_F^{\nu\rho}(x - x') = i g^{\mu\rho} \delta^4(x - x') \quad (7.76)$$

Passando para o espaço dos momentos obtemos

$$[(-k^2 + m^2)g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] G_F^{\nu\rho}(k) = i g^{\mu\rho} \quad (7.77)$$

que tem como solução (ver Problema 4.2)

$$G_F^{\nu\rho} = i \frac{-g^{\nu\rho} + \frac{k^\nu k^\rho}{m^2}}{k^2 - m^2} \quad (7.78)$$

Então o elemento de matriz para o decaimento do μ^- será da forma

$$\mathcal{M} = g_w^2 J_\mu G_F^{\mu\nu} J_\nu \quad (7.79)$$

e portanto se $k^2 \ll m^2$ devemos ter

$$G_F \simeq \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (7.80)$$

Se $g \sim e$ então

$$m_W \sim e \sqrt{G_F} \sim 90 \text{ GeV} \quad (7.81)$$

o que justificaria a aproximação acima. Veremos mais à frente, no quadro do Modelo Standard, qual a relação exata entre G_F , g_w e m_W .

7.5 Problemas com a teoria corrente-corrente

7.5.1 Violação da unitariedade na interação de Fermi

Apresentámos nas secções anteriores uma teoria que descreve toda a fenomenologia conhecida das interações fracas em finais da década de sessenta. Contudo a teoria apresenta uma série de dificuldades que passamos a rever brevemente. Começemos pela interação pontual de 4 fermiões de Fermi (modificada por Feynman e Gell-Mann). Consideremos o processo

$$\mu^-(p_1) + \bar{\nu}_\mu(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \bar{\nu}_e(p_4) \quad (7.82)$$

descrito neste modelo pelo diagrama da Fig. (7.8). Como os problemas que vamos

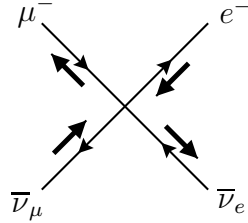


Figure 7.8: Diagrama para $\mu^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

exibir ocorrem para $\sqrt{s} \gg m_e, m_\mu$, vamos desprezar essas massas. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(p_4) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu P_L v(p_4) \end{aligned} \quad (7.83)$$

Como os antineutrinos têm helicidade positiva há só uma possibilidade de helicidades não nula,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2, \uparrow) \gamma^\mu u(p_1, \downarrow) \bar{u}(p_3, \downarrow) \gamma_\mu v(p_4, \uparrow) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sqrt{s}(0, -1, i, 0) \cdot \sqrt{s}(0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} s(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (7.84)$$

onde usámos as Eqs. (A.19) e (A.21). Portanto

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 4G_F^2 s^2 (1 + \cos \theta)^2. \quad (7.85)$$

No limite em que se desprezam as massas obtemos para a secção eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{G_F^2}{16\pi^2} s(1 + \cos\theta)^2 \quad (7.86)$$

A secção eficaz total será então

$$\sigma = \frac{G_F^2}{3\pi} s \quad (7.87)$$

Mas por outro lado, a secção eficaz de difusão pode-se escrever na forma geral

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_J (2J+1) |f_J|^2 \quad (7.88)$$

onde k é o momento no centro de massa e f_J é a onda parcial correspondente ao momento angular J . Pode-se mostrar em geral, usando argumentos de unitariedade ou, o que é o mesmo, de conservação de probabilidade, que

$$f_J = e^{i\delta_J} \sin \delta_J \quad (7.89)$$

e portanto

$$|f_J| \leq 1 \quad (7.90)$$

donde se obtém

$$\sigma_J \leq \frac{4\pi(2J+1)}{k^2} = \frac{16\pi(2J+1)}{s} \quad (7.91)$$

o que mostra que σ_J decresce com s . Mas pode-se mostrar que este processo corresponde a $J = 1$ (ver problema 4.4) e para a secção eficaz não polarizada deveremos ter

$$\sigma \leq \frac{24\pi}{s} \quad (7.92)$$

o que entra em conflito com a Eq. (7.87) para

$$\sqrt{s} \geq 1.5 \times 10^3 \text{ GeV} \quad (7.93)$$

A dificuldade com a teoria pontual pode ser relacionada com o facto da constante G_F ter dimensões. De facto

$$[G_F] = M^{-2} \quad (7.94)$$

mas

$$[\sigma] = L^2 = M^{-2} \quad (7.95)$$

e portanto a energias acima das massas dos leptões um argumento puramente dimensional dá

$$\sigma \sim G_F^2 s \quad (7.96)$$

dado que a secção eficaz deverá ser proporcional a G_F^2 . Isto foi exactamente o que encontrámos.

7.5.2 Violação de unitariedade no modelo IVB

O argumento anterior podia levar-nos a pensar que a dificuldade desapareceria no modelo com o bóson vetorial intermédio (IVB). Isto porque aí

$$G_F \sim \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (7.97)$$

e poderia acontecer que a muita alta energia

$$\sigma \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (7.98)$$

como acontece, por exemplo no processo $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ em QED. Vamos mostrar que embora o comportamento seja melhor no modelo IVB, ainda não resolve todos os problemas. Voltemos ao processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ que agora se representa na Fig. (7.9).

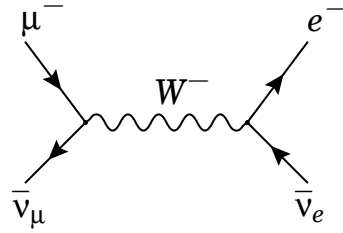


Figure 7.9:

A amplitude é agora

$$\mathcal{M} = g_w^2 \bar{\nu}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(q_2) \quad (7.99)$$

Poder-se-ia pensar que os fatores de momento no numerador do propagador do W iriam piorar o comportamento para valores elevados da energia no centro de massa. Tal não é verdade, pois uma vez utilizada a equação de Dirac, esses termos vão ser proporcionais à massa dos léptões que desprezamos no limite das altas energias. Então para $\sqrt{s} \gg m_W$ obtemos

$$\mathcal{M} \simeq \frac{g_w^2}{s} \bar{\nu}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(q_2) \quad (7.100)$$

o que comparado com a Eq. (7.83) mostra que

$$G_F \rightarrow \frac{g_w^2}{s} \quad (7.101)$$

Então o cálculo da secção eficaz dá

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-) \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (7.102)$$

o que está de acordo com a unitariedade. Como dissemos atrás, embora deixe de haver problema para este processo, outros há em que os problemas persistem. Para vermos isso consideremos o processo

$$e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^- \quad (7.103)$$

no quadro do modelo IVB. Temos então o diagrama da Fig. (7.10). A amplitude é

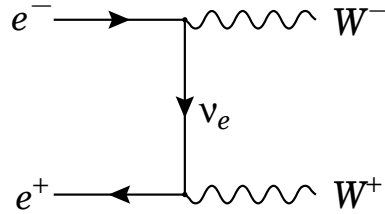


Figure 7.10: Colisão $e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^-$.

proporcional a

$$\mathcal{M} \sim g_w^2 \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(q_2, \lambda_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_1 - \not{q}_1}{(p_1 - q_1)^2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \quad (7.104)$$

No limite $\sqrt{s} \gg m_e, m_W$ pode-se mostra que obtemos

$$\overline{|M|^2} \sim \frac{g_w^4}{m_W^4} s f(\theta) \quad (7.105)$$

o que mostra que temos novamente o mesmo problema que na teoria pontual de Fermi, como se vê comparando com a Eq. (7.85). Um estudo mais detalhado mostra que o problema está na polarização longitudinal dos W 's. Notar que o processo semelhante

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad (7.106)$$

em QED não tem qualquer problema. Podemos assim suspeitar que a invariância de gauge de QED, relacionada com a massa zero do fóton, e a ausência de polarização longitudinal, deve ser a chave do problema.

Problemas capítulo 7

7.1 Mostre que da equação de Dirac se obtém para as componentes ψ_L e ψ_R

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\psi_R \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \quad (7.107)$$

Comente este resultado.

7.2 Resolva a Eq. (7.77) para encontrar o propagador duma partícula de spin 1 com massa. Para isso faça

$$G_F^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (7.108)$$

e determine as funções invariantes $A(k^2)$ e $B(k^2)$.

7.3 Considere o processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ descrito na secção 7.5.1. Mostre que no referencial do centro de massa o momento angular é $J = 1$. Explique então porque é que

$$M \propto (1 + \cos \theta) \quad (7.109)$$

7.4 Considere o processo $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$. Mostre que

a) A secção eficaz diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi} s \quad (7.110)$$

b) A secção eficaz total é dada por

$$\sigma = \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (7.111)$$

c) Mostre que no C.M. temos só $J = 0$. Use esse facto para extrair um limite a partir do qual a unitariedade é violada.

Chapter 8

Spontaneous Symmetry Breaking; Higgs Mechanism

Aqui seguimos as secções 10.7 a 10.9 do Griffiths [2] e o capítulo 3 do meu texto FIE [6].

8.1 Introdução

Vamos agora considerar o problema da quebra de simetria. A maior parte das simetrias observadas na Natureza não são exatas. Por exemplo, o *Isospin* não é uma simetria exata da Natureza pois o protão e o neutrão não tem a mesma massa. Uma maneira de estudar em teoria quântica dos campos teorias com quebra de simetria é introduzir no lagrangeano termos com coeficientes *pequenos* que explicitamente realizem a quebra. Nós aqui vamos estar interessados noutro tipo de quebra de simetria, dita espontânea, em que o lagrangeano é simétrico sob a ação dum grupo de transformações mas o estado base (de menor energia) não é.

Para vermos aquilo em que estamos interessados vamos começar pelo exemplo mais simples, uma teoria com um campo escalar complexo com auto-interação e invariante para o grupo U(1). O lagrangeano mais geral invariante de Lorentz e renormalizável¹ é então

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)\end{aligned}\tag{8.1}$$

O lagrangeano na Eq. (8.1) descreve um campo escalar complexo ou dois campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. Normalmente, o

¹Em termos muito simples pode dizer-se que uma teoria é renormalizável se nenhum dos termos que constituem o lagrangeano tiver dimensão, em termos de massa, superior a quatro. Para esta contagem uma derivada conta como uma massa, um campo escalar também como uma massa e um campo fermiónico com dimensão de $\frac{3}{2}$ em termos de massa. Para mais detalhes ver as Refs. [3, 14].

espectro de massa vê-se analisando os termos quadráticos da teoria. Mas isto contém o pressuposto que o estado base (energia mínima) corresponde à configuração em que os campos são nulos. Para campos escalares, pode suceder que o estado de energia mínima corresponda a uma configuração em que

$$\phi = v = \text{constante} \neq 0 \quad (8.2)$$

Neste caso as partículas são associadas com oscilações de ϕ em torno do valor do mínimo, v . Se escrevermos

$$\phi(x) = v + \chi(x) \quad (8.3)$$

as massas devem ser lidas da parte de lagrangeano quadrático em χ . Vejamos para a teoria descrita na Eq. (8.1) quais são os estados de energia mínima. A densidade hamiltoniana é (ver problema 8.1),

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (\vec{\partial}\phi^*) \cdot (\vec{\partial}\phi) + V \quad (8.4)$$

Como os dois primeiros termos são definidos positivos e a energia deve ser limitada por baixo, o parâmetro λ na Eq. (8.1) deve ser positivo. O sinal do parâmetro μ^2 é deixado arbitrário. O mínimo da energia corresponde a um valor constante para ϕ que minimize o potencial V . Este é dado por

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (8.5)$$

e as equações de minimização são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi^*} &= \phi(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \phi^*(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

Temos portanto duas possibilidades:

$$a) \mu^2 > 0$$

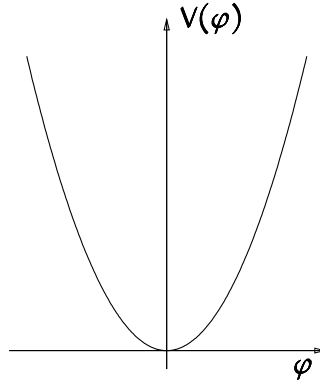
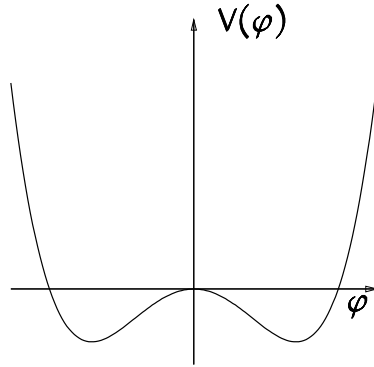
Neste caso o mínimo é para $\phi = 0$. Temos a situação descrita na Fig. 8.1. A teoria descreve um isodubleto escalar complexo de massa $m = \sqrt{\mu^2}$.

$$b) \mu^2 < 0$$

Neste caso o potencial tem a forma da Fig. 8.2, e o mínimo corresponde ao valor

$$\phi^* \phi = |\phi| = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 \quad (8.7)$$

Consideremos o caso $b)$. Uma maneira possível de vermos o espectro de massa da teoria seria introduzir a condição de mínimo na Eq. (8.3) e depois fazer a substituição no lagrangeano da Eq. (8.1). Contudo esta não é a forma mais fácil de proceder

Figure 8.1: Potencial clássico para $\mu^2 > 0$.Figure 8.2: Potencial clássico para $\mu^2 < 0$.

neste caso. Como a condição do mínimo é que $|\phi| = v$, é mais conveniente fazer a seguinte redefinição do campo complexo ϕ :

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.8)$$

com ξ e σ campos escalares reais. Esta parametrização corresponde a escrever o campo complexo na forma

$$\phi = e^{i \arg(\phi)} |\phi| \quad (8.9)$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &= \frac{i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial_\mu \sigma \\ \partial^\mu \phi^* &= \frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial^\mu \sigma \end{aligned} \quad (8.10)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial_\mu \sigma \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial^\mu \sigma \right) \\
&\quad - \mu^2 \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 - \lambda \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \left(\sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\
&\quad - \mu^2 \left(v^2 + \sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \lambda \left(v^4 + 2\sqrt{2}v^3\sigma + 3\sqrt{2}v^2\sigma^2 + \sqrt{2}v\sigma^3 + \frac{\sigma^4}{4} \right)
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Usando a condição do mínimo podemos escrever, conservando somente até aos termos quadráticos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{constante} \\
&\quad + \text{termos de ordem superior}
\end{aligned} \tag{8.12}$$

O lagrangeano da Eq. (8.12) descreve portanto dois campos escalares reais, ξ e σ , um com massa $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$ e outro com massa zero, $m_\xi = 0$. Este facto pode ser interpretado facilmente. Em primeiro lugar, notemos que o potencial V é no plano complexo do campo ϕ um potencial tipo *fundo de garrafa de champanhe*. Com a parametrização da Eq. (8.8) o campo σ refere-se às oscilações radiais e ξ às oscilações angulares. Ora enquanto que o potencial tem curvatura na direcção radial, na direcção angular o potencial é plano. Não custa energia rodar ao longo do *vale* no fundo da garrafa como indicado na Fig. 8.3. Assim as excitações radiais têm massa

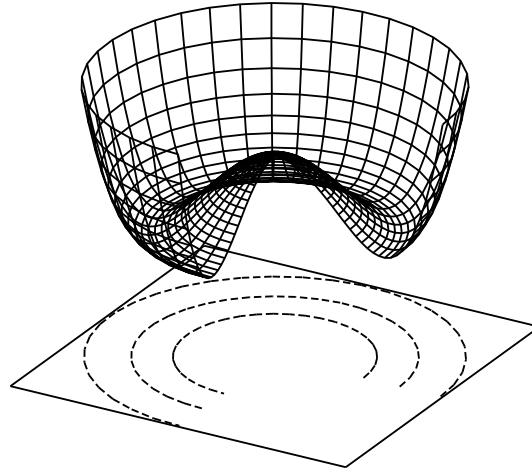


Figure 8.3: Representação do potencial quando $\mu^2 < 0$.

e as angulares não. O aparecimento de partículas sem massa é uma característica

geral destes fenómenos de quebra espontânea de simetria e é designado por teorema de Goldstone. Na secção seguinte faremos uma demonstração geral do teorema. Contudo antes de acabarmos esta secção vamos dar outros exemplos simples.

O segundo exemplo que vamos considerar é de facto o mesmo exemplo noutra linguagem. Se escrevermos o campo ϕ em termos das partes real e imaginária

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho + i\pi) \quad (8.13)$$

obtemos para o lagrangeano na Eq. (8.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - V(\rho^2 + \pi^2) \quad (8.14)$$

onde

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\rho^2 + \pi^2) + \frac{1}{4} \lambda (\rho^2 + \pi^2)^2 \quad (8.15)$$

Este lagrangeano continua a ter uma invariância. De facto é invariante para o grupo das rotações no plano, $O(2)$. Este grupo tem a mesma álgebra que $U(1)$. É o grupo abeliano das rotações em torno dum eixo de simetria. As transformações podem escrever-se

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

Para analisarmos a quebra de simetria temos de ver onde ocorre o mínimo. As equações são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 &= \rho [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} = 0 &= \pi [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \end{aligned} \quad (8.17)$$

Novamente podemos ter as duas situações das Figs. 8.1 e 8.2. No caso em que $\mu^2 < 0$, o mínimo absoluto ocorre na circunferência

$$\sqrt{\rho^2 + \pi^2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad (8.18)$$

Para vermos o espectro tomemos os eixos no plano $\rho - \pi$ de tal forma que

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad ; \quad \langle \pi \rangle_0 = 0 \quad (8.19)$$

Então definimos

$$r = \rho - v \quad (8.20)$$

e escrevemos o lagrangeano na Eq. (8.12) em termos de r e π . Obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu r \partial^\mu r + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \mu^2 r^2 - \lambda v r (r^2 + \pi^2) - \frac{1}{4} \lambda (r^2 + \pi^2)^2 \quad (8.21)$$

Obtivemos novamente um campo sem massa, π , enquanto que o campo r tem massa $m_r = \sqrt{-2\mu^2}$. Para vermos que não há perda de generalidade na escolha da Eq. (8.19) ver o problema 8.1.

Finalmente, como último exemplo, consideremos uma teoria novamente com um campo escalar complexo com auto-interação mas em que a interação é invariante para transformações de isospin descrito pelo grupo $SU(2)$, e o campo encontra-se na representação dubleto desse grupo. O lagrangeano mais geral, invariante de Lorentz, invariante para o transformações do grupo e renormalizável é então

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)\end{aligned}\quad (8.22)$$

onde

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

O lagrangeano da Eq. (8.22) descreve portanto 4 campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. O estado base vai corresponder ao mínimo do potencial. Estamos interessados na situação em que há quebra espontânea de simetria, isto é o vácuo (estado base) não tem a mesma simetria que o lagrangeano. Isto acontece quando ocorre a situação da Fig. 8.2. Neste caso o potencial é minimizado, para $\mu^2 < 0$, quando

$$\phi^\dagger \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 \quad (8.24)$$

Podemos sempre escolher um referencial de isospin onde o estado de energia mínima se possa escrever

$$\phi_{\min} = \text{constante} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

O campo $\phi(x)$ pode portanto escrever-se

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \chi(x) \quad (8.26)$$

Para parametrizar convenientemente as pequenas oscilações $\chi(x)$, notemos que em cada ponto x podemos sempre escolher um referencial de isospin onde $\phi(x)$ tenha a forma

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

Este referencial será ligado ao referencial definido pela Eq. (8.25) através duma transformação de $SU(2)$, diferente para cada x ,

$$U(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \quad (8.28)$$

Podemos portanto escrever nesse referencial²

$$\phi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

e

$$\chi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

Para pequenas oscilações temos

$$\chi(x) \simeq \begin{bmatrix} v(\theta^2 + i\theta^1) \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - iv\theta^3 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

As pequenas oscilações em torno do estado base são parametrizadas por quatro campos escalares reais, θ^a e σ . O espectro de massa é lido dos termos quadráticos nesses campos. Substituindo a Eq. (8.29) no lagrangeano da Eq. (8.22) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + v^2 \partial_\mu \theta^a \partial^\mu \theta^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\theta}^a \partial^\mu \hat{\theta}^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (8.32)$$

onde

$$m_\sigma = \sqrt{-2 \mu^2} \quad (8.33)$$

e redefinimos os campos θ^a para que o termo cinético tenha a normalização canónica.

$$\hat{\theta}^a \equiv \sqrt{2} v \theta^a \quad (8.34)$$

Temos portanto três partículas de massa zero e uma com massa $\sqrt{-2 \mu^2}$. O aparecimento de partículas de massa zero, designadas por *bosões de Nambu-Goldstone*, é uma consequência do teorema de Goldstone que veremos na secção seguinte.

8.2 O teorema de Goldstone

Comecemos então pelo enunciado do teorema.

²Comparar a forma da Eq. (8.29) com a da Eq. (8.8). A explicação da Eq. (8.8) pode ser feita exactamente da mesma forma, só que agora o grupo seria U(1) e não SU(2).

Teorema 8.1 *Seja uma teoria invariante sob a ação dum grupo de transformações G , com n geradores. Se houver uma quebra espontânea da simetria, de tal forma que o vácuo (estado base) seja invariante somente sob a ação de G' com m geradores ($G' \subset G$), então aparecerão partículas de spin zero sem massa em número igual ao dos geradores de G que não deixam o vácuo invariante, isto é, há $n-m$ bósons de Nambu-Goldstone.*

Vemos portanto que o teorema não só nos diz que há partículas sem massa mas também nos diz o seu número. Nos dois primeiros exemplos anteriores tínhamos os grupos $U(1)$ e $O(2)$ com 1 gerador, e o vácuo ficou sem simetria alguma e portanto o número de bósons de Nambu-Goldstone era igual ao número de geradores daqueles grupos, isto é um gerador. O terceiro exemplo requer um pouco mais de atenção. Isto porque embora tivéssemos só falado do grupo $SU(2)$, de facto a simetria do lagrangeano na Eq. (8.22) é maior do que $SU(2)$ pois também é invariante para transformações de fase das duas componentes do dubleto ao mesmo tempo, isto é

$$\phi' = e^{i\epsilon} \phi \quad (8.35)$$

Este grupo é o grupo $U(1)$, e é claro que as suas transformações comutam com as de $SU(2)$. Isto quer dizer que a invariância total do lagrangeano é $SU(2) \times U(1)$. O número de geradores é então $3+1=4$, o que quer dizer, de acordo com o teorema de Goldstone, que o vácuo, Eq. (8.25), ainda deve ser invariante para algum subgrupo abeliano de $SU(2) \times U(1)$. Isto é de facto verdade pois a combinação

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (8.36)$$

deixa invariante o vácuo 8.25. De facto

$$Q\phi_{min} = \frac{1 + \tau_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (8.37)$$

e portanto

$$e^{i\epsilon Q} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

Este modelo será a base do modelo standard das interações eletrofracas, e o gerador que não é quebrado será interpretado como a *carga elétrica*.

É conveniente, antes de apresentarmos a demonstração geral do teorema, vermos outro caso em que nem toda a simetria é quebrada. Seja uma teoria com um tripleto de campos escalares ϕ^i com $i = 1, 2, 3$. Com estes campos podemos construir um lagrangeano invariante para rotações no espaço de simetria interna, isto é invariante para $O(3)$. O lagrangeano é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^i \phi^i - \frac{1}{4} \lambda (\phi^i \phi^i)^2 \quad (8.39)$$

Com a experiência adquirida até aqui é fácil de ver que se $\mu^2 < 0$ o potencial tem um mínimo se

$$\phi^i \phi^i = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (8.40)$$

Esta condição não define a direção da quebra de simetria. Escolhemos um referencial no qual é a componente 3 que desenvolve um valor de expectação no vácuo (vev). Isto quer que podemos escrever

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

O grupo de simetria original $O(3)$ tem $\frac{1}{2} \times 3 \times (3 - 1) = 3$ geradores. O facto novo que aparece neste exemplo é que o vácuo ainda tem um grupo de simetria não trivial. Este é o subgrupo de $O(3)$ que não mistura a componente 3 com as outras. É claro que é $O(2)$ com $\frac{1}{2} \times 2 \times (2 - 1) = 1$ gerador. De acordo com o teorema de Goldstone devemos ter $3 - 1 = 2$ bosões de Nambu-Goldstone. Vamos ver como isso ocorre. Para isso convém recordar um pouco de teoria de grupos (ver problema 6.3). Sejam $L_{ij} = -L_{ji}$ os 3 geradores de $O(3)$ e l_{ij} os do subgrupo $O(2)$, isto é $l_{ij} = L_{ij}$ para $i, j \neq 3$ (é de facto só um gerador, l_{12}). Sejam $k_i = L_{i3}, i = 1, 2$ os restantes geradores de $O(3)$. Em geral podemos escrever

$$(L_{ij})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (8.42)$$

e portanto os geradores k_i são

$$(k_i)_{kl} = (L_{i3})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{3l} - \delta_{il} \delta_{3k}) \quad (8.43)$$

Então k_i atuando no vetor coluna $v_i = v \delta_{i3}$ dá

$$(k_i v)_j = v (k_i)_{jl} \delta_{l3} = v (k_i)_{j3} = -i v \delta_{ij} \quad (8.44)$$

Então se definirmos σ e ξ_i , $i = 1, 2$ por

$$\phi = e^{i \xi_i(x) k_i / v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

vemos que a ordem mais baixa é equivalente a subtrair o valor de expectação para definir os novos campos. De facto em ordem mais baixa

$$\phi \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + i \xi_i(x) k_i / v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (8.46)$$

Em termos destes campos o lagrangeano escreve-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi_i - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \sigma)^4 \\ & + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (8.47)$$

Observamos novamente que o campo σ tem massa $-2\mu^2$ e que há dois campos ξ_1 e ξ_2 , com massa nula. Isto é precisamente o que diz o teorema de Goldstone. Este exemplo generaliza-se facilmente ao caso do grupo $O(n)$. Então o número de bósons de Nambu-Goldstone é, para o caso duma quebra de simetria do grupo $O(n)$ para o seu subgrupo $O(n-1)$

$$\begin{aligned} \# \text{Bosões de Goldstone} &= \# \text{Geradores de } O(n) - \# \text{Geradores de } O(n-1) \\ &= \frac{1}{2} \times n \times (n-1) - \frac{1}{2} \times (n-1) \times (n-2) \\ &= n-1 \end{aligned} \quad (8.48)$$

o que se reduz ao resultado anterior para o caso de $O(3)$.

Voltemos então ao teorema de Goldstone [23,24] para efetuar a sua demonstração.

Dem.

Comecemos por escrever o lagrangeano em termos de n campos escalares reais ϕ_i , que formam um vetor com n componentes,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

Isto é sempre possível, pois uma representação complexa pode sempre ser tornada real à custa de duplicar a dimensão do espaço vetorial. Então o lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (8.50)$$

onde $V(\phi)$ é um polinómio em ϕ que é invariante sob a ação de algum grupo G . Este tem n geradores Ω^a e os campos ϕ transformam-se de acordo com

$$\delta \phi = i \epsilon^a \Omega^a \phi \quad (8.51)$$

Como a representação é real então, $i\Omega^a$ deve ser uma matriz real, e Ω^a uma matriz imaginária pura. Como os Ω^a são matrizes hermiticas, então também devem ser antissimétricas (comparar com o exemplo de $O(3)$), pois

$$\Omega^a = (\Omega^a)^\dagger = (\Omega^{a*})^T = -\Omega^{aT} \quad (8.52)$$

V é invariante sob a ação de G e portanto devemos ter

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = i \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \epsilon^a \Omega_{ij}^a \phi_j \quad (8.53)$$

Como os parâmetros ϵ^a são arbitrários, obtemos as equações

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Omega_{ij}^a \phi_j = 0 \quad ; \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (8.54)$$

Diferenciemos agora a equação anterior. Obtemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \Omega_{ij}^a \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \Omega_{ik}^a = 0 \quad (8.55)$$

Agora calculemos a Eq. (8.55) no valor $\phi = v$ que minimiza V , isto é

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \right|_{\phi=v} = 0 \quad (8.56)$$

O resultado é então

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \right|_{\phi=v} \Omega_{ij}^a v_j = 0 \quad (8.57)$$

Por outro lado se expandirmos V em redor do mínimo devemos ter

$$V = \frac{1}{2} M_{ij}^2 (\phi - v)_i (\phi - v)_j + \text{termos de ordem superior} \quad (8.58)$$

Daqui se conclui que

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi=v} = M_{ij}^2 \quad (8.59)$$

onde M_{ij}^2 é a matriz de massa (quadrada). Então

$$M_{ij}^2 \Omega_{jk}^a v_k = 0 \quad (8.60)$$

Seja agora G' o subgrupo de dimensão m de G que permanece como uma simetria do vácuo. O que isto quer dizer é que se Ω^a for um gerador de G' então

$$\Omega^a v = 0 \quad (8.61)$$

e a Eq. (8.60) não contém qualquer informação sobre a massa. Pelo contrário, para cada um dos $(n-m)$ vetores $\Omega^a v$ que não são zero, então a Eq. (8.60)

diz-nos que M^2 tem um valor próprio zero. Se estes vetores $\Omega^a v$ não nulos formarem a base dum espaço vetorial de dimensão $(n-m)$, mostrámos que há $(n-m)$ bosões de Goldstone na teoria. Demonstremos então este último ponto. Para isso definimos

$$A^{ab} \equiv (\Omega^a v, \Omega^b v) = (v, \Omega^a \Omega^b v) \quad (8.62)$$

onde a última igualdade resulta de Ω^a ser hermítico. Então

$$A^{ab} - A^{ba} = (v, [\Omega^a, \Omega^b] v) = i f^{abc} (v, \Omega^c v) = 0 \quad (8.63)$$

e a última igualdade resulta do facto das matrizes Ω^a serem antissimétricas. Seja agora $\tilde{A}$ a matriz $(n-m) \times (n-m)$ obtida de A por restrição dos valores de a e b para os quais $\Omega^a v \neq 0$. Então $\tilde{A}$ é uma matriz simétrica e pode ser diagonalizada. Seja O a matriz $(n-m) \times (n-m)$ que diagonaliza $\tilde{A}$, isto é

$$\tilde{A}'^{ab} = (O \tilde{A} O^T)^{ab} = (O^{ac} \Omega^c v, O^{bd} \Omega^d v) \quad (8.64)$$

Mas $O^{ac} \Omega^c v \neq 0$, e os elementos diagonais de $\tilde{A}'$ são todos positivos e o espaço gerado por $O^{ab} \Omega^b$ e portanto por Ω^b tem dimensão $(n-m)$. Então os Ω^a que não aniquilam o vácuo são independentes, o que completa a demonstração de que M^2 tem $(n-m)$ valores próprios nulos.

8.3 O mecanismo de Higgs

Chegados aqui, podemos perguntar porque é que estivemos a estudar em tanto detalhe teorias com quebra espontânea de simetria, pois á primeira vista o problema de necessitarmos de partículas com massa para descrever as interações fracas não parece ser resolvido com estas teorias, pois a quebra de simetria dá origem a novas partículas sem massa e os bosões de gauge dessas teorias não podem ter termos de massa no lagrangeano, pois não são invariantes de gauge. A razão é que se tivermos uma teoria com invariância de gauge local e o fenómeno de quebra espontânea de simetria, então os bosões de Nambu-Goldstone não aparecem e é possível dar massa aos bosões vetoriais dessa teoria. Este fenómeno é conhecido pelo nome de mecanismo de Higgs, que passamos a explicar.

Não vamos apresentar uma demonstração geral mas sim dar dois exemplos. Vamos começar pelo caso do campo escalar carregado com invariância de gauge local

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (8.65)$$

onde a derivada covariante é

$$D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu \quad (8.66)$$

Por construção o lagrangeano é invariante para as transformações de gauge locais

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\epsilon(x)} \phi(x)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x) \quad (8.67)$$

Se $\mu^2 > 0$, a Eq. (8.65) é simplesmente o lagrangeano da eletrodinâmica escalar [3]. Se $\mu^2 < 0$ devemos ter o mecanismo de quebra espontânea de simetria e temos que analisar o espectro com mais cuidado. Em particular temos que encontrar o vácuo da teoria (estado base). Este será dado pelos valores $\langle \phi \rangle$ e $\langle A_\mu \rangle$ que minimizem a energia. A invariância de Lorentz do vácuo requer que

$$\langle A_\mu \rangle = 0 \quad (8.68)$$

mas o campo escalar ϕ deverá ter um valor não nulo

$$\langle \phi \rangle = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} > 0 \quad (8.69)$$

Em vez de fazermos a mudança de variável $\phi(x) \rightarrow v + \chi(x)$, vamos parametrizar ϕ exponencialmente, isto é

$$\phi(x) = e^{i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.70)$$

Como vimos o campo $\xi(x)$ está associado com a quebra espontânea da simetria. Na ausência do campo de gauge A_μ , concluímos que ξ não tinha massa. Vamos ver agora que isso não é verdade para uma teoria de gauge. Substituindo a Eq. (8.70) na Eq. (8.65), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ & + \sqrt{2} v e A_\mu \partial^\mu \xi + \mu^2 \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (8.71)$$

Da equação anterior resulta que o campo σ tem massa $-2\mu^2$, mas os campos A_μ e ξ estão misturados ao nível dos termos quadráticos. Assim a leitura do espectro não é imediata. A maneira mais fácil de resolver esta situação é aproveitar a invariância de gauge local do lagrangeano da Eq. (8.65). Se escolhermos para parâmetro da transformação de gauge

$$\epsilon(x) = -\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v} \quad (8.72)$$

então

$$\begin{aligned} \phi(x) & \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \phi(x) = v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \\ A_\mu(x) & \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \end{aligned} \quad (8.73)$$

Como o lagrangeano é invariante para estas transformações devemos ter

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi, A_\mu) &= \mathcal{L}(\phi', A'_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu - ieA'_\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \left[(\partial^\mu + ieA'^\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu^2 (\sqrt{2}v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\sqrt{2}v + \sigma)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (8.74)$$

onde

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad (8.75)$$

Agora o novo lagrangeano na Eq. (8.74) pode ser expandido facilmente. Obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} e^2 A'_\mu A'^\mu \sigma (2\sqrt{2}v + \sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma^2 (6\lambda v^2 + \mu^2) - \sqrt{2}\lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4} \lambda \sigma^4\end{aligned}\quad (8.76)$$

Nesta gauge não há, para os termos quadráticos, mistura entre os diferentes campos e portanto o espectro pode ser lido diretamente,

$$\begin{aligned}m_\sigma &= \sqrt{6\lambda v^2 + \mu^2} = \sqrt{-2\mu^2} \\ m_A &= \sqrt{2}ev\end{aligned}\quad (8.77)$$

e o campo ξ desapareceu completamente da teoria. Esta gauge, onde o espectro pode ser lido facilmente, é designada por *gauge unitária*³. Para onde foi o campo ξ ? Para percebermos a resposta, façamos primeiro uma contagem de graus de liberdade. No lagrangeano original, Eq. (8.65), temos dois campos escalares reais e um campo vetorial *sem massa*, portanto outros dois graus de liberdade. No total temos quatro graus de liberdade. No lagrangeano redefinido, Eq. (8.76), temos só um campo escalar real, correspondendo a um grau de liberdade, mas temos um campo vetorial *com massa*, correspondendo a três graus de liberdade. A soma é de novo quatro. Portanto a interpretação é que o grau de liberdade associado ao ξ corresponde à polarização longitudinal do campo vetorial. Vemos assim, que contrariamente ao que diz o teorema de Goldstone, não só não há bósons de Nambu-Goldstone, mas além disso campos vetoriais podem adquirir massa no processo. Este fenómeno designa-se por *mecanismo de Higgs*. Com a atribuição do prémio Nobel de 2013 a comunidade passou a chamar *mecanismo de Brout-Englert-Higgs* embora na verdade tenha sido descoberto independentemente por várias pessoas [26–28].

O exemplo anterior é bastante simples e mostra o essencial do mecanismo de Higgs mas é demasiado simples para ser útil na física de partículas. Isto porque o campo A_μ não pode ser interpretado como o fóton, pois sabemos que este não tem

³Pode-se mostrar [25] que a gauge unitária, onde é fácil de ler o espectro, existe sempre.

massa⁴. Para considerarmos um modelo mais realista, (de facto a base do modelo standard das interações eletrofracas), consideremos a teoria de gauge construída sobre o modelo invariante para $SU(2) \times U(1)$ dada pelo lagrangeano da Eq. (8.22). A versão com invariância de gauge local escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (8.78)$$

onde V é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (8.79)$$

e onde introduzimos os campos W_μ^a , ($a = 1, 2, 3$) e B_μ correspondentes a $SU(2)$ e a $U(1)$, respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (8.80)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (8.81)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left(\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (8.82)$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli e o fator $\frac{1}{2}$ no terceiro termo da Eq. (8.82) foi introduzido por conveniência (podemos sempre redefinir a constante g'). Note-se que como o grupo é um produto de 2 fatores, há uma constante de acoplamento para cada grupo fator, g e g' . O passo seguinte na análise deste modelo é encontrar o estado base ou vácuo. Devido aos requisitos de invariância de Lorentz só o campo escalar pode ter um valor constante diferente de zero e minimizar a energia. Esta será a situação quando $\mu^2 < 0$.

Vejamos então qual o espectro de massa neste caso. Escolhemos os eixos de isospin tais que

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.83)$$

onde como anteriormente

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (8.84)$$

Com a experiência do exemplo anterior podemos escolher uma gauge, designada por *gauge unitária*, onde

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.85)$$

⁴Este exemplo é útil em supercondutividade onde o efeito de Meissner pode ser interpretado como o fóton adquirindo uma massa. Na verdade as ideias que deram origem ao mecanismo vieram da física da matéria condensada.

Então substituindo a Eq. (8.85) na Eq. (8.78), e conservando só os termos quadráticos, obtemos para os diferentes termos,

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \phi^\dagger) (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \left(v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2} v \sigma \right) \left[\frac{1}{4} g^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \right] \\
 &\quad + \left(v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2} v \sigma \right) \left[\frac{1}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W^{3\mu} - g' B^\mu) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{4} (gv)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\
 &\quad + \frac{1}{4} v^2 (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W^{3\mu} - g' B^\mu) \\
 &\quad + \text{termos de ordem superior} \\
 V(\phi^* \phi) &= \text{constante} + \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \\
 -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + \text{termos de ordem superior} \\
 -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu
 \end{aligned} \tag{8.86}$$

Vejamos então o espectro da teoria. Na parte dos campos escalares obtemos, como anteriormente, só um campo escalar real com massa

$$m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2} \tag{8.87}$$

Como a Eq. (8.86) tem produtos cruzados de W_μ^3 e B_μ , para determinar o espectro de massa dos bósons de gauge temos que diagonalizar a matriz de massa

$$M^2 = \frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \tag{8.88}$$

Os valores próprios de M^2 são 0 e $\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)$. Se designarmos o vetor próprio de massa nula por A_μ e outro por Z_μ , podemos escrever

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \tag{8.89}$$

O ângulo θ_W é determinado pelo requerimento que A_μ seja o vetor próprio de massa nula, isto é

$$\frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{bmatrix} = 0 \tag{8.90}$$

donde resulta

$$g^2 \sin \theta_W - g g' \cos \theta_W = 0 \quad (8.91)$$

ou seja

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (8.92)$$

A parte livre (quadrática nos campos) do lagrangeano escreve-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{livre}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\ & - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^1 \tilde{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^2 \tilde{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{Z}_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\ & - \frac{1}{4} \tilde{A}_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.93)$$

onde definimos as partes quadráticas dos tensores dos campos de gauge,

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^{1,2} = \partial_\mu W_\nu^{1,2} - \partial_\nu W_\mu^{1,2}, \quad \tilde{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad \tilde{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.94)$$

Vemos portanto que na presença de campos de gauge, o fenómeno da quebra espontânea de simetria não conduz a campos escalares sem massa. O espectro de massa é o seguinte. Um campo escalar, σ , com massa $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$ como antes. Dois campos vectoriais com massa $M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2}$, um campo vectorial com massa $M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)}$ e um campo vectorial sem massa⁵. Vemos assim, que 3 dos campos de gauge adquiriram massa devido ao fenómeno de quebra espontânea de simetria. Este fenómeno é designado por mecanismo de Higgs. Repare-se que a contagem do número de graus de liberdade está certa, pois um campo vectorial massivo tem 3 polarizações enquanto que se não tiver massa tem só duas. Assim se explica o *desaparecimento* dos três escalares da teoria. Em linguagem pictórica, diz-se que foram *comidos* pelos campos de gauge que então ficaram com massas. Este mecanismo tornou possível aplicar as teorias com invariância de gauge às interações fracas pois passou a ser possível dar massa aos portadores da força fraca. Note-se ainda que um dos campos de gauge não adquiriu massa tornando-se portanto um candidato para ser o fóton. Isto deve-se ao facto da simetria não ter sido toda quebrada, há ainda uma simetria residual U(1), isto é

⁵Com as convenções das Eqs. (8.83) e (8.85) temos $v = \sqrt{2} M_W / g \simeq 174$ GeV. Se tivéssemos introduzido o factor $1/\sqrt{2}$ na Eq.(8.85) viria $v = 2 M_W / g \simeq 246$ GeV.

$$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \rightarrow \mathrm{U}(1) \quad (8.95)$$

que, como veremos no capítulo dedicado ao modelo standard, corresponderá ao eletromagnetismo. O outro facto fundamental sobre o mecanismo de Higgs, é que uma teoria com invariância de gauge local, com quebra espontânea de simetria é renormalizável, enquanto que uma teoria de campos vetoriais com massa o não é. O modelo que temos vindo a descrever corresponde de facto ao modelo de Glashow-Weinberg-Salam para as interações fracas e eletromagnéticas, que descreveremos em maior detalhe no capítulo 9.

Problemas capítulo 8

8.1 Considere o lagrangeano dedinido pela Eq. (8.14) com quebra espontânea de simetria, isto é, $\mu^2 < 0$. Então escolha o vácuo

$$\langle \rho \rangle = v \cos \theta \quad ; \quad \langle \pi \rangle = v \sin \theta \quad (8.96)$$

Faça a redefinição

$$\begin{aligned} \rho &= v \cos \theta + \rho' \\ \pi &= v \sin \theta + \pi' \end{aligned} \quad (8.97)$$

e analize o espectro da teoria.

8.2 Reproduza os passos que levaram à Eq. (8.86).

8.3 Verifique que obtém os termos quadráticos nos campos indicados na Eq. (8.93).

Chapter 9

The Electroweak Standard Model: $SU(2)_L \times U_Y(1)$

Aqui seguimos o capítulo 5 do meu texto FIE [6]. A matéria está também coberta no capítulo 9 do Griffiths [2].

9.1 Introdução

Vamos neste capítulo aplicar as ideias das teorias de gauge com quebra espontânea de simetria às interações fracas de quarks e léptons. Consideraremos o modelo específico associado aos nomes de Glashow [29], Weinberg [30] e Salam [31], que devido ao seu sucesso experimental se veio a tornar conhecido como o *modelo standard das interações eletrofracas*. Contudo antes de entrarmos em detalhes, tentemos responder a três questões:

- i) Porquê uma teoria de gauge com quebra espontânea de simetria?
- ii) Qual o grupo de simetria relevante?
- iii) Quais as representações a escolher?

Começemos pela primeira. Há várias razões. Talvez a mais importante resulte do estudo da fenomenologia das interações fracas, onde aparecia claro que estas deviam ser mediadas por uma partícula de spin 1 (campo vetorial) e que esta partícula devia ter massa devido ao curto alcance das interações fracas (ver discussão no capítulo 7). Ora, depois de muito trabalho teórico mostrou-se que as únicas teorias consistentes, isto é, *renormalizáveis e unitárias*, com partículas de spin 1 com massa eram precisamente as teorias de gauge com quebra espontânea de simetria. Uma evidência adicional vem da existência duma universalidade de intensidades entre as interações de léptons e quarks se descontarmos a rotação de Cabibbo, efeito que, como veremos, não provém do sector de gauge da teoria, mas sim do sector das massas. Uma tal universalidade seria precisamente o que seria de esperar duma

teoria de gauge, onde uma constante g_w desempenhasse um papel semelhante à carga eléctrica em QED.

As outras duas questões podem ser respondidas em simultâneo. Vimos que a estrutura das correntes fracas sugeria a ideia dum grupo de isospin fraco $SU_L(2)$ para as componentes esquerdas que participam na corrente carregada. Daí resultava que as componentes esquerdas deviam ser agrupados num dubleto. As componentes direitas dos campos carregados deveriam ser então singletos de $SU_L(2)$ para não participarem na interação fraca das correntes carregadas. Poderia o grupo ser então só $SU_L(2)$? Pensando um pouco logo se conclui que não. A razão prende-se com o facto da estrutura das correntes de $SU_L(2)$ ser $V - A$. Então a componente 3 (neutra) também teria essa estrutura e não poderia ser identificada com a corrente eletromagnética que, como sabemos, tem acoplamento vetorial ao fóton. Portanto o bóson W_μ^3 não pode ser o fóton. Assim surgiu a ideia de alargar o grupo da forma mínima com um produto por um grupo Abelian obtendo-se portanto $SU(2) \times U(1)$. Como vimos no capítulo 8, havia neste caso dois bósons W_μ^3 e B_μ que se misturavam para dar um campo com massa a que chamámos Z_μ e outro, sem massa, designado por A_μ e que, como veremos no seguimento, se identificará com o fóton.

Este modelo prevê portanto, para além da corrente eletromagnética a existência de correntes fracas neutras, o que foi verificado experimentalmente. Os resultados experimentais mostram que a Natureza escolheu a hipótese mais simples. Nas secções seguintes descreveremos os vários aspetos do modelo.

9.2 O sector de gauge

O sector de gauge e de Higgs do modelo standard é aquele que já descrevemos no final da secção 8.3. Vamos aqui apenas resumir os resultados. Consideremos então a teoria de gauge para $SU_L(2) \times U_Y(1)$ com invariância local. O lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (9.1)$$

onde V é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (9.2)$$

e onde introduzimos os campos W_μ^a , ($a = 1, 2, 3$) e B_μ correspondentes a $SU_L(2)$ e a $U_Y(1)$, respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (9.3)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (9.4)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left(\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (9.5)$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli. Depois do mecanismo da quebra espontânea de simetria vimos que a parte livre do lagrangeano se podia escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{livre}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\
& - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^1 \tilde{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu} \\
& - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^2 \tilde{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\
& - \frac{1}{4} \tilde{Z}_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.6}$$

onde introduzimos os campos A_μ e Z_μ através das relações

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \tag{9.7}$$

O ângulo θ_W foi determinado pelo requerimento que A_μ seja o vetor próprio de massa nula e obtivemos

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \tag{9.8}$$

Do lagrangeano na Eq. (9.6) resulta que temos um campo escalar com massa σ , que passaremos a designar por H . É o bóson de Higgs e a sua massa é dada por

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} \tag{9.9}$$

Além disso existem dois campos vetoriais $W_\mu^{1,2}$ com massa

$$M_{W^1, W^2} = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \tag{9.10}$$

e outro campo vetorial Z_μ com massa

$$M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)} \tag{9.11}$$

Em vez dos campos $W_\mu^{1,2}$ é usual introduzir um campo vetorial complexo $W_\mu^\pm$ através das relações

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad ; \quad W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \tag{9.12}$$

Então a massa deste campo será

$$M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \quad (9.13)$$

Comparando a Eq. (9.13) com a Eq. (9.11) e usando a definição 9.8 obtemos uma relação importante entre as massas do W e do Z

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad (9.14)$$

Finalmente o outro campo vetorial A_μ não tem massa

$$M_A = 0 \quad (9.15)$$

Vemos assim que o campo A_μ deve ser identificado com o fóton. Esta identificação permite eliminar uma das constantes g e g' (ou equivalentemente g e θ_W) em termos da carga elétrica que corresponde ao gerador conservado

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (9.16)$$

Para isso escrevemos a derivada covariante em termos dos campos físicos, isto é,

$$\begin{aligned} D_\mu &= \left(\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \\ &= \left[\partial_\mu + i \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \tau^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \tau^- \right. \\ &\quad \left. + ig \sin \theta_W Q A_\mu + i \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\frac{\tau_3}{2} - \sin^2 \theta_W Q \right) \right] \phi \end{aligned} \quad (9.17)$$

o que permite identificar

$$g \sin \theta_W = e \quad (9.18)$$

Como a carga elétrica é conhecida o único parâmetro a determinar é o ângulo θ_W .

9.3 As interações fracas dos léptões

A beleza das teorias de gauge é que as interações dos campos de matéria com os bósons de gauge ficam completamente determinadas pela invariância de gauge. Vimos isso já para o caso da interação com os campos de Higgs e o mesmo se passa para os férmions. De facto no final do capítulo 6, já dissemos que forma devia ter o lagrangeano de qualquer férmion para a teoria $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Este era dado pela Eq. (6.69), da qual reproduzimos aqui a parte dos férmions (os campos de gauge já foram discutidos na secção anterior). Obtemos

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f (i \not{D} - m) \Psi_f \quad (9.19)$$

onde

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + igW_\mu^a \Omega^a + ig'Y B_\mu) \Psi \quad (9.20)$$

onde as matrizes Ω^a são as apropriadas para a representação em que os fermiões se encontrem. Temos portanto, antes de escrever as interações, descobrir quais as representações de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ em que se encontram os diferentes fermiões¹.

9.3.1 As representações e números quânticos

Os leptões conhecidos distribuem-se por 3 famílias com propriedades idênticas só diferindo na sua massa. Esta repetição que se verifica experimentalmente não é explicada pela teoria, mas introduzida para estar de acordo com a fenomenologia conhecida. No seguimento falaremos somente da família do eletrão (o eletrão e o seu neutrino), mas tudo o que dissermos e aplica às famílias do muão e do tau.

Como vimos no capítulo 7, as correntes carregadas que medeiam a interação fraca (troca do $W_\mu^\pm$) são exatamente $V - A$, ou seja, nelas tomam parte somente a componente de helicidade esquerda dos leptões carregados. Para se obter isto é necessário tratar de forma diferente as duas helicidades das partículas carregadas. Assim e tendo em conta que o grupo que emerge da fenomenologia é $SU_L(2) \times U_Y(1)$, distribuímos o eletrão e o seu neutrino pelas seguintes representações de $SU_L(2)$, dito *isospin fraco*

$$E_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad ; \quad e_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} e \quad (9.21)$$

Portanto as componentes de helicidade esquerda do eletrão e do seu neutrino formam um dubleto de $SU_L(2)$, enquanto que a componente de helicidade direita do eletrão é um singlete do isospin fraco. A escolha na Eq. (9.21) determina as transformações de $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta E_L &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} E_L \\ \delta e_R &= 0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

Falta-nos então determinar as transformações sob a ação do grupo $U_Y(1)$. Estas serão em geral

$$\delta \ell = i\frac{\epsilon}{2} Y_\ell \ell \quad (9.23)$$

onde ℓ é qualquer componente de helicidade dos leptões, isto é $\ell = e_L, e_R, \nu_{eL}$, e Y_ℓ é um número, designado por *hipercarga fraca* diferente, em princípio, para cada

¹Não fizemos uma grande discussão deste ponto para os campos de Higgs, pois admitimos à partida que eles estavam em dubletos como tinha sido sugerido na discussão do mecanismo de Higgs no capítulo 8.

helicidade do leptão. Notar que isto exclui logo termos de massa para os leptões, pois estes são da forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -m (\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L) \quad (9.24)$$

e portanto não seriam invariantes nem para $SU_L(2)$, pois não é um singlete, nem para $U_Y(1)$ se as hipercargas fracas de ℓ_L e ℓ_R forem diferentes. O valor Y não é arbitrário pois o fóton deve acoplar com a corrente eletromagnética. Assim, usando as Eqs. (9.19) e (9.20), vemos que para uma dada helicidade do leptão ℓ devemos ter a seguinte interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\bar{\ell} \gamma^\mu \left[g W_\mu^3 T^3 + \frac{1}{2} g' B_\mu Y \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma^\mu \left[A_\mu \left(g \sin \theta_W T^3 + \frac{1}{2} g' \cos \theta_W Y \right) + Z_\mu \left(g \cos \theta_W T^3 - \frac{1}{2} g' \sin \theta_W Y \right) \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma_\mu \left\{ A^\mu e \left(T^3 + \frac{1}{2} Y \right) + Z^\mu \frac{g}{\cos \theta_W} \left[T^3 - \sin^2 \theta_W \left(T^3 + \frac{1}{2} Y \right) \right] \right\} \ell \quad (9.25) \end{aligned}$$

onde T^3 é o valor numérico do isospin fraco², (ver Tabela 9.1), para o leptão ℓ . Comparando a Eq. (9.25) com o que devíamos ter para a corrente eletromagnética,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}} = -eQ \bar{\ell} \gamma^\mu \ell A_\mu \quad (9.26)$$

onde $e = |e|$ e portanto Q é o valor da carga da partícula em unidades da carga do próton, obtemos então

$$Q = T^3 + \frac{1}{2} Y \quad (9.27)$$

o que determina Y .

	e_L	e_R	ν_L
T^3	$-1/2$	0	$+1/2$
Y	-1	-2	-1
Q	-1	-1	0

Table 9.1: Números quânticos para os leptões.

Esta tabela implica a seguinte forma para as derivadas covariantes,

$$D_\mu E_L = \left(\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) E_L$$

²Mais rigorosamente é o valor próprio da matriz $T^3 = \frac{\tau^3}{2}$ no dubleto E_L e zero no singlete e_R .

$$= \left[\partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \tau^+ + W_\mu^- \tau^-) + ieQ A_\mu + i \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\frac{\tau^3}{2} - \sin^2 \theta_W Q \right) Z_\mu \right] E_L$$

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu - ig' B_\mu) e_R = (\partial_\mu - ie A_\mu + ie \tan \theta_W Z_\mu) e_R \quad (9.28)$$

Das expressões anteriores é fácil obter as interações dos leptões com os campos de gauge, as chamadas correntes fracas carregada e neutra. O lagrangeano dos leptões no limite em que as massas dos leptões são nulas é

$$\mathcal{L}_{\text{leptões}} = i \bar{E}_L \not{D} E_L + i \bar{e}_R \not{D} e_R + \text{termos iguais para o } \mu \text{ e para o } \tau. \quad (9.29)$$

Usando a Eq. (9.28) podemos escrever os termos de interação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^- \quad (9.30)$$

$$- \frac{g}{4 \cos \theta_W} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e - \bar{e} \gamma^\mu (1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5) e \right] Z_\mu \quad (9.31)$$

$$- (-e) \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \quad (9.32)$$

$$= - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e W_\mu^+ - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e W_\mu^- \quad (9.33)$$

$$- \frac{g}{\cos \theta_W} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu \left(\underbrace{\frac{1}{4}}_{g_V^\nu} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{g_A^\nu} \gamma_5 \right) \nu_e \right. \quad (9.34)$$

$$\left. + \bar{e} \gamma^\mu \left(\underbrace{\left(-\frac{1}{4} + \sin^2 \theta_W \right)}_{g_V^e} - \underbrace{\left(-\frac{1}{4} \right)}_{g_A^e} \gamma_5 \right) e \right] Z_\mu - e Q_e \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \quad (9.35)$$

O termo proporcional a A_μ representa a interação eletromagnética como descrita em QED. Daremos alguns exemplos das outras interações mediadas por $W_\mu^\pm$ e Z_μ .

9.3.2 As correntes carregadas

Do lagrangeano de interação na Eq. (9.35) concluímos que os vértices relevantes são os indicados na Fig. (9.1).

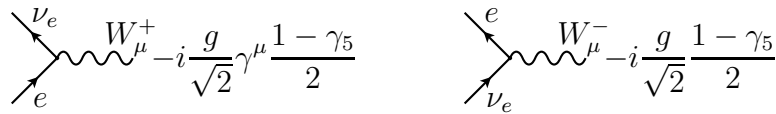


Figure 9.1: Vértices da corrente carregada.

Um exemplo típico é o decaimento do muão

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (9.36)$$

que, como vimos, corresponde ao diagrama da Fig. (9.2). O cálculo deste processo

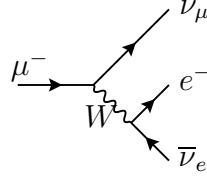


Figure 9.2: Decaimento do muão.

no limite das baixas energias dá uma amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{8M_W^2} \left[\bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e \right] \quad (9.37)$$

que coincide com a amplitude do modelo fenomenológico das interações fracas de Feynman e Gell-Mann, descrito no capítulo 7, se identificarmos

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (9.38)$$

onde G_F é a constante de Fermi. Isto permite obter uma estimativa de massa do W . De facto usando a Eq. (9.18) obtemos

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{g^2}{4\sqrt{2}G_F} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \text{ GeV} \\ &= \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} = \frac{(37.5 \text{ GeV})^2}{\sin^2 \theta_W} \end{aligned} \quad (9.39)$$

Para o presente valor $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$ obtemos

$$M_W \simeq 78 \text{ GeV} \quad (9.40)$$

Este valor está um pouco abaixo do valor experimental atualmente aceite

$$M_W = 80.37 \pm 0.17 \text{ GeV} \quad (9.41)$$

A diferença está no facto de que a Eq. (9.39) é somente válida na aproximação de Born (nível árvore). Com a introdução das correções radiativas ela passa-se a escrever

$$M_W^2 = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} \frac{1}{1 - \Delta r} \quad (9.42)$$

onde Δr encerra as correções de ordem superior. Atualmente o valor para Δr é

$$\Delta r = 0.06 \quad (9.43)$$

o que faz subir M_W para o valor para o indicado na Eq. (9.41). Uma maneira de entender estas correções é dizer que a intensidade da interação eletromagnética à escala da massa do Z é maior que no limite de baixa energia onde α é medida. Mais precisamente

$$\alpha(M_Z) = \frac{\alpha}{(1 - \Delta r)} \simeq \frac{1}{128.8} \quad (9.44)$$

9.3.3 As correntes neutras

É usual escrever a interação do Z^0 , Eq. (9.35), numa forma aplicável a qualquer férmion f . Para isso escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^Z &= - \frac{g}{\cos \theta_W} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu (g_V^\nu - g_A^\nu \gamma_5) \nu_e + \bar{e} \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] Z^\mu \\ &\quad + \text{termos iguais para os outros léptões} \\ &= - \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) \psi_f Z_\mu \end{aligned} \quad (9.45)$$

onde

$$g_V^f = \frac{1}{2} T_3^f - Q^f \sin^2 \theta_W \quad ; \quad g_A^f = \frac{1}{2} T_3^f \quad (9.46)$$

O lagrangeano na Eq. (9.45) dá então origem ao vértice da Fig. (9.3). Um exemplo

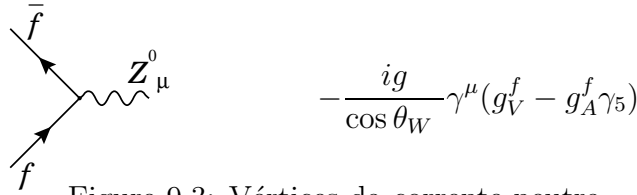


Figure 9.3: Vértices da corrente neutra

típico é a difusão elástica

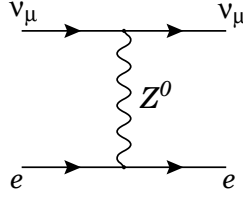
$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e \quad (9.47)$$

a que corresponde o diagrama da Fig. (9.4). A amplitude para baixas energias é

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W M_Z^2} \left[\bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_\mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] \quad (9.48)$$

Usando a Eq. (9.14) conclui-se que

$$M_W^2 = M_Z^2 \cos^2 \theta_W \quad (9.49)$$

Figure 9.4: Diagrama para o processo $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$.

e portanto as Eqs. (9.39) e (9.49) permitem escrever a Eq. (9.48) na forma

$$\mathcal{M} = \sqrt{2}G_F \left[\bar{\nu}_\mu(1 - \gamma_5)\nu_\mu \right] \left[\bar{e}\gamma_a(g_V^e - g_A^e\gamma_5)e \right] \quad (9.50)$$

Foi a descoberta experimental do processo na Eq. (9.47) e também do processo

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e \quad (9.51)$$

mediados pela corrente neutra que constituíram a primeira validação, antes da experiências do LEP, do modelo de Glashow-Weinberg-Salam.

9.4 A introdução dos quarks

As interações fracas dos hádrões podem ser explicitadas a partir das interações fracas dos quarks que são os seus constituintes. Nós faremos as seguintes hipóteses:

- i) *Os quarks aparecem em diferentes sabores. Experimentalmente necessitam-se de 6: u, d, s, c, b , e t .*
- ii) *Para cada sabor os quarks aparecem em 3 cores distintas, mas os hádrões são singletos de cor.*
- iii) *As correntes eletromagnéticas e fracas são singletos de cor e atuam somente no espaço dos sabores.*

Uma vez expostas as nossas hipóteses, que incorporam o que é conhecido experimentalmente, vamos agora especificar as propriedades de transformação dos quarks, de helicidades esquerda e direita, sob a ação do grupo $SU(2) \times U(1)$. Para isso damos os valores de T^3 e Y na Tabela 9.2. Nesta tabela d_c e s_c são as seguintes misturas de d e s

$$\begin{cases} d_c &= \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \\ s_c &= -\sin \theta_c d + \cos \theta_c s \end{cases} \quad (9.52)$$

onde θ_c é o ângulo de Cabibbo, conforme introduzido na secção 7.3.1. De facto estamos aqui a simplificar. Com a introdução dos quarks b e t , a matriz de rotação

	u_L	d_{cL}	c_L	s_{cL}	u_R	d_R	c_R	s_R	t	b
T^3	1/2	-1/2	1/2	-1/2	0	0	0	0	1/2	-1/2
Y	1/3	1/3	1/3	1/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3
Q	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3

Table 9.2: Números quânticos dos quarks.

2×2 entre d e s deve ser generalizada para uma matriz de rotação 3×3 no espaço d , s e b , a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [21, 32]. Isto será explicado mais à frente quando falarmos das massas dos quarks. Em primeira aproximação é contudo verdade que o efeito dominante é a rotação de Cabibbo, isto é, consideramos só a mistura entre d e s . Dentro desta aproximação as representações de $SU_L(2)$ são

$$\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L ; \quad \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}_L ; \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L ; \quad u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \quad (9.53)$$

Usando a Eq. (9.28) como analogia e os valores da Tabela 9.2, é fácil escrever o lagrangeano de interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{d}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u W_\mu^- \\ & + \left(\frac{2}{3}e \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e \bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) A_\mu \\ & - \frac{g}{\cos\theta_W} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \frac{1}{2} \bar{d}_{cL}\gamma^\mu d_{cL} \right) Z_\mu \\ & + \tan\theta_W \left(\frac{2}{3}e \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e \bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) Z_\mu \\ & + \begin{pmatrix} u & \rightarrow c \\ d_c & \rightarrow s_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rightarrow t \\ d_c & \rightarrow b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.54)$$

o que se escreve na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c + \bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_c + \bar{t}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \right] W_\mu^+ \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{d}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u + \bar{s}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)c + \bar{b}\gamma^\mu(1-\gamma_5)t \right] W_\mu^- \\ & + e \left[\frac{2}{3} \bar{u}\gamma^\mu u + \frac{2}{3} \bar{c}\gamma^\mu c + \frac{2}{3} \bar{t}\gamma^\mu t - \frac{1}{3} \bar{d}\gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s}\gamma^\mu s - \frac{1}{3} \bar{b}\gamma^\mu b \right] A_\mu \end{aligned}$$

$$- \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_{f=\text{quarks}} \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f Z_\mu \quad (9.55)$$

com g_V^f e g_A^f dados pela Eq. (9.46). Notar que a interação mediada pela corrente carregada tem exatamente a forma encontrada fenomenologicamente por Cabibbo para os acoplamentos semi-leptônicos $\Delta S = 0, 1$. Por outro lado a corrente neutra obedece à regra de seleção $\Delta S = 0$, isto é, o mecanismo de GIM está incorporado no modelo.

O lagrangeano da Eq. (9.55) descreve portanto as interações fracas e eletromagnéticas dos quarks, isto é as correspondentes ao grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$. As interações fortes são explicadas pela teoria de gauge da cor, isto a Cromodinâmica Quântica (QCD). Esta é a teoria de gauge do grupo $SU(3)_{\text{cor}}$. De acordo com as nossas hipóteses os geradores de $SU(3)_{\text{cor}}$ devem comutar com os de $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Portanto o grupo *fenomenológico* que descreve as interações fracas, eletromagnéticas e fortes é

$$G = SU(3)_{\text{cor}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (9.56)$$

9.5 A massa dos Leptões

Como as transformações do grupo $SU(2) \times U(1)$, (ver as Eqs. (9.22) e (9.23)), tratam de forma diferente as duas helicidades, um termo de massa para os leptões não é invariante sob a aceção de $SU(2) \times U(1)$. De facto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} &= -m_e \bar{e} e = \\ &= -m_e (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) \end{aligned} \quad (9.57)$$

e numa transformação de $U(1)$, por exemplo, obtemos

$$\delta_Y \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} = -m_e \frac{i}{2} \varepsilon (\bar{e}_R e_L - \bar{e}_L e_R) \neq 0 \quad (9.58)$$

A maneira de resolver esta dificuldade é exigir que antes da quebra espontânea de simetria os leptões não tenham massa e que seja o próprio mecanismo de quebra de simetria que dê origem à massa. Isto é possível mediante novas interações a juntar ao lagrangeano entre os leptões e os escalares, ditos campos de Higgs. Para formarmos termos de massa para os leptões carregados, temos portanto de construir primeiro um termo no lagrangeano que seja invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Façamos isso primeiro para o electrão. Com o dubleto E_L e o dubleto de Higgs ϕ podemos formar um singlete de $SU_L(2)$. Por outro lado

$$\begin{aligned} Y(E_L) &= -1 \\ Y(\phi) &= +1 \end{aligned} \quad (9.59)$$

pelo que um termo de forma $E_L^\dagger \phi$ é singlete de $SU_L(2)$ e tem hipercarga fraca

$$Y(E_L^\dagger \phi) = Y(E_L^\dagger) + Y(\phi) = +2 \quad (9.60)$$

Mas $E_L^\dagger \phi$ não é invariante de Lorentz, pois falta um spinor de helicidade direita. Notando que

$$Y(e_R) = -2 \quad (9.61)$$

concluimos que o lagrangeano invariante de Lorentz e invariante para $SU_L(2) \times U(1)$ é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e \bar{E}_L \phi e_R + \text{h.c.} \quad (9.62)$$

onde f_e é uma constante de acoplamento sem dimensões. Para vermos que este lagrangeano dá massa ao eletrão, notemos que quando se dá o fenómeno de quebra espontânea de simetria temos

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \dots \quad (9.63)$$

pelo que obtemos (tomamos f_e real)

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e v (\bar{e}_R e_L) + \dots \quad (9.64)$$

donde se conclui que

$$f_e = \frac{m_e}{v} = 2.8 \times 10^{-6} \quad (9.65)$$

A introdução do muão e do tau é agora trivial. Há contudo um detalhe que vale a pena explicar. O lagrangeano mais geral que dá massa aos leptões carregados é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j=1}^3 f_{ij} \bar{E}(i) \phi e_R(j) \quad (9.66)$$

onde usámos a notação

$$e(1) = e ; e(2) = \mu ; e(3) = \tau \quad (9.67)$$

Em geral a matriz f_{ij} não é diagonal. Para encontrarmos os estados físicos teríamos de diagonalizar a matriz de massa e rodar os campos das interações para os campos físicos. Contudo, se os neutrinos não tiverem massa é sempre possível redefinir os campos dos neutrinos e acabar com novos campos que são diagonais tanto na matriz de massa como nos termos de interação. Portanto podemos desde logo escrever 9.66 na forma diagonal

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i=1}^3 f_i \bar{E}_L(i) \phi e_R(i) \quad (9.68)$$

Para este argumento é essencial que os neutrinos não tenham massa. Como veremos no capítulo 10 não é possível utilizar o mesmo argumento para os quarks

resultando daí a matriz de Cabibbo (ou mais geralmente a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)). Hoje sabe-se que, embora muito pequena (menor que 1 eV), os neutrinos têm massa. Para explicar a massa dos neutrinos é preciso generalizar o modelo standard. Nessas generalizações aparece então o equivalente à matriz CKM. Nós neste curso introdutório vamos continuar a considerar que os neutrinos não têm massa o que é uma aproximação muito boa para as experiências nos aceleradores.

9.6 Simple Examples

9.6.1 Decay $Z \rightarrow f\bar{f}$

After this introduction and knowing all the Feynman rules needed for tree level calculations in the electroweak sector of the standard model we are in conditions of giving a first example. Consider then the decay of the Z boson,

$$Z^0 \rightarrow f \bar{f} \quad (9.69)$$

where f is any standard model fermion with the exception of the top quark, because this particle has a mass $m_t \simeq 172.9$ GeV [33] and therefore $m_t > M_Z$ which means that the Z boson can not decay in $t\bar{t}$. The Feynman diagram is given in Fig. 9.5.

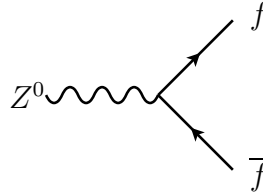


Figure 9.5: Z decay into $f\bar{f}$.

Applying the Feynman rules we get for the amplitude

$$\mathcal{M} = g_Z \epsilon_\mu(k, \lambda) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) v(p_4) \quad (9.70)$$

where we have defined the shorthand notation,

$$g_Z = \frac{g}{\cos \theta_W} . \quad (9.71)$$

The decay width is given by the general formula,

$$\Gamma = \int \frac{1}{2M_Z} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle (2\pi)^4 \delta^4(k - p_3 - p_4) \prod_{i=3}^4 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} . \quad (9.72)$$

In order to simplify matters and also because it is a very good approximation, ($M_Z \gg m_f$), we will neglect all the fermion masses. In the rest frame of the Z^0 we get easily

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{M_Z} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \quad (9.73)$$

and we only need to evaluate the square of the amplitude averaged over spins and polarizations. We will neglect the fermion masses and use the techniques of the helicity amplitudes explained in Chapter 5. The Z boson is a spin 1 particle with mass, and therefore has three polarizations. Two of these, called transversal polarizations, correspond to the polarization states of the photon ($S_z = \pm 1$ or $h = \pm 1$) and the third one, called longitudinal polarization, corresponds to $S_z = 0$. In the rest frame of the Z the polarization vectors for these three cases can be written as

$$\begin{aligned} \epsilon_+^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), & S_z = +1, \quad h = +1 \\ \epsilon_-^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), & S_z = -1, \quad h = -1 \\ \epsilon_L^\mu &= (0, 0, 0, 1), & S_z = 0, \quad h = 0 \end{aligned} \quad (9.74)$$

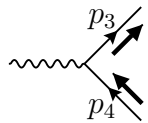
On the other hand we can write

$$\begin{aligned} g_V^f - g_A^f \gamma_5 &= (g_V^f - g_A^f \gamma_5) (P_L + P_R) \\ &= (g_V^f + g_A^f) P_L + (g_V^f - g_A^f) P_R \equiv g_L^f P_L + g_R^f P_R \end{aligned} \quad (9.75)$$

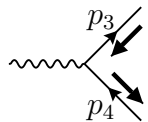
with

$$g_L^f \equiv g_V^f + g_A^f, \quad g_R^f \equiv g_V^f - g_A^f \quad (9.76)$$

As in the massless limit chirality equals helicity, this means that we can have only two possible helicity combinations,



$J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, i, \sin \theta) \quad (9.77)$



$J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (9.78)$

We therefore obtain ($\sqrt{s} = M_Z$)

$$\mathcal{M}(+; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_+ \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \cos \theta) \quad (9.79)$$

$$\mathcal{M}(-; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_- \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta) \quad (9.80)$$

$$\mathcal{M}(L; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_L \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \sin \theta \quad (9.81)$$

$$\mathcal{M}(+; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_+ \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = -g_Z g_L^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta) \quad (9.82)$$

$$\mathcal{M}(-; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_- \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = -g_Z g_L^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \cos \theta) \quad (9.83)$$

$$\mathcal{M}(L; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_L \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f M_Z \sin \theta \quad (9.84)$$

These angular distributions are shown in Fig. 9.6 for the case of the P_R operator in Eq. (9.75). These angular distributions can be easily understood using the results

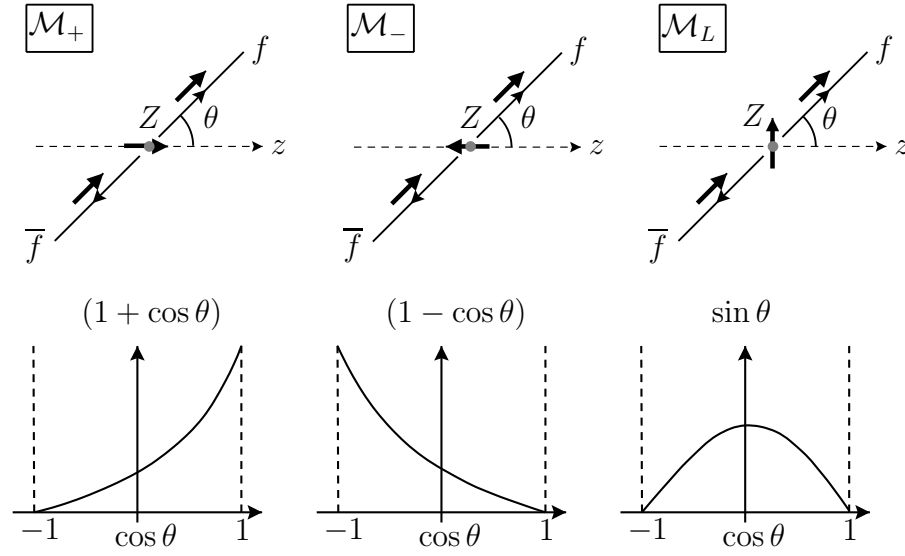


Figure 9.6: Angular distributions for the P_R case.

of Problem 9.1 for eigenstates of spin 1 in an arbitrary direction. Choosing, without loss of generality the plane $\phi = 0$, we have in the basis where S_z is diagonal

$$|1, 1\rangle_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \end{bmatrix}, \quad |1, 0\rangle_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad |1, -1\rangle_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (9.85)$$

we immediately see how the eigenstates of spin 1 along the z axis project into the state $|1, 1\rangle_\theta$ with coefficients proportional to $(1 + \cos \theta)$, $\sin \theta$ and $(1 - \cos \theta)$ for the states $|1, 1\rangle_z$, $|1, 0\rangle_z$ and $|1, -1\rangle_z$, respectively.

Therefore we get for the sum over spins,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{3} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (9.86)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} [|\mathcal{M}(+; \uparrow, \downarrow)|^2 + |\mathcal{M}(-; \uparrow, \downarrow)|^2 + |\mathcal{M}(L; \uparrow, \downarrow)|^2 \\
&\quad + |\mathcal{M}(+; \downarrow, \uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(-; \downarrow, \uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(L; \downarrow, \uparrow)|^2] \\
&= \frac{2}{3} g_Z^2 (g_R^{f2} + g_L^{f2}) \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 M_Z^2 [g_V^{f2} + g_A^{f2}]
\end{aligned} \tag{9.87}$$

For the total width we get (the integration in $d\Omega$ gives 4π)

$$\Gamma = \frac{M_Z}{12\pi} \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 [g_V^{f2} + g_A^{f2}] \tag{9.88}$$

This result is normally presented in terms of the Fermi constant,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 \frac{1}{8M_Z^2} \tag{9.89}$$

where we have used the standard model relation for the W and Z masses,

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \tag{9.90}$$

Therefore we get

$$\Gamma = \frac{2G_F M_Z^3}{3\sqrt{2}\pi} [g_V^{f2} + g_A^{f2}] \tag{9.91}$$

which gives, for example for electrons³

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-) \simeq 83.4 \text{ MeV} \tag{9.92}$$

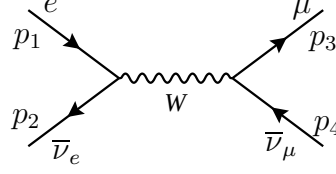
that can be compared with the PDG [33] value

$$\begin{aligned}
\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-) &= \Gamma_Z \times \text{Br}(Z \rightarrow e^+ e^-) \\
&= (2.4952 \pm 0.0023) \times 10^3 \times (3.363 \pm 0.004) \times 10^{-2} \text{ MeV} \\
&= (83.914 \pm 0.127) \text{ MeV} .
\end{aligned} \tag{9.93}$$

9.6.2 Scattering $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$

As a second example we consider the $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ scattering in the CM. It will be instructive to see how the W cures some of the problems of the current-current theory. To simplify, and in order to be able to apply the helicity techniques, we will assume that $\sqrt{s}$ is such that we can neglect all the fermion masses but not the W mass and width. In lowest order in perturbation theory we have the Feynman diagram of Fig. 9.7. The amplitude is given by,

³Notice that this just the lowest order calculation. The reason why the result is so good is that some higher order corrections are already incorporated in G_F .

Figure 9.7: scattering $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$.

$$\mathcal{M} = i \left(\frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} v(p_4) \quad (9.94)$$

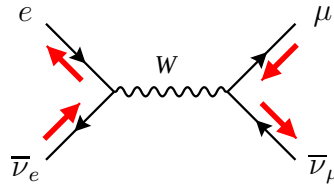
where $q = p_1 + p_2$ and Γ_W is the decay width of the W . Using the fact that we are neglecting the fermion masses the term in the numerator of the W boson propagator proportional to the momenta vanishes after application of the Dirac equation. For instance,

$$\begin{aligned} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) q_\mu &= \bar{v}(p_2) (\not{p}_1 + \not{p}_2) \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) \\ &= \bar{v}(p_2) \not{p}_2 \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) + \bar{v}(p_2) \frac{1 + \gamma_5}{2} \not{p}_1 u(p_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.95)$$

where we have used $\not{p}_1 u(p_1) = 0$ and $\bar{v}(p_2) \not{p}_2 = 0$. Making use of the relation $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$, we further simplify the expression

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= - \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(p_4) \\ &= - \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu P_L v(p_4) . \end{aligned} \quad (9.96)$$

From the structure of Eq. (9.96) we immediately see that the only non-zero helicities are those shown in Fig. 9.8 Therefore we get only one helicity combination,

Figure 9.8: Helicities for $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$.

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = - \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} \sqrt{s}(0, -1, i, 0) \cdot \sqrt{s}(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \\
&= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} s(1 + \cos\theta)
\end{aligned} \tag{9.97}$$

where we have used the usual kinematics

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1), \tag{9.98}$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin\theta, 0, \cos\theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin\theta, 0, -\cos\theta) \tag{9.99}$$

Now we obtain

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow)|^2 \\
&= 4G_F^2 \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2\Gamma_W^2} s^2(1 + \cos\theta)^2
\end{aligned} \tag{9.100}$$

We get therefore for the differential cross section in the CM frame

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\
&= \frac{G_F^2 s}{16\pi^2} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2\Gamma_W^2} (1 + \cos\theta)^2
\end{aligned} \tag{9.101}$$

After integration over the angles we get finally,

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{G_F^2 s}{\pi} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2\Gamma_W^2} \tag{9.102}$$

We can see that we have two regimes. For $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s} \ll M_W$ the cross section grows like

$$\sigma \simeq \frac{1}{3} \frac{G_F^2 s}{\pi} \tag{9.103}$$

However for values of $\sqrt{s} \simeq M_W$ the W propagator begins to be important and unitarity is not violated. For $\sqrt{s} \gg M_W$ we have

$$\sigma \simeq \frac{1}{3} \frac{G_F^2 M_W^4}{\pi s} \tag{9.104}$$

In Fig. 9.9 we show this behavior. In the left panel, for $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s} \ll M_W$, the cross section grows like s and this would violate unitarity. The W propagator corrects for this and restores unitarity as shown on the right panel. Notice the different scales on the two situations. The standard model has the correct asymptotic behavior.

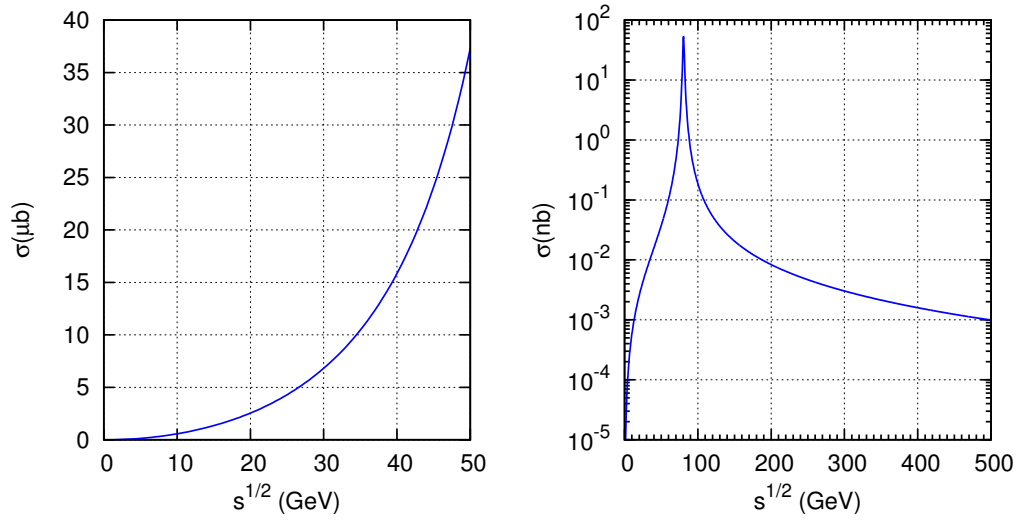


Figure 9.9: $\sigma(e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)$. Left panel: Behavior of Eq. (9.103). Right panel: The exact result, Eq. (9.104). Notice the different scales.

Problemas capítulo 9

9.1 Considere as matrizes de spin 1 na representação em que S_z é diagonal,

$$S_x = \hbar \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \hbar \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.105)$$

- a) Verify that these matrices obey the correct commutation relation for spin and angular momenta,

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad + \text{permutations} . \quad (9.106)$$

- b) Consider now spin 1 in an arbitrary direction $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Show that the eigenvalues of the matrix

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = \hbar \begin{bmatrix} \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta e^{-i\phi} & 0 \\ \sqrt{2} \sin \theta e^{i\phi} & 0 & \sqrt{2} \sin \theta e^{-i\phi} \\ 0 & \sqrt{2} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (9.107)$$

are 1, 0, -1 and the corresponding eigenvectors are,

$$|1, 1\rangle_{(\theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e^{-i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad |1, 0\rangle_{(\theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -\cos \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (9.108)$$

$$|1, -1\rangle_{(\theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e^{-i\phi} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (9.109)$$

9.2 Consider the elastic scattering

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^+ \quad (9.110)$$

- a) Consider only the W diagram first. Show that in the limit that $m_e \ll \sqrt{s} \ll M_W$ we have

$$M^{(a)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\vec{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\vec{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(1 - \gamma_5)u(e) \quad (9.111)$$

- b) Consider now the Z diagram. Show that

$$M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\vec{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\vec{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5)u(e) \quad (9.112)$$

and therefore

$$M = M^{(a)} + M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\vec{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\vec{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(C_V - C_A\gamma_5)u(e) \quad (9.113)$$

with

$$C_V = 2\sin^2\theta_W \frac{1}{2} \quad ; \quad C_A = \frac{1}{2} \quad (9.114)$$

This process allows to distinguish between a $V - a$ pure theory ($C_V = C_A = 1$) from the standard model. The experimental results confirm the neutral current structure of the standard model.

- c) Neglecting the fermion masses, determine the non-vanishing helicity amplitudes for both channels.

9.3 Consider the process $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$, that occurs via neutral current.

- a) Show that the amplitude is

$$\mathcal{M} = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(\nu)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(\nu) \bar{u}(e)\gamma_\mu(C'_V - C'_A\gamma_5)u(e) \quad (9.115)$$

with

$$C'_V = \frac{1}{2} - 2\sin^2\theta_W \quad ; \quad C'_A = \frac{1}{2} \quad (9.116)$$

while for a theory without neutral currents one would have

$$C'_V = C'_A = 0 \quad (9.117)$$

- b) Neglecting the fermion masses, determine the non-vanishing helicity amplitudes for this process.

9.4 Considere os dois decaimentos do Z^0

$$Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu} \quad (9.118)$$

$$Z^0 \rightarrow e^- e^+ . \quad (9.119)$$

Mostre que

$$\frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu})}{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^- e^+)} \simeq 2 . \quad (9.120)$$

9.5 Desprezando as massas de todos os fermiões mostre que

$$BR(Z^0 \rightarrow e^- e^+) \equiv \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^- e^+)}{\Gamma_Z} \simeq 3.4\% \quad (9.121)$$

onde $\Gamma_Z \equiv \Gamma(Z^0 \rightarrow \text{tudo})$.

9.6 Considere o processo $e^+ e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e$.

- Quais os diagramas que contribuem para esse processo ?
- Escreva a amplitude correspondente ao diagrama dominante para $\sqrt{s} \simeq M_Z$.
- Mostre que para $\sqrt{s} \simeq M_Z$ temos

$$\frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e)}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-)} \simeq 2 \quad (9.122)$$

9.7 Considere o decaimento $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$.

- Calcule a velocidade do elétron no referencial em que o W está em repouso.
- Escreva a expressão para a amplitude do processo.
- Desprezando a massa do elétron calcule a largura do decaimento. Compare com o resultado experimental $\Gamma(W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e) = 229 \text{ MeV}$.

9.8 Calcule o *branching ratio* $BR(W^- \rightarrow e^- \nu)$ definido por

$$BR(W^- \rightarrow e^- \nu) \equiv \frac{BR(W^- \rightarrow e^- \nu)}{\Gamma(W^- \rightarrow \text{tudo})} \quad (9.123)$$

onde $\Gamma(W^- \rightarrow \text{tudo}) = \Gamma_W = 2.0 \text{ GeV}$.

9.9 Quando se desprezam as massas dos leptões e se considera que a energia no CM, $\sqrt{s}$, é muito inferior às massas dos bósons W e Z , as secções eficazes para os processos da tabela seguinte

Processo	λ_i
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$	1
$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	$\frac{1}{3}$
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$	$\sigma = \frac{32}{3} [(g_V^\nu)^2 + (g_A^\nu)^2] (g_V^e)^2 + 2g_V^\nu g_A^\nu g_V^e g_A^e]$
$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$	
$\mu^- + e^+ \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_e$	
$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	

podem-se escrever na forma

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\pi} G_F^2 s$$

Mostre que isto é verdade, verificando os valores dados na tabela e preenchendo as entradas que faltam.

Chapter 10

CP Violation and the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix

10.1 A massa dos quarks

No capítulo anterior vimos como obter a massa dos léptons considerando que os neutrinos não têm massa, o que é uma boa aproximação para os processos em que estamos aqui interessados.

Consideremos agora o problema de massa dos quarks. O problema é mais complicado por duas razões. Uma que tem que ver com a impossibilidade de diagonalizar simultaneamente as matrizes de massa e as interações como foi afirmado atrás e será discutido mais à frente. A outra é mais técnica. Para percebermos o problema consideremos os quarks da primeira família

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad ; \quad u_R, d_R. \quad (10.1)$$

Se considerarmos uma interação da forma

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d \bar{Q}_L \phi d_R + \text{h.c.} \quad (10.2)$$

depois da quebra espontânea de simetria

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d v (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \dots, \quad (10.4)$$

isto é, um termo de massa para o quark d , mas não para o quark u . É fácil de ver que para o termos envolvendo d_R temos

$$Y(\bar{Q}_L \phi d_R) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 0, \quad (10.5)$$

o que assegura a invariância teste termos para $SU_L(2) \times U_Y(1)$, enquanto que para u_R temos,

$$Y(\overline{Q}_L \phi u_R) = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = +2, \quad (10.6)$$

mostrando que o termo $(\overline{Q}_L \phi u_R)$ não é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Como resolver este problema? Felizmente a solução não é muito difícil. Numa transformação de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ o dubleto transforma-se da forma seguinte

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \phi & SU_L(2) \\ \delta\phi &= i\frac{\epsilon}{2} \phi & U_Y(1). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Consideremos agora o dubleto $\tilde{\phi}$ definido por

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi^- \equiv (\phi^+)^*. \quad (10.8)$$

Vejamos agora como se transforma $\tilde{\phi}$. Para $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi^*) = i\tau_2 \left(-i\epsilon^a \frac{\tau^{a*}}{2} \phi^* \right) \\ &= \epsilon^a \tau_2 \tau^{a*} \frac{1}{2} \phi^*. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Usando agora a identidade

$$\tau_2 \tau^{a*} \tau_2 = -\tau^a, \quad (10.10)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= -\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tau_2 \phi^* = i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} (i\tau_2 \phi^*) \\ &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

isto é, transforma-se exatamente como ϕ . Mas numa transformação de $U_Y(1)$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi)^* = i\tau_2 \left(+i\frac{\epsilon}{2} \phi \right)^* \\ &= -i\frac{\epsilon}{2} (i\tau_2 \phi^*) = -i\frac{\epsilon}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

o que mostra que $\tilde{\phi}$ tem hipercarga fraca igual a -1 . Então um termo

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_u \overline{Q}_L \tilde{\phi} u_R + \text{h.c.}$$

$$= -h_u v (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \dots, \quad (10.13)$$

é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$, pois

$$Y(\bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R) = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{3} = 0, \quad (10.14)$$

e dá massa ao quark u . Precisamos portanto de ϕ para dar massa aos quarks com $T_3 = -1/2$ e de $\tilde{\phi}$ para dar massa aos quarks com $T_3 = +1/2$. Notar que se trata do mesmo dubleto, a construção de $\tilde{\phi}$ destina-se a obter uma hipercarga oposta à do ϕ . Noutras teorias, como em supersimetria ou nos modelos com dois dubletos de Higgs, este problema é resolvido usando mais do que um dubleto com hipercargas diferentes.

O termo mais geral que dá massa aos quarks é portanto

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j} h_{dij} \bar{Q}_L(i) \phi d_R(j) - \sum_{i,j} h_{uij} \bar{Q}_L(i) \tilde{\phi} u_R(j), \quad (10.15)$$

numa notação óbvia. Vemos assim que há uma matriz de massa para os quarks de baixo, e outra para os quarks de cima. É possível diagonalizar estas matrizes e passar o efeito para os termos de interação. Os termos de corrente neutra continuarão diagonais, mas nos termos de corrente carregada tal não acontecerá. De facto a corrente neutra liga os quarks de cima com os quarks de cima e os de baixo com os de baixo, e portanto teremos sempre termos diagonais se usarmos a unitariedade das matrizes. Isso não acontece para as correntes carregadas pois elas misturam os quarks de cima com os de baixo que são diagonalizados de maneira diferente. O resultado é uma matriz de mistura, que convencionalmente se coloca nos quarks de baixo, a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [21, 32]. Como há três famílias de quarks trata-se duma matriz 3×3 unitária. Para vermos o mecanismo, consideremos primeiro o modelo só com duas famílias de quarks deixando para uma secção seguinte o estudo do caso geral. Então o lagrangeano de massa dos quarks pode ser escrito

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} = & -h_{u1} v \bar{u} u - h_{u2} v \bar{c} c - h_{d1} v \bar{d}_c d_c - h_{d2} v \bar{s}_c s_c \\ & - h_{d12} v (\bar{d}_c s_c + \bar{s}_c d_c), \end{aligned} \quad (10.16)$$

onde se usou a liberdade referida atrás para escrever os quarks u e c diretamente na forma diagonal. Olhemos para a matriz dos quarks de baixo. Escrevemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d}_c \quad \bar{s}_c) \begin{pmatrix} h_{d1} v & h_{d12} v \\ h_{d12} v & h_{d2} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Agora o ângulo de Cabibbo pode ser facilmente compreendido. De facto do ponto de vista das interações fortes, a matriz de massa deve ser diagonal nos quarks d e s .

Então se introduzirmos

$$\begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

na Eq. (10.17) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.19)$$

onde

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{12} &= \sin \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{21} &= + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c) \\ m_{22} &= \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Como queremos que a matriz seja diagonal,

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.21)$$

devemos impor as condições $m_{12} = m_{21} = 0$ e $m_{11} = m_d, m_{22} = m_s$. A condição $m_{12} = m_{21} = 0$ tem como solução

$$\tan(2\theta_c) = \frac{2h_{d12}}{h_{d2} - h_{d1}}, \quad (10.22)$$

isto é relaciona os parâmetros do lagrangeano com o ângulo de Cabibbo. É usual em vez de usar os parâmetros h_{uij} e h_{dij} , usar os valores experimentais das massas dos quarks e os elementos da matriz de rotação, isto é os ângulos. Esta para o caso de três famílias de quarks é a matriz CKM que vamos escrever com mais detalhe numa secção seguinte.

10.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

10.2.1 A simetria CP

Como vimos as interações fracas não são invariantes para a transformação de paridade P. Por exemplo no decaimento

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad (10.23)$$

os múons têm sempre a helicidade esquerda. Também não são invariantes para a operação de conjugação de carga (transforma partícula em antipartícula), porque então a reação

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad (10.24)$$

viria sempre com múons esquerdos e de facto eles têm helicidade direita. No entanto o produto das duas transformações, CP, parece ser uma boa simetria pois transforma o antimúon esquerdo num múon direito que parece ser o que observamos.

Gell-Mann e Pais mostraram que a invariância de CP tinha implicações estranhas para os kaões neutros. Eles observaram que o K^0 com estranheza +1 pode-se transformar na sua antipartícula $\bar{K}^0$ com estranheza -1 através dos diagramas de segunda ordem representados na Fig. 10.1.

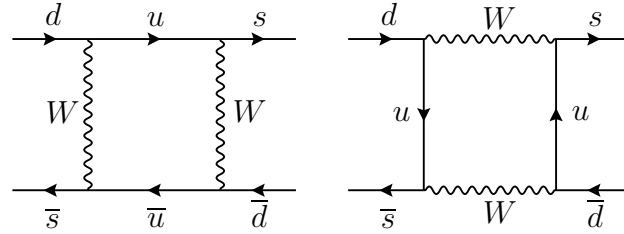


Figure 10.1: Diagramas para a oscilação $K^0 - \bar{K}^0$. Há ainda os diagramas com u trocado com c e t através da mistura na matriz CKM.

Como resultado, as partículas que observamos no laboratório não são o K^0 , $\bar{K}^0$ mas alguma linear combinação dos dois. Podemos formar estados próprios de CP da forma seguinte. Como os kaões são pseudo-escalares devemos ter

$$P |K^0\rangle = -|K^0\rangle, \quad P |\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle. \quad (10.25)$$

Por outro lado sob a ação da conjugação de carga temos,

$$C |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad C |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle, \quad (10.26)$$

e obtemos portanto

$$CP |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad CP |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle. \quad (10.27)$$

Podemos portanto formar estados próprios de CP, corretamente normalizados, através de

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad (10.28)$$

com os valores próprios de CP

$$CP |K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP |K_2\rangle = -|K_2\rangle. \quad (10.29)$$

Se admitirmos que CP é conservado nas interações fracas, então K_1 só pode decair num estado com $CP = +1$ e K_2 num estado com $CP = -1$. Os kaões decaem em dois ou três piões. O estado de dois piões tem $P = +1$ e $C = +1$ enquanto o estado fundamental de três piões tem $P = -1$ mas também $C = +1$. Em conclusão, devemos ter

$$K_1 \rightarrow 2\pi, \quad K_2 \rightarrow 3\pi. \quad (10.30)$$

O decaimento em dois piões é mais rápido pois o espaço de fase é maior. Portanto, se começarmos com um feixe de K^0

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1\rangle + |K_2\rangle), \quad (10.31)$$

a componente K_1 decairá rapidamente e ficará somente um feixe quase puro de K_2 . Esta previsão foi confirmada experimentalmente, com

$$\tau_1 = 0.895 \times 10^{-10} \text{ s}, \quad \tau_2 = 5.11 \times 10^{-8} \text{ s}. \quad (10.32)$$

Notar que K_1 e K_2 não são antipartículas um do outro mas antes as suas próprias antipartículas com $C = -1$ para K_1 e $C = +1$ para K_2 . Têm mesmo uma diferença de massa,

$$m_2 - m_1 = 3.48 \times 10^{-6} \text{ eV}. \quad (10.33)$$

Em resumo, os kaões são produzidos nas interações fortes em estados próprios da estranheza, K_0 e $\bar{K}^0$ mas decaem através das interações fracas em estado próprios de CP, K_1 e K_2 .

10.2.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

Os kaões neutros são um laboratório perfeito para testarmos se as interações fracas são de facto invariantes para o produto CP. Usando um feixe suficientemente longo sabemos que temos só kaões do tipo que têm um tempo de vida longa. Se observarmos que estes decaem em 2π sabemos que CP é violada. Esta experiência, descrita na Fig. 10.2, foi feita por Christenson, Cronin, Fitch e Turlay [34], em 1964 e eles descobriram uma fração de 1 em 500 que decaíam em 2π . O produto CP não é conservado nas interações fracas e o kaão que tem um tempo de vida longo não é um estado perfeito de CP, deve ter uma pequena mistura de K_1 . Designamos esse estado por K_L

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (\epsilon |K_1\rangle + |K_2\rangle). \quad (10.34)$$

De igual modo podemos definir o estado ortogonal que é predominantemente K_1 e decai rapidamente por

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1\rangle + \epsilon |K_2\rangle). \quad (10.35)$$

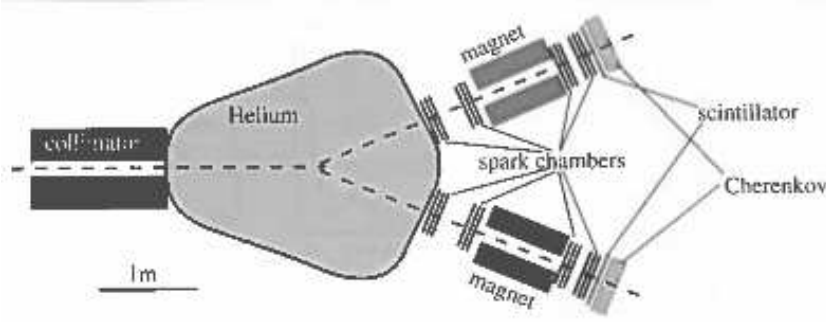


Figure 10.2: Experiência de Cronin e Fitch

O parâmetro ϵ mede o desvio do estado K_L em relação ao estado de CP, isto é, mede a violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$. Para a determinação experimental, é usual definir a razão das amplitudes

$$\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}|e^{i\phi^{+-}} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\mathcal{M}(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}. \quad (10.36)$$

Obtemos então

$$|\epsilon|^2 \equiv |\eta_{+-}|^2 = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}. \quad (10.37)$$

O valor experimental atual é $\epsilon = 2.24 \times 10^{-3}$.

A experiência de Cronin-Fitch, como veio a ser conhecida depois da atribuição do prémio Nobel a estes dois físicos em 1980, destruiu a última esperança para uma simetria exata que envolvesse a Paridade¹. Mas as coisas ficaram ainda piores quando se olhou para os decaimentos semi-leptónicos do K_L . De facto, cerca de 41% das vezes o K_L decai semileptonicamente nos canais,

$$a) K_L \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e; \quad b) K_L \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e. \quad (10.38)$$

Agora notemos que a operação de CP leva o estado final em a) para o estado final em b) e vice-versa. Então se K_L fosse um estado próprio de CP, os dois decaimentos deviam ocorrer exatamente com as mesmas probabilidades. Experimentalmente verificou-se que isso não acontecia, e que o decaimento do K_L em positrão (ou leptão carregado positivamente) ocorria mais frequentemente, com uma diferença fracional, δ_L , definida por

$$\delta_L = \frac{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) - N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) + N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} \simeq 3.3 \times 10^{-3}, \quad (10.39)$$

onde $l = e, \mu$. Há assim uma distinção absoluta entre matéria e anti-matéria. Podemos dizer que o positrão é o leptão que ocorre mais frequentemente no decaimento do K_L . De facto esta distinção entre matéria e anti-matéria é mais profunda e permite pensar em compreender porque somos feitos de matéria e não de anti-matéria.

¹Isto não é rigorosamente verdade, pois acredita-se que o teorema TCP seja válido e que o produto das três transformações seja uma invariância da teoria quântica.

10.2.3 Violação de CP noutros sistemas

Embora o sistema dos mesões K^0 tenha sido, durante mais de 30 anos, o único sistema a evidenciar a violação de CP, tal não era de esperar do ponto de vista teórico, como será explicado na secção seguinte. No ano 2000 a situação mudou drasticamente pois foi observada pelas colaborações BaBar no SLAC (Stanford, Estados Unidos) e Belle no KEK (Japão), pela primeira vez a violação de CP no sistema dos mesões B^0 ($d\bar{b}$). Essa violação de CP foi observada, medindo a assimetria

$$A = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)}{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)} = 0.679 \pm 0.020 \quad (10.40)$$

que seria zero se CP fosse conservada. O resultado de $\sim 70\%$ para esta assimetria mostra que a violação de CP é intrinsecamente grande. Perceberemos na secção seguinte por que razão em muitos casos os resultados experimentais são pequenos. Estes resultados são muito importantes pois ajudam a determinar os parâmetros da mistura dos quarks, descritos pela matriz CKM como veremos na secção seguinte. A importância destas medidas justifica que no LHC, presentemente em operação no CERN, haja uma experiência dedicada à física dos mesões B , a colaboração LHCb, que tem produzido resultados notáveis que ajudam a nossa compreensão da física da mistura dos quarks.

Finalmente, é de esperar também resultados para os mesões D^0 ($c\bar{u}$). Contudo as previsões teóricas do modelo standard são pequenas para este sistema. Os resultados de LHCb não indicam, até ao momento, qualquer indicação de violação de CP nos mesões D^0 . Certamente que este assunto ficará resolvido com mais dados na nova fase do LHC.

10.3 Violação de CP e a matriz CKM

10.3.1 A matriz CKM

A generalização da matriz de Cabibbo para o caso de três gerações de quarks é a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [21, 32] que passamos a explicar. Começemos por recordar as partes do lagrangeano do modelo standard em que aparecem os quarks. Escrevemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}}, \quad (10.41)$$

onde os diferentes lagrangeanos, corrente carregada, corrente neutra e de Yukawa, são,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d'_i \right] W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{d}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u'_i \right] W_\mu^- \quad (10.42)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} = e \left[\frac{2}{3} \bar{u}'_i \gamma^\mu u'_i - \frac{1}{3} \bar{d}'_i \gamma^\mu d'_i \right] A_\mu - \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{q}'_i \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) q'_i Z_\mu \quad (10.43)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}} = -h_{ij}^d \bar{Q}'_{Li} \Phi d'_{Rj} - h_{ij}^u \bar{Q}'_{Li} \tilde{\Phi} u'_{Rj} + \text{h.c.}, \quad (10.44)$$

onde os índices $i, j = 1, 2, 3$ são de família (ou geração), isto é, por exemplo, $d'_i = (d', s', b')$ e $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$ como anteriormente. A notação u'_i, d'_i quer dizer que estes estados não são os estados de massas mas aqueles que resultam da escrita das derivadas covariantes. Para simplificar escrevemos ainda $q'_i = (u'_i, d'_i)$.

Quando se dá a quebra espontânea de simetria, substituímos

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (10.45)$$

e obtemos a partir do lagrangeano de Yukawa o lagrangeano de massa para os quarks,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{massa}} = -\bar{d}'_L M^d d'_{Rj} - \bar{u}'_L M^u u'_{Rj} + \text{h.c.} \quad (10.46)$$

onde $M_{ij}^{d,u} = h_{ij}^{d,u} v$ e passámos a usar uma notação matricial no espaço das famílias. Em geral as matrizes $M^{d,u}$ são matrizes arbitrárias complexas. Não sendo estas matrizes diagonais, os quarks u'_i, d'_i não são os estados próprios de massa. Para os obter temos de diagonalizar as matrizes de massa, o que é sempre possível. Na verdade uma matriz arbitrária complexa é diagonalizada através de duas matrizes unitárias diferentes à esquerda e direita. Isto quer dizer que devemos ter,

$$U_L^u M^u U_R^{u\dagger} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t), \quad U_L^d M^d U_R^{d\dagger} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b). \quad (10.47)$$

Isto é equivalente a rodar os estados de acordo com

$$d_L = U_L^d d'_L, \quad d_R = U_R^d d'_R, \quad u_L = U_L^u d'_L, \quad u_R = U_R^u u'_R. \quad (10.48)$$

Depois de diagonalizar as matrizes de massa, temos de aplicar a rotação inversa nos lagrangeanos de interação, isto é

$$d'_L = U_L^{d\dagger} d_L, \quad d'_R = U_R^{d\dagger} d_R, \quad u'_L = U_L^{u\dagger} u_L, \quad u'_R = U_R^{u\dagger} u_R. \quad (10.49)$$

Olhemos primeiro para a corrente neutra. Um termo genérico é da forma, tomando os quarks down como exemplo,

$$\bar{d}'_L \gamma^\mu d'_L + \bar{d}'_R \gamma^\mu d'_R = \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu d_R, \quad (10.50)$$

onde usámos $U_L^d U_L^{d\dagger} = U_R^d U_R^{d\dagger} = 1$ devido à unitariedade das matrizes. Para os quarks u obtemos resultados semelhantes. Assim vemos que para as correntes neutras o resultado final em termos dos estados de massa é o mesmo que na Eq. (10.43), basta fazer $q' \rightarrow q$. No entanto para as correntes carregadas tal não vai ser possível pois elas misturam quarks do tipo u com quarks do tipo d . Talvez a maneira mais simples de ver isto é pensar no dubleto

$$Q'_L = \begin{bmatrix} u'_L \\ d'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L^{u\dagger} u_L \\ U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix} = U_L^{u\dagger} \begin{bmatrix} u_L \\ U_L^u U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

o que mostra o não alinhamento entre a diagonalização das matrizes de massa e as interações. Para ver a consequência escrevemos os termos relevantes do lagrangeano das correntes carregadas, Eq. (10.42). Obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}'_L \gamma^\mu d'_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L \gamma^\mu u'_L W_\mu^-) \quad (10.52)$$

$$= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}} d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}}^\dagger u_L W_\mu^- \right), \quad (10.53)$$

onde se definiu

$$V_{\text{CKM}} \equiv U_L^u U_L^{d\dagger}. \quad (10.54)$$

Como as matrizes de diagonalização são diferentes, a $V_{\text{CKM}} \neq 1$.

10.3.2 Contagem de parâmetros na matriz CKM

Como vimos, a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [21,32] liga os estados próprios de sabor com os estados próprios de massa. Tradicionalmente esta mistura é descrita nos quarks do tipo *down*, isto é com $T^3 = -1/2$ e que se costuma escrever na forma,

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Esta matriz é uma matriz 3×3 e unitária pela maneira como foi construída. Em geral uma matriz complexa $N \times N$ terá $2N^2$ parâmetros reais. Contudo as condições de unitariedade $VV^\dagger = 1$ impõem N^2 condições reduzindo o número de parâmetros independentes a N^2 . No entanto podemos ainda absorver $2N - 1$ fases nos campos dos $2N$ quarks deixando uma fase global arbitrária. Isto reduz o número de parâmetros para

$$N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2. \quad (10.56)$$

Destes, $N(N - 1)/2$ correspondem a ângulos, (para $N = 2$ temos só um ângulo o ângulo de Cabibbo) e portanto os outros parâmetros devem ser fases num número dado por

$$\# \text{ fases} = (N - 1)^2 - \frac{N(N - 1)}{2} = \frac{(N - 1)(N - 2)}{2}. \quad (10.57)$$

Vemos assim que para ter uma fase complexa, necessária para explicar a violação de CP, precisamos de $N = 3$. Este argumento foi apresentado antes da descoberta da terceira família. Obtemos portanto para $N = 3$, três ângulos e uma fase independentes, e portanto 4 parâmetros físicos.

10.3.3 Parametrizações da matriz CKM

Há várias parametrizações da matriz CKM. As duas mais utilizadas são a do PDG e de Wolfenstein. A parametrização do PDG usa rotações em três planos, escrevendo

$$\begin{aligned}
 V_{\text{CKM}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}, \quad (10.58)
 \end{aligned}$$

onde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e δ é uma fase responsável pela violação de CP no modelo standard. Como $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$ é conveniente definir esta hierarquia numa forma explícita, ainda que aproximada. É o que faz a parametrização de Wolfenstein, onde

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (10.59)$$

A correspondência entre as duas parametrizações é

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{i\delta} = A\lambda^3(\rho + i\eta). \quad (10.60)$$

Os valores experimentais atuais são aproximadamente,

$$\lambda \simeq 0.223, \quad A \simeq 0.811, \quad \rho \simeq 0.131, \quad \eta \simeq 0.345 \quad (10.61)$$

$$s_{12} = \lambda \simeq 0.223, \quad s_{23} \simeq 0.041, \quad s_{13} \simeq 0.003, \quad \delta \simeq 1.2079 = 69.2^\circ. \quad (10.62)$$

Notar que os efeitos de CP são pequenos, não por a fase ser pequena, mas por vir multiplicada por s_{13} que é um número muito pequeno. Uma ideia melhor da hierarquia na matriz CKM, pode ser obtida se considerarmos os módulos dos elementos (tomamos o valor central, sem considerar os erros, ver PDG [33] para resultados mais precisos)

$$V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} 0.97427 & 0.22534 & 0.00351 \\ 0.22520 & 0.97344 & 0.0412 \\ 0.00867 & 0.0404 & 0.999146 \end{bmatrix}. \quad (10.63)$$

Vemos que os elementos são cada vez mais pequenos à medida que nos afastamos da diagonal e também da esquerda para a direita. Esta observação está na base da parametrização de Wolfenstein.

10.3.4 Confrontado a experiência com a matriz CKM

Neste momento todos os resultados experimentais conhecidos podem ser explicados com a matriz CKM, definida na secção anterior. Em particular os processos com violação de CP, tanto no setor dos mesões $K^0 = (d\bar{s})$ mas também nos mesões $D^0 = (c\bar{u})$ e $B^0 = (d\bar{b})$, são descritos corretamente pela matriz CKM. Neste curso elementar não prosseguiremos com os detalhes desta verificação. Na Fig. 10.3 mostramos o resumo dos resultados recentes nos vários processos. Vemos que há um acordo completo entre todos os dados experimentais e os parâmetros da matriz CKM que são assim obtidos duma maneira consistente. Notar em particular o vértice do triângulo que mostra esse acordo. Nos eixos estão os parâmetros de Wolfenstein ρ e η modificados ligeiramente. Ver PDG para uma discussão mais detalhada do porquê desta modificação bem como do significado dos ângulos α, β e γ .

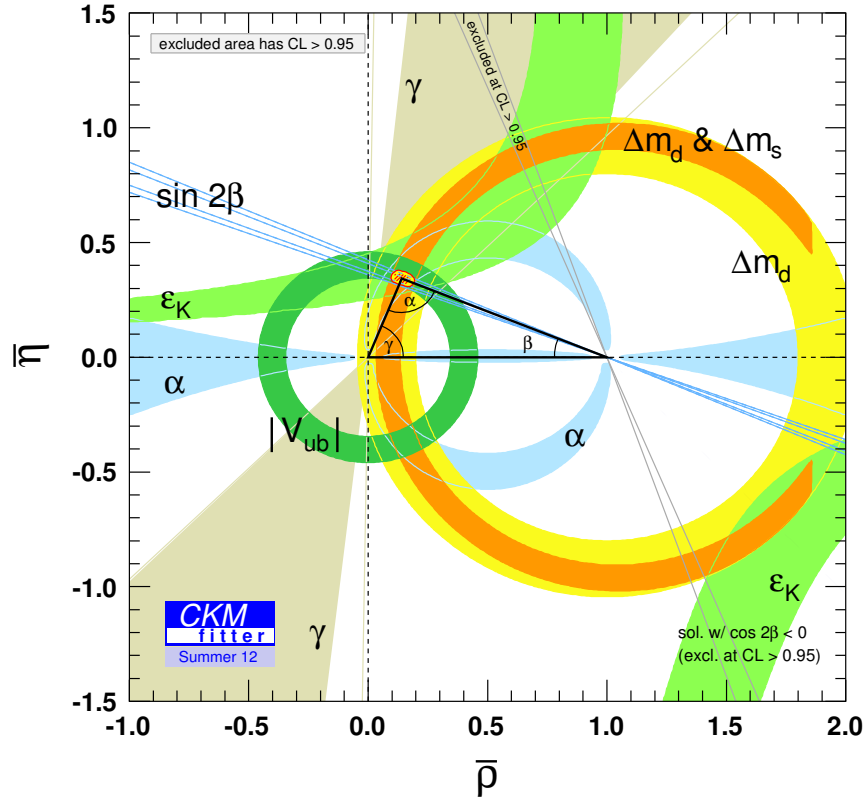


Figure 10.3: Resultados experimentais em confronto com a matriz CKM. Tirado da página da colaboração CKM-fitter.

Problemas capítulo 10

10.1 Verifique que obtém a Eq. (10.20) e que as condições $m_{12} = m_{21} = 0$ conduzem à Eq. (10.22).

10.2 Mostrar que se obtém a matriz da parametrização do PDG, multiplicando as três matrizes na Eq. (10.58).

10.3 Mostrar que a matriz CKM na representação do PDG, Eq. (10.58), é unitária.

10.4 Mostrar que a matriz CKM na representação de Wolfenstein Eq. (10.59), é unitária até à ordem indicada.

Appendix A

How to do Calculations in Particle Physics

A.1 Introduction

In particle physics most of the experimental results are either cross sections or decay widths. So it is very important to learn how to go from theory (the Lagrangian) to these quantities to be able to compare with the experiment.

In this course we have learned how to do these calculations in some cases. As these are dispersed in various chapters it might be useful to collect here all the information. We follow the conventions, methods and notation of Chapters 2, 4, 7 and 9 and of the recommended book for this course by Mark Thomson [1].

A.2 Fermi Golden Rule

The decay rates and cross sections are given in Eq. (2.29) for the decays

$$\Gamma = \frac{1}{2m_1} S \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \quad (\text{A.1})$$

and in Eq. (2.55) for the cross section

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} S \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \quad (\text{A.2})$$

A.3 The CM Reference Frame

In this course we have considered only decays $1 \rightarrow 2 + 3$ in the rest frame of the decaying particle and cross sections for processes of the type

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (\text{A.3})$$

in the CM frame, that is with the kinematics,

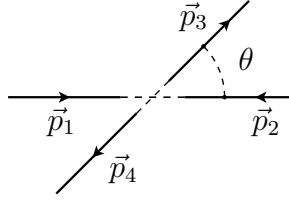


Figure A.1: CM kinematics

In this case Eqs. (A.1) and (A.2) simplify and we get (see Eq. (2.42) and Eq. (2.67)),

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi m_1^2} |\vec{p}_2| |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{A.4})$$

and

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{S}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{A.5})$$

where $|\vec{p}_2|, |\vec{p}_1|, |\vec{p}_3|$ can be easily obtained in the CM frame, see for instance, Eq. (2.75). In these equations the factor S is a symmetry factor for identical particles in the final state. For instance, for the decay $A \rightarrow B + B$ it would be

$$S = \frac{1}{2!} \quad (\text{A.6})$$

A.4 Feynman Rules

These are the rules to write the invariant amplitude $\mathcal{M}$. We will not repeat them here, they were given for the model ABC with scalars fields in Sec. 2.5 and for a model with spin 1/2 particles, like in QED, in Sec. 5.4. We will give here only the Feynman rules for the propagators and vertices of the standard model that we will use in our calculations. A complete description of the Feynman rules for the standard model can be found in Romão and Silva [35].

A.4.1 Propagators

$$\mu \text{---}\gamma\text{---}\nu \quad -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\mu \text{---}W\text{---}\nu \quad -i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}}{k^2 - M_W^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\mu \begin{array}{c} Z \\ \text{~~~~~} \end{array} \nu \quad -i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2}}{k^2 - M_Z^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} \quad \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{array}{c} H \\ \text{-----} \\ p \end{array} \quad \frac{i}{p^2 - M_H^2} \quad (\text{A.11})$$

A.4.2 Vertices

Charged Current

$$\begin{array}{c} \psi_{u,d} \\ \nearrow \\ \psi_{d,u} \end{array} \begin{array}{c} W^\pm_\mu \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad -i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (\text{A.12})$$

Neutral Current

$$\begin{array}{c} \psi_f \\ \nearrow \\ \psi_f \end{array} \begin{array}{c} Z_\mu \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad -i \frac{g}{\cos \theta_W} \gamma_\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) \quad \begin{array}{c} \psi_f \\ \nearrow \\ \psi_f \end{array} \begin{array}{c} A_\mu \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad -ie Q_f \gamma_\mu \quad (\text{A.13})$$

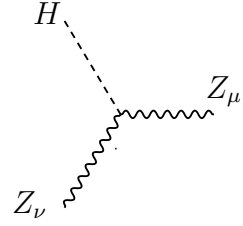
where

$$g_V^f = \frac{1}{2} T_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W, \quad g_A^f = \frac{1}{2} T_f^3. \quad (\text{A.14})$$

Higgs Interactions

$$\begin{array}{c} f \\ \nearrow \\ f \end{array} \begin{array}{c} H \\ \text{-----} \end{array} \quad -i \frac{g}{2} \frac{m_f}{M_W} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{array}{c} H \\ \text{-----} \\ W_\nu^\mp \end{array} \begin{array}{c} W_\mu^\pm \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad ig M_W g_{\mu\nu} \quad (\text{A.16})$$

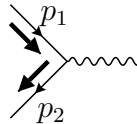


$$i \frac{g}{\cos \theta_W} M_Z g_{\mu\nu} \quad (\text{A.17})$$

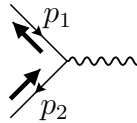
A.5 Results for the Helicity Currents

When we have particles with spin we have to sum over all the polarizations in the final state and take the average in the initial state (for unpolarized beams). The general procedure to do this is known as the Casimir's trick and leads to the calculation of traces of the Dirac γ matrices. This lies beyond the scope of this course¹. Here we just discuss a particular case when all fermions (spin 1/2) are massless. In this case we have shown in Sec. 5.6 that we can use helicity amplitudes to evaluate the fermionic currents. We summarize here the results. In the expressions below, θ is the angle between particle 3 and 1 in the CM as given in Fig. A.1.

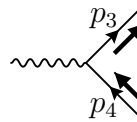
A.5.1 s-channel



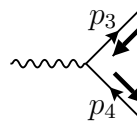
$$J_{u_1 v_2}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -1, -i, 0) \quad (\text{A.18})$$



$$J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -1, i, 0) \quad (\text{A.19})$$



$$J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, i, \sin \theta) \quad (\text{A.20})$$



$$J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (\text{A.21})$$

¹For a complete discussion of this general case see Ref. [3].

A.5.2 t-channel

$$\frac{\overrightarrow{p_1}}{\overrightarrow{\xi}} \overrightarrow{p_3} \quad J_{u_1 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\overleftarrow{p_1}}{\overleftarrow{\xi}} \overleftarrow{p_3} \quad J_{u_1 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\overrightarrow{p_1}}{\overrightarrow{\xi}} \overrightarrow{p_3} \quad J_{v_1 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\overleftarrow{p_1}}{\overleftarrow{\xi}} \overleftarrow{p_3} \quad J_{v_1 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\overrightarrow{p_2}}{\overrightarrow{\xi}} \overrightarrow{p_4} \quad J_{u_2 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\overleftarrow{p_2}}{\overleftarrow{\xi}} \overleftarrow{p_4} \quad J_{u_2 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\overrightarrow{p_2}}{\overrightarrow{\xi}} \overrightarrow{p_4} \quad J_{v_2 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\overleftarrow{p_2}}{\overleftarrow{\xi}} \overleftarrow{p_4} \quad J_{v_2 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.29})$$

A.5.3 u-channel

$$J_{u_1 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$J_{u_1 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$J_{u_2 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$J_{u_2 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.33})$$

$$J_{v_1 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$J_{v_1 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$J_{v_2 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$J_{v_2 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.37})$$

A.6 Simple Examples

In this section we collect all the calculations that we did in Chapters 4, 7 and 9. We will not repeat the discussion just the calculations.

A.6.1 $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ in QED

This process was studied in Sec. 5.6. For low energy ($\sqrt{s} \ll M_Z$) we can neglect the diagram with a Z boson and then we have only one Feynman diagram, shown in Fig. A.2. The amplitude for this process is

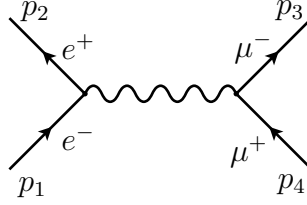


Figure A.2: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ scattering in QED.

$$\mathcal{M} = i \bar{v}(p_2)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\nu)v(p_4) \quad (\text{A.38})$$

$$= -\frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4) . \quad (\text{A.39})$$

Due to the chirality properties of the QED interaction, instead of sixteen possible spin combinations we have only four non-zero currents, two for the initial state and two for the final state. These were already given in Eqs. (A.18)-(A.21) (and also in Sec. 5.6). Therefore we get,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow) &= -\frac{e^2}{s} J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) \\ &= -\frac{e^2}{s} [\sqrt{s}(0, -1, -i, 0)] \cdot [\sqrt{s}(0, -\cos \theta, i, \sin \theta)] \\ &= \frac{e^2}{s} (1 + \cos \theta) \equiv 4\pi\alpha (1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Similarly

$$|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow)|^2 = |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \downarrow\uparrow)|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos \theta)^2 \quad (\text{A.41})$$

$$|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \downarrow\uparrow)|^2 = |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\downarrow)|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 - \cos\theta)^2 \quad (\text{A.42})$$

and

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} (4\pi\alpha)^2 [2(1 + \cos\theta)^2 + 2(1 - \cos\theta)^2] \quad (\text{A.43})$$

$$= (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos^2\theta) \quad (\text{A.44})$$

Finally for the cross section, using Eq. (A.5), we get

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) \quad (\text{A.45})$$

and the total cross section is obtained after integration in the angles to give,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (\text{A.46})$$

A.6.2 Bhabha scattering

The process $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ is known as Bhabha scattering. For this process we have, in QED, the two diagrams of Fig. A.3 where there is relative a minus sign

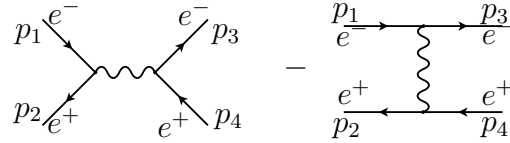


Figure A.3: Diagrams for Bhabha

between the two diagrams (rule 10 in the Feynman rules for QED, Sec. 5.4). We have only six possible helicity combinations shown below,

$$\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) = \text{[s-channel diagram]} - \text{[t-channel diagram]} \quad (\text{A.47})$$

$$\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \downarrow, \uparrow) = \text{[s-channel diagram]} \quad (\text{A.48})$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \uparrow, \downarrow) = \text{[s-channel diagram]} \quad (\text{A.49})$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = \text{[s-channel diagram]} - \text{[t-channel diagram]} \quad (\text{A.50})$$

$$\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow; \uparrow, \uparrow) = \begin{array}{c} \rightarrow \quad \rightarrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \quad (A.51)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow; \downarrow, \downarrow) = \begin{array}{c} \leftarrow \quad \leftarrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \quad (A.52)$$

The general amplitude for Bhabha scattering can then be written in the form

$$\mathcal{M}(h_1, h_2; h_3, h_4) = -\frac{e^2}{s} J_{u_1 v_2}(h_1, h_2) \cdot J_{u_3 v_4}(h_3, h_4) + \frac{e^2}{t} J_{u_1 u_3}(h_1, h_3) \cdot J_{v_2 v_4}(h_2, h_4) \quad (A.53)$$

Using Eqs. (A.22) and (A.22) and summing the six non-zero helicity amplitudes we get finally

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2e^4 \left[\frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2 \frac{(s+t)^2}{st} \right] \quad (A.54)$$

$$= 2e^4 \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \quad (A.55)$$

where

$$t = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) = -s \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) = -s \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (A.56)$$

Using Eq. (A.5), we get for the differential cross section,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right]. \quad (A.57)$$

A.6.3 Decay $Z \rightarrow f \bar{f}$

Consider now the decay of $Z \rightarrow f \bar{f}$. The Feynman diagram is given in Fig. A.4.

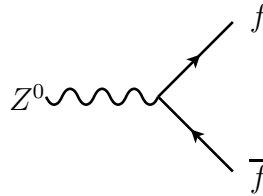


Figure A.4: Z decay into $f \bar{f}$.

Applying the Feynman rules we get for the amplitude

$$\mathcal{M} = g_Z \epsilon_\mu(k, \lambda) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) v(p_4) \quad (A.58)$$

where we have defined the shorthand notation,

$$g_Z = \frac{g}{\cos \theta_W} . \quad (\text{A.59})$$

In order to simplify matters and also because it is a very good approximation, ($M_Z \gg m_f$), we will neglect all the fermion masses, and use the techniques of the helicity amplitudes explained in Chapter 5. The Z boson is a spin 1 particle with mass, and therefore has three polarizations. In the rest frame of the Z the polarization vectors for these three cases can be written as

$$\begin{aligned} \epsilon_+^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), & S_z &= +1, \quad h = +1 \\ \epsilon_-^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), & S_z &= -1, \quad h = -1 \\ \epsilon_L^\mu &= (0, 0, 0, 1), & S_z &= 0, \quad h = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

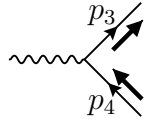
On the other hand we can write

$$\begin{aligned} g_V^f - g_A^f \gamma_5 &= (g_V^f - g_A^f \gamma_5) (P_L + P_R) \\ &= (g_V^f + g_A^f) P_L + (g_V^f - g_A^f) P_R \equiv g_L^f P_L + g_R^f P_R \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

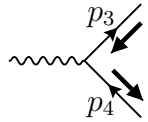
with

$$g_L^f \equiv g_V^f + g_A^f, \quad g_R^f \equiv g_V^f - g_A^f \quad (\text{A.62})$$

As in the massless limit chirality equals helicity, this means that we can have only two possible helicity combinations,



$J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, i, \sin \theta) \quad (\text{A.63})$



$J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (\text{A.64})$

We therefore obtain ($\sqrt{s} = M_Z$)

$$\mathcal{M}(+; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_+ \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \cos \theta) \quad (\text{A.65})$$

$$\mathcal{M}(-; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_- \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta) \quad (\text{A.66})$$

$$\mathcal{M}(L; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_L \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \sin \theta \quad (\text{A.67})$$

$$\mathcal{M}(+; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_+ \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = -g_Z g_L^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta) \quad (\text{A.68})$$

$$\mathcal{M}(-; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_- \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = -g_Z g_L^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \cos \theta) \quad (\text{A.69})$$

$$\mathcal{M}(L; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_L \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f M_Z \sin \theta \quad (\text{A.70})$$

Therefore we get,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{3} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{3} [|\mathcal{M}(+; \uparrow, \downarrow)|^2 + |\mathcal{M}(-; \uparrow, \downarrow)|^2 + |\mathcal{M}(L; \uparrow, \downarrow)|^2 \\ &\quad + |\mathcal{M}(+; \downarrow, \uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(-; \downarrow, \uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(L; \downarrow, \uparrow)|^2] \\ &= \frac{2}{3} g_Z^2 (g_R^{f^2} + g_L^{f^2}) \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 M_Z^2 [g_V^{f^2} + g_A^{f^2}] \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

For the total width we get

$$\Gamma = \frac{M_Z}{12\pi} \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 [g_V^{f^2} + g_A^{f^2}] \quad (\text{A.73})$$

This result is normally presented in terms of the Fermi constant,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 \frac{1}{8M_Z^2} \quad (\text{A.74})$$

where we have used the standard model relation for the W and Z masses,

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad (\text{A.75})$$

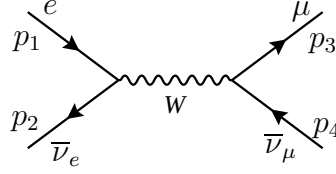
Therefore we get

$$\Gamma = \frac{2G_F M_Z^3}{3\sqrt{2}\pi} [g_V^{f^2} + g_A^{f^2}] . \quad (\text{A.76})$$

A.6.4 Scattering $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$

As another example we consider the $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ scattering in the CM. In lowest order in perturbation theory we have the Feynman diagram of Fig. A.5. The amplitude is given by,

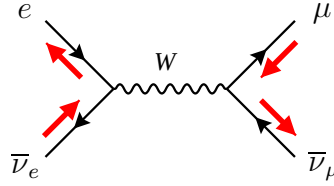
$$\mathcal{M} = i \left(\frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} v(p_4) \quad (\text{A.77})$$

Figure A.5: scattering $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$.

where $q = p_1 + p_2$ and Γ_W is the decay width of the W . Using the fact that we are neglecting the fermion masses the term in the numerator of the W boson propagator proportional to the momenta vanishes after application of the Dirac equation, see Sec. 9.6.2. Making use of the relation $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$, we further simplify the expression

$$\mathcal{M} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu P_L v(p_4) . \quad (\text{A.78})$$

From the structure of Eq. (A.78) we immediately see that the only non-zero helicities are those shown in Fig. A.6 Therefore we get only one helicity combination,

Figure A.6: Helicities for $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) \\ &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} \sqrt{s}(0, -1, i, 0) \cdot \sqrt{s}(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \\ &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} s(1 + \cos\theta) . \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Now we obtain

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow)|^2 \\ &= 4G_F^2 \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} s^2 (1 + \cos\theta)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

We get therefore for the differential cross section in the CM frame

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2 s}{16\pi^2} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} (1 + \cos \theta)^2 \quad (\text{A.81})$$

After integration over the angles we get finally,

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{G_F^2 s}{\pi} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \quad (\text{A.82})$$

In Sec. 9.6.2 we discussed the low and high energy limit of this result.

A.6.5 Scattering $\mu^- \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$

This process was considered in Sec. 7.5.2 in the context of the current-current V-A theory. The process is described by the Feynman diagram of Fig. A.7 to which

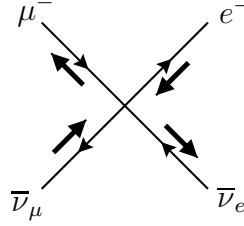


Figure A.7: Diagram para $\mu^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

corresponds the amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu P_L v(p_4) \quad (\text{A.83})$$

This is exactly equal to Eq. (A.78) in the limit $\sqrt{s} \ll M_W$. Therefore the result for the cross section will be the same in the same limit.

Bibliography

- [1] M. Thomson, *Modern Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [2] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles* (Weinheim, Germany: Wiley-VCH., 2008).
- [3] J. C. Romão, *Introdução à Teoria do Campo* (IST, 2016), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/itc.pdf>.
- [4] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New York, 1994).
- [5] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics* (Wiley, New York, 2003).
- [6] J. C. Romão, *O Modelo Standard das Interações Electrofracas* (IST, 2010), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/fie.pdf>.
- [7] E. Schrodinger, Ann. Physik **81**, 109 (1926).
- [8] O. Klein, Z. Phys. **41**, 407 (1927).
- [9] W. Gordon, Z. Phys. **40**, 117 (1926).
- [10] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A117**, 610 (1928).
- [11] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A118**, 351 (1928).
- [12] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, Lisboa, 2006).
- [13] C.-N. Yang and R. L. Mills, Phys.Rev. **96**, 191 (1954).
- [14] J. C. Romão, *Advanced Quantum Field Theory* (IST, 2012), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/tca.pdf>.
- [15] A. Bettini, *Elementary Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).

-
- [16] E. Commins and P. Bucksbaum, *Weak Interactions of Leptons and Quarks* (Cambridge University Press, 1983).
- [17] G. Gamow and E. Teller, Phys.Rev. **49**, 895 (1936).
- [18] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
- [19] C. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes and R. Hudson, Phys.Rev. **105**, 1413 (1957).
- [20] R. Feynman and M. Gell-Mann, Phys.Rev. **109**, 193 (1958).
- [21] N. Cabibbo, Phys.Rev.Lett. **10**, 531 (1963).
- [22] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970).
- [23] Y. Nambu, Phys.Rev. **117**, 648 (1960).
- [24] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [25] E. Abers and B. Lee, Phys.Rept. **9**, 1 (1973).
- [26] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).
- [27] F. Englert and R. Brout, Phys.Rev.Lett. **13**, 321 (1964).
- [28] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
- [29] S. Glashow, Nucl.Phys. **22**, 579 (1961).
- [30] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [31] A. Salam, Conf.Proc. **C680519**, 367 (1968), Originally printed in Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings of the Nobel Symposium held 1968 at Lerum, Sweden, Stockholm.
- [32] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [33] Particle Data Group, J. Beringer *et al.*, Phys.Rev. **D86**, 010001 (2012).
- [34] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).
- [35] J. C. Romao and J. P. Silva, Int. J. Mod. Phys. **A27**, 1230025 (2012), [1209.6213].