



# Arco-Íris, Miragens e ...

Jorge C. Romão

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP

A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

5 de Dezembro de 2014

[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)

- Introdução
- Arco Íris
- Princípio de Fermat
- Miragens
- Equações de Fresnel
- Links interessantes

[Índice](#)

[Introdução](#)

● **Espectro EM**

● Índice refração

● Dispersão

● Absorção

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)

$$\lambda f = v$$

Tipo radiação	Comprimento de onda	Frequência
Ondas rádio	metros, Km	kHz, MHz
Microondas	1 m a 1 mm	$3 \times 10^8$ Hz a $3 \times 10^{11}$ Hz
Espectro IV	0.1 mm ( $10^6$ Å) a 8000 Å	$3 \times 10^{12}$ Hz a $3 \times 10^{14}$ Hz
Espectro Visível	8000 Å a 4000 Å	$3 \times 10^{14}$ Hz a $7 \times 10^{14}$ Hz
Espectro UV	4000 Å a 1000 Å	$7 \times 10^{14}$ Hz a $3 \times 10^{15}$ Hz
Raios X	20 Å a 0.1 Å	$1.5 \times 10^{19}$ Hz
Raios $\gamma$	0.01 Å a $10^{-3}$ Å	$3 \times 10^{20}$ Hz a $3 \times 10^{21}$ Hz
Raios cósmicos	$\lambda < 10^{-3}$ Å	$f > 10^{22}$ Hz

Índice

Introdução

• Espectro EM

• Índice refração

• Dispersão

• Absorção

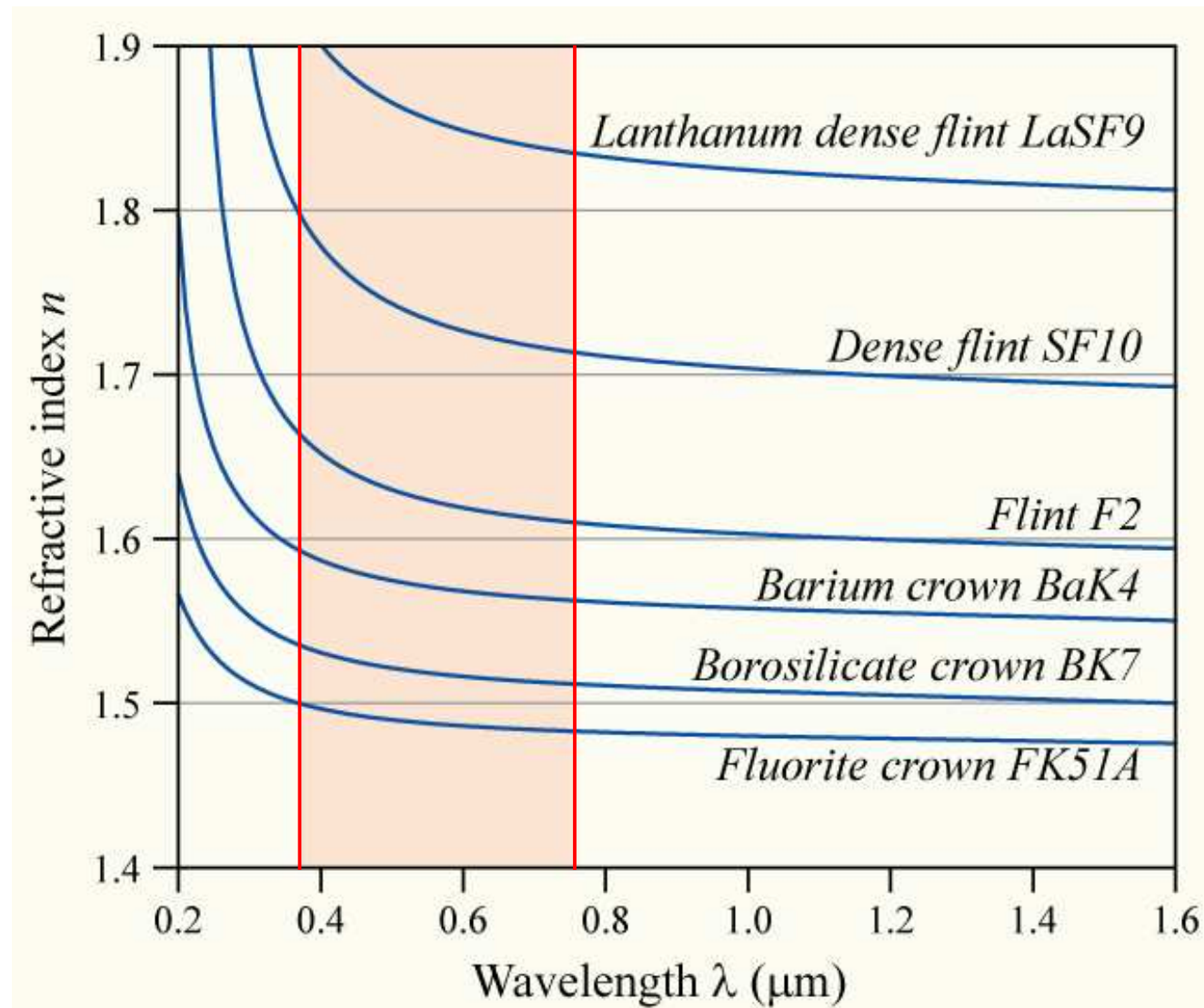
Arco-Íris

Princípio de Fermat

Miragens

Equações de Fresnel

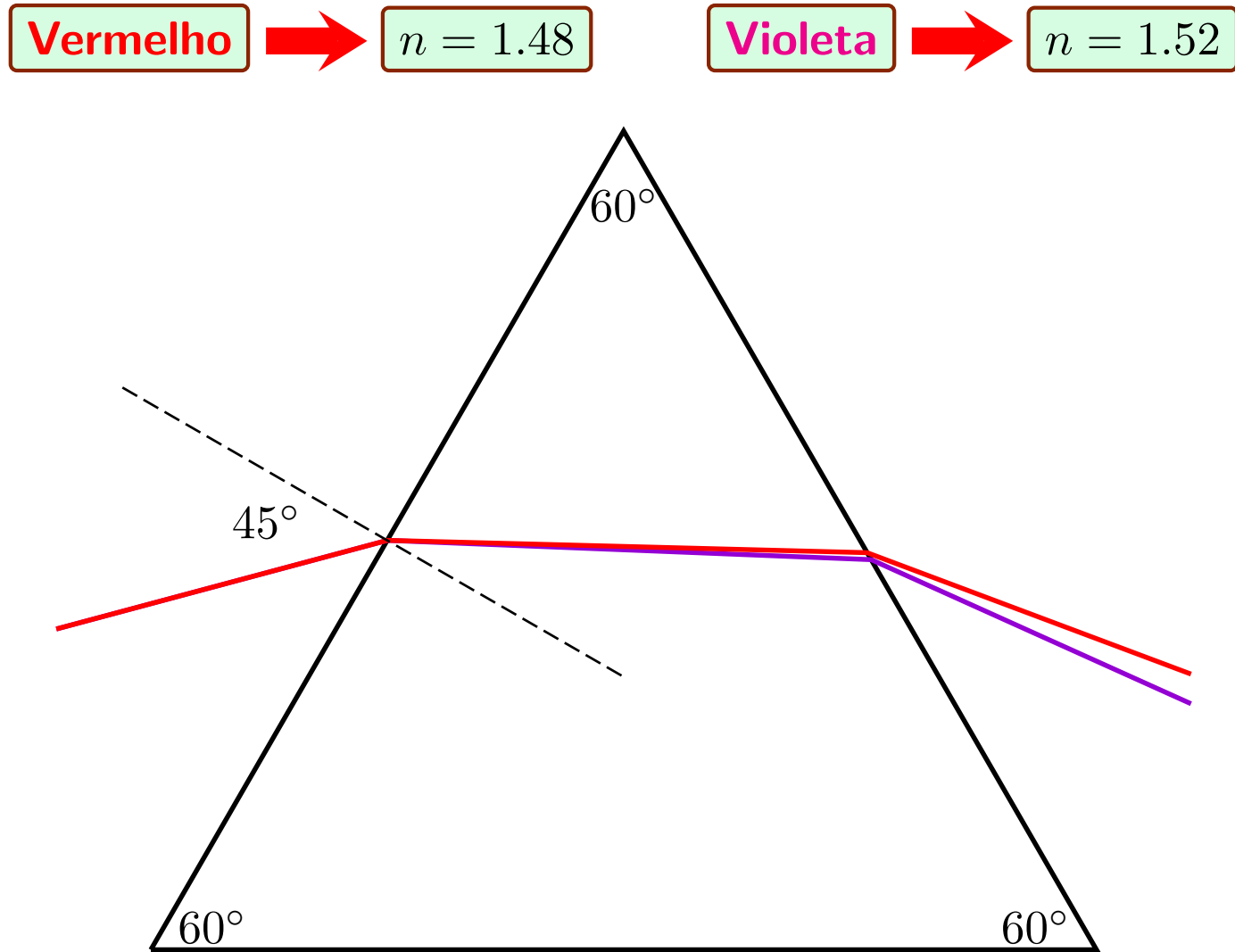
Links interessantes



Variação do índice de refração com o comprimento de onda para vários vidros

# Dispersão da luz num prisma de vidro

- Índice
- Introdução
  - Espectro EM
  - Índice refração
  - **Dispersão**
  - Absorção
- Arco-Íris
- Princípio de Fermat
- Miragens
- Equações de Fresnel
- Links interessantes



Índice

Introdução

- Espectro EM
- Índice refração
- Dispersão
- Absorção

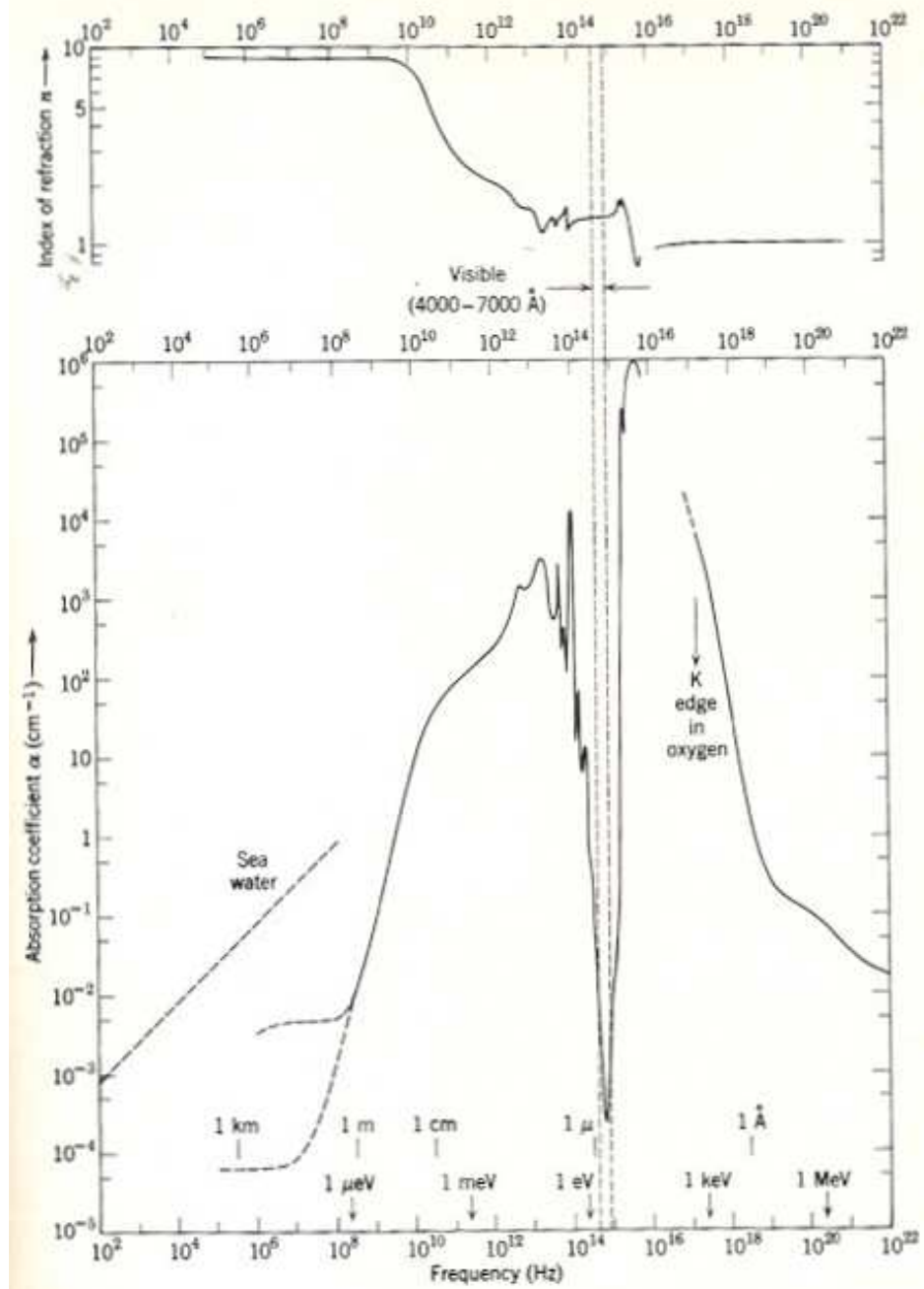
Arco-Íris

Princípio de Fermat

Miragens

Equações de Fresnel

Links interessantes



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

● [Arco-Íris](#)

● [Geometria](#)

●  [\$\theta\(i\)\$](#)

● [Secundário](#)

● [Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)



The Very Large Array (VLA), operates at radio wavelengths. In this photograph, it is strikingly portrayed against the colors of a double rainbow. The VLA is a collection of radio telescopes interconnected electronically to provide a total of 351 pairs of telescopes. (Photo Batelle Observatory, Washington.)

[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

● [Arco-Íris](#)

● [Geometria](#)

●  [\$\theta\(i\)\$](#)

● [Secundário](#)

● [Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)



Mark D. Phillips/Photo Researchers, Inc.



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

● Arco-Íris

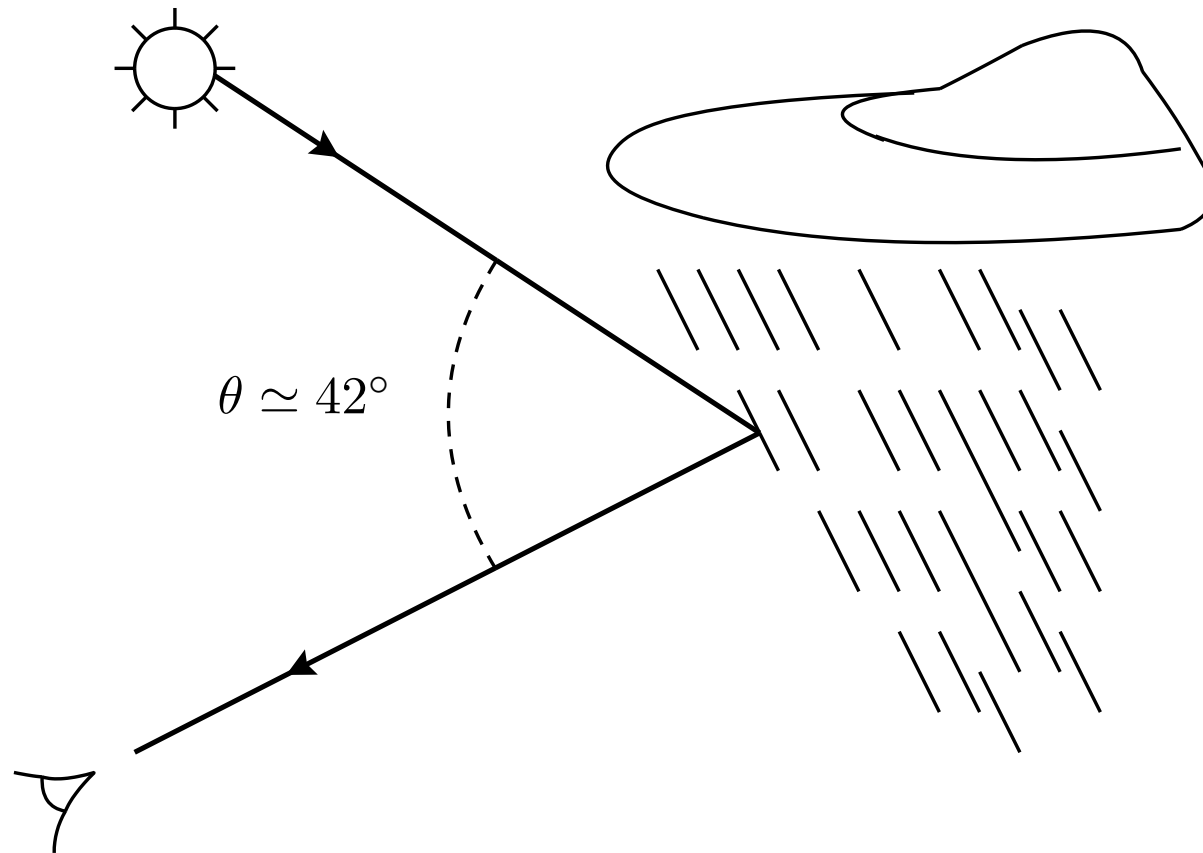
- Geometria
- $\theta(i)$
- Secundário
- Arco-Íris

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)



- ❑ Por que não há arco-íris sempre que há Sol e está a chover?
- ❑ Por vezes há um segundo arco-íris (secundário) menos intenso e colocado no exterior do primário. Porquê?

Índice

Introdução

Arco-Íris

• Arco-Íris

• Geometria

•  $\theta(i)$

• Secundário

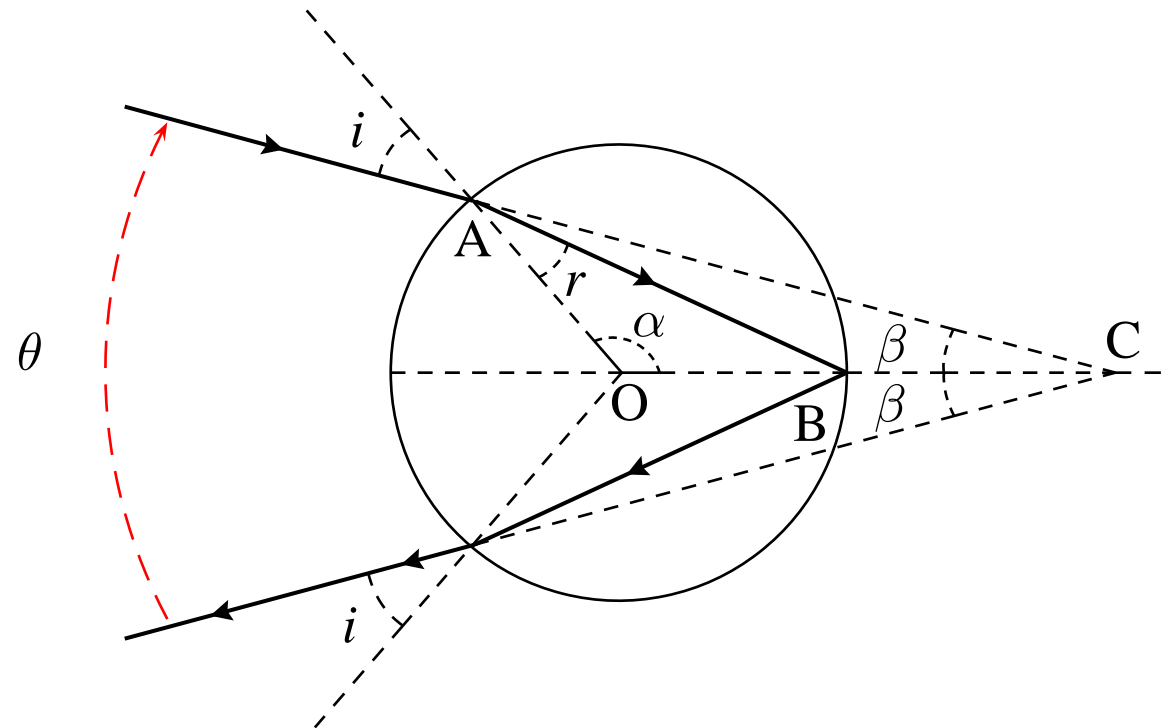
• Arco-Íris

Princípio de Fermat

Miragens

Equações de Fresnel

Links interessantes



□  $\theta = 2\beta$

□  $2r + \alpha = \pi; \quad i + \beta + \alpha = \pi$

□  $\beta = 2r - i$

□ Usando a lei de Snell-Descartes:

$$\theta = 4 \arcsin \left( \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{água}}} \sin i \right) - 2i$$

# Variação de $\theta$ com $i$

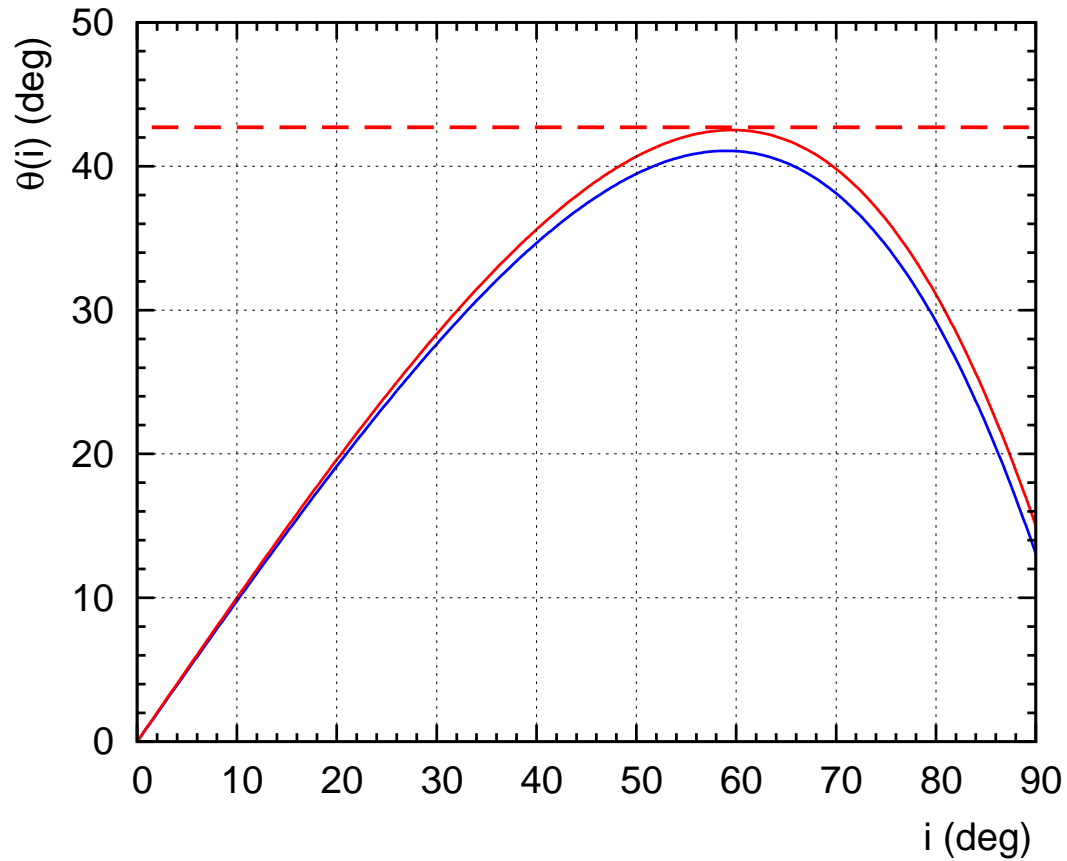
- Índice
- Introdução
- Arco-Íris
  - Arco-Íris
  - Geometria
  - $\theta(i)$
  - Secundário
  - Arco-Íris
- Princípio de Fermat
- Miragens
- Equações de Fresnel
- Links interessantes

$$\theta = 4 \arcsin \left( \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{água}}} \sin i \right) - 2i$$

$$\theta^{\text{red}}_{\text{max}} = 42.4^\circ$$

$$\theta^{\text{blue}}_{\text{max}} = 40.7^\circ$$

$$i_{\text{max}} \simeq 59.5^\circ$$



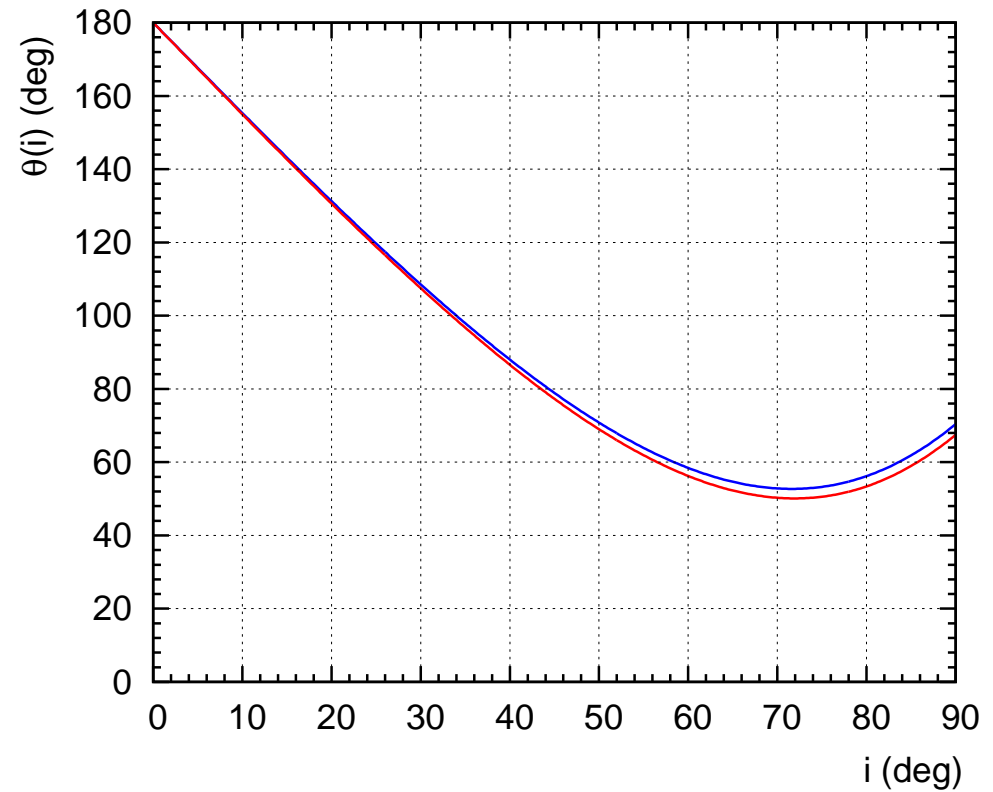
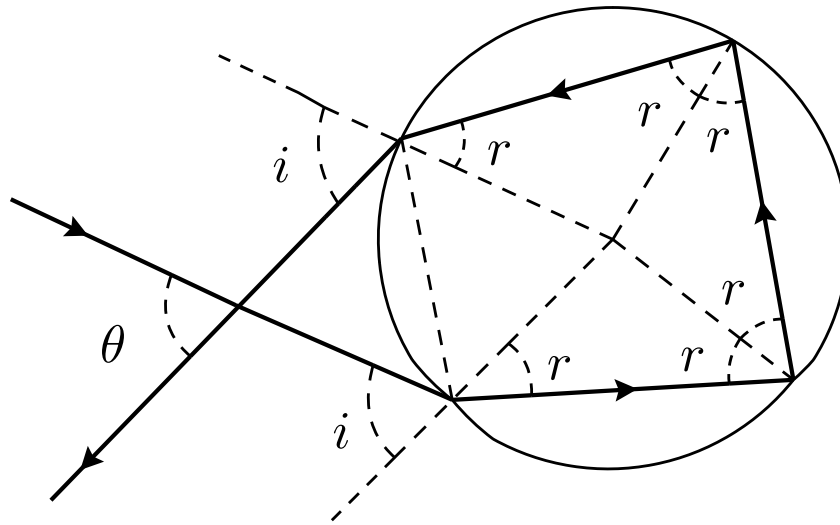
$$r_{\text{max}} \simeq 40^\circ$$

$$i_{\text{Brewster}} \simeq 37^\circ$$

$$\text{Polarização} \simeq \perp$$

# Arco-Íris secundário

- Índice
- Introdução
- Arco-Íris
  - Arco-Íris
  - Geometria
  - $\theta(i)$
  - **Secundário**
  - Arco-Íris
- Princípio de Fermat
- Miragens
- Equações de Fresnel
- Links interessantes



$$\theta = \pi + 2i - 6 \arcsin \left( \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{água}}} \sin i \right)$$

$$\theta_{\text{min}}^{\text{red}} = 50.3^\circ, \quad \theta_{\text{min}}^{\text{blue}} = 53.5^\circ$$

❑ **Menos intenso, exterior e com as cores invertidas**

[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

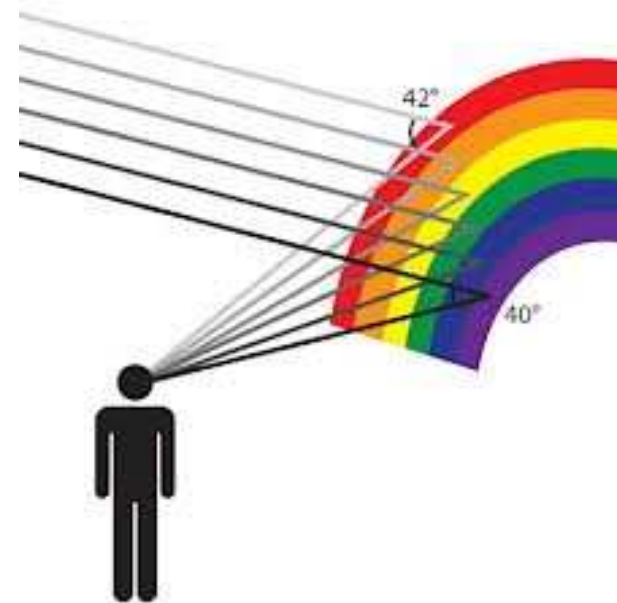
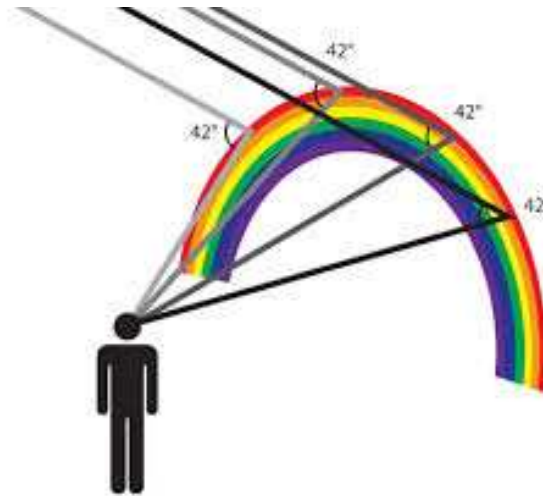
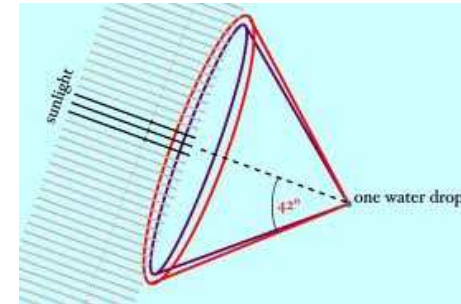
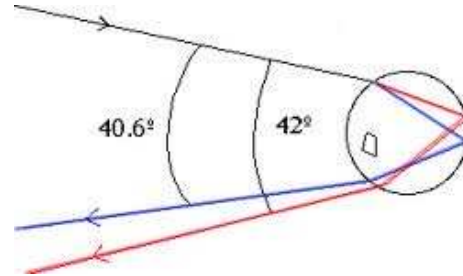
- Arco-Íris
- Geometria
- $\theta(i)$
- Secundário
- **Arco-Íris**

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

• Leis da reflexão e refração

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)

- Antes de a teoria de Maxwell ter sido desenvolvida, o estudo teórico da Óptica baseava-se em dois princípios, o de Huygens e o de Fermat. O princípio de Huygens é relevante para o estudo de interferências. Aqui vamos falar do princípio de Fermat

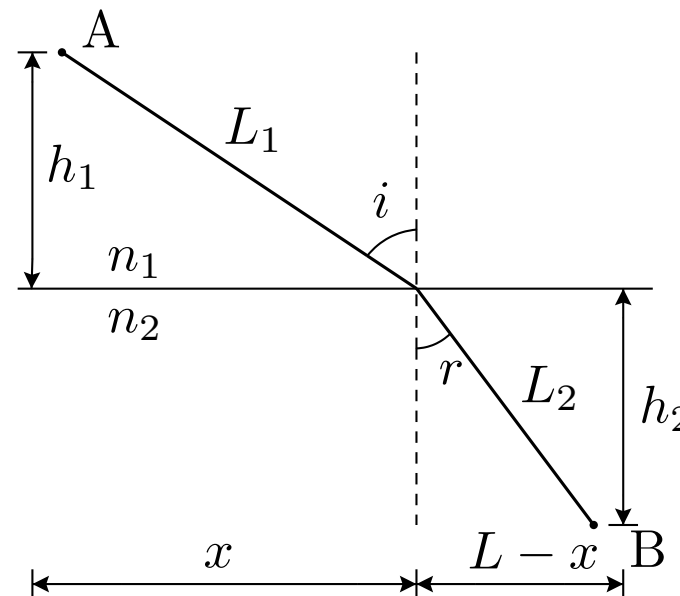
## Princípio de Fermat:

*O caminho seguido pela luz é tal que o tempo gasto no percurso é mínimo.*

- Podemos usar o princípio de Fermat para demonstrar várias propriedades da luz.
- **1) Propagação rectilínea da luz**  
Num meio com índice de refração constante, a luz propaga-se em linha recta. Este resultado, usado implicitamente em todas as construções da óptica geométrica, é uma consequência directa do princípio de Fermat. Se o índice de refração é constante, isto quer dizer que a velocidade da luz,  $v = c/n$ , também é constante, e o tempo mínimo corresponde à distância mínima, sendo uma linha recta a distância mínima entre dois pontos.

# Leis da reflexão e refração

- ❑ **2) O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão**
- ❑ **3) Lei de Descartes-Snell**



- ❑ Consideremos a situação descrita na figura. Em cada meio a trajectória é rectilínea e o tempo gasto no percurso de A a B é

$$\mathcal{T} = \frac{1}{c} (n_1 L_1 + n_2 L_2)$$

onde

$$L_1 = \sqrt{x^2 + h_1^2} \quad ; \quad L_2 = \sqrt{(L - x)^2 + h_2^2} .$$

- Índice
- Introdução
- Arco-Íris
- Princípio de Fermat
- Leis da reflexão e refração
- Miragens
- Equações de Fresnel
- Links interessantes

[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

• [Leis da reflexão e refração](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)

- Encontrando o mínimo

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{c} \left( \frac{n_1 x}{L_1} - \frac{(L-x)n_2}{L_2} \right) = 0 ,$$

obtemos

$$n_1 \frac{x}{L_1} = n_2 \frac{L-x}{L_2} ,$$

- Finalmente usando a figura temos

$$\frac{x}{L_1} = \sin i, \quad \frac{L-x}{L_2} = \sin r$$

e obtemos a lei de Snell-Descartes

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

- Explicação
- Perfil de  $n(z)$
- Cálculo Exacto

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

- Explicação
- Perfil de  $n(z)$
- Cálculo Exacto

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

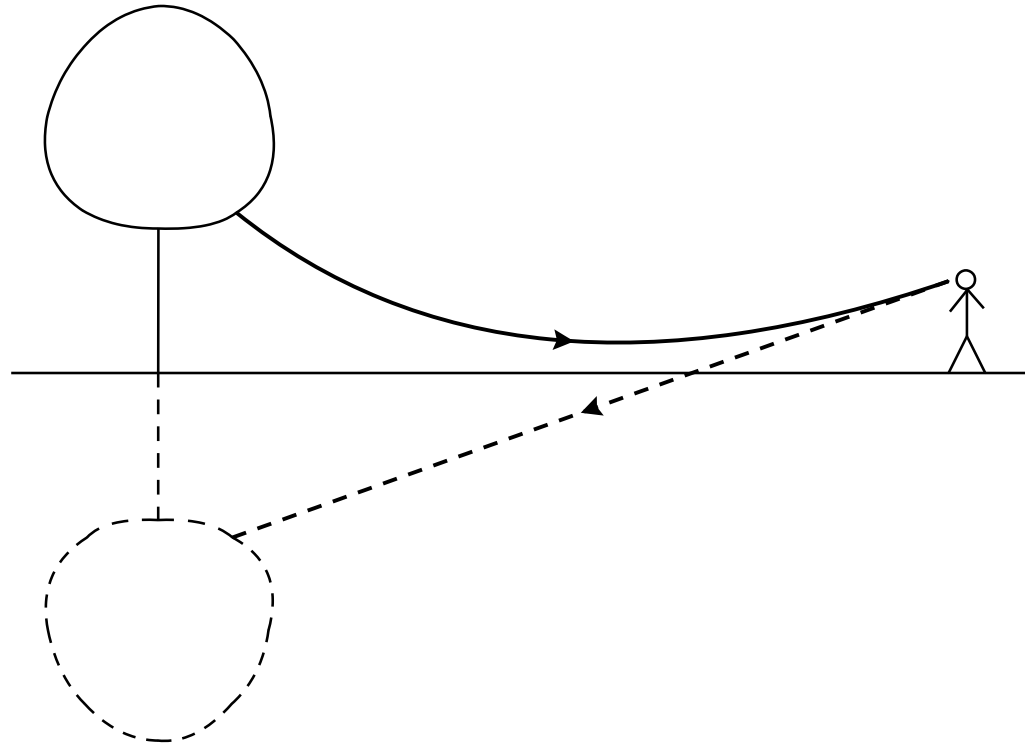
● Explicação

● Perfil de  $n(z)$

● Cálculo Exacto

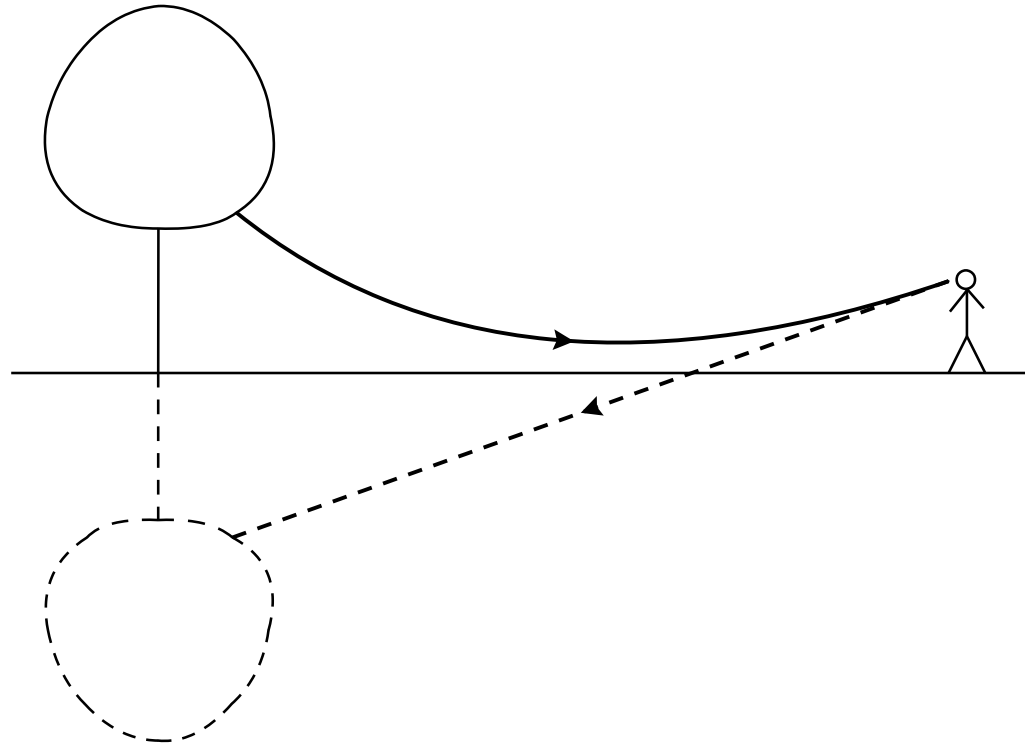
[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)



- ❑ O índice de refração sofre uma inversão de perfil devido ao calor. Fica menor junto ao solo.
- ❑ Índice menor significa velocidade maior.
- ❑ Pelo princípio de Fermat a luz escolhe o percurso com tempo mínimo, logo seguirá onde a velocidade é maior.

- Índice
- Introdução
- Arco-Íris
- Princípio de Fermat
- Miragens
  - Explicação
  - Perfil de  $n(z)$
  - Cálculo Exacto
- Equações de Fresnel
- Links interessantes



- ❑ Porque não há só imagem invertida, mas antes a imagem real e a invertida ao mesmo tempo?
- ❑ Porque não se veêm miragens em todos os dias de calor?

[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

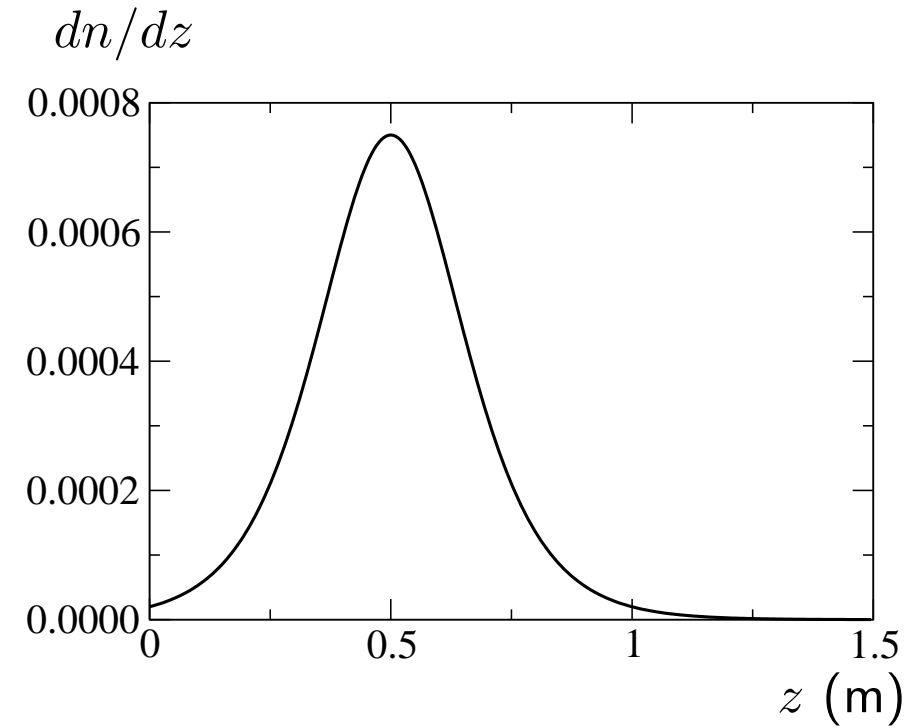
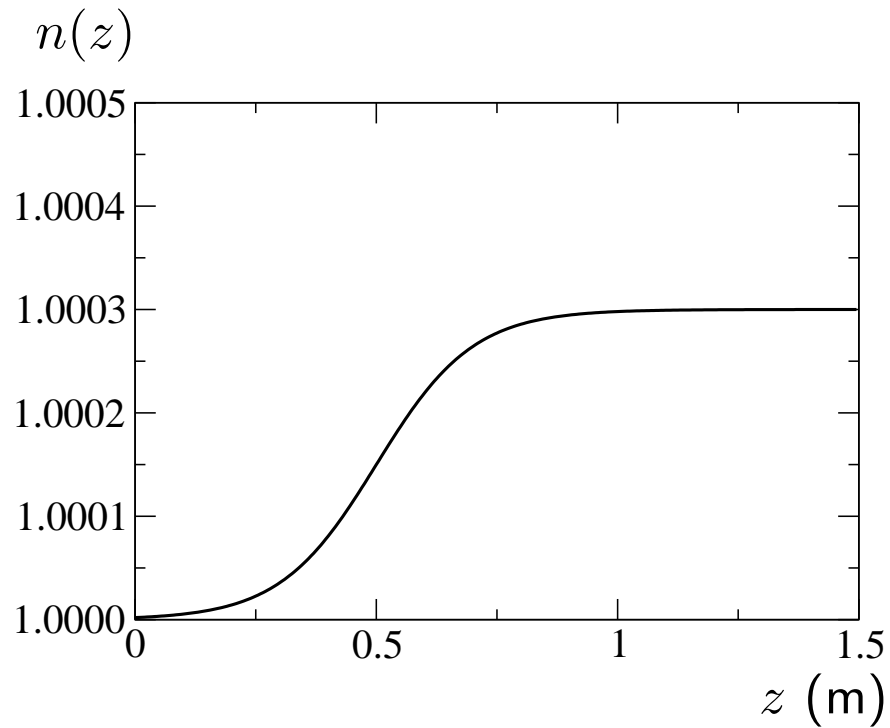
• [Explicação](#)

• [Perfil de  \$n\(z\)\$](#)

• [Cálculo Exacto](#)

[Equações de Fresnel](#)

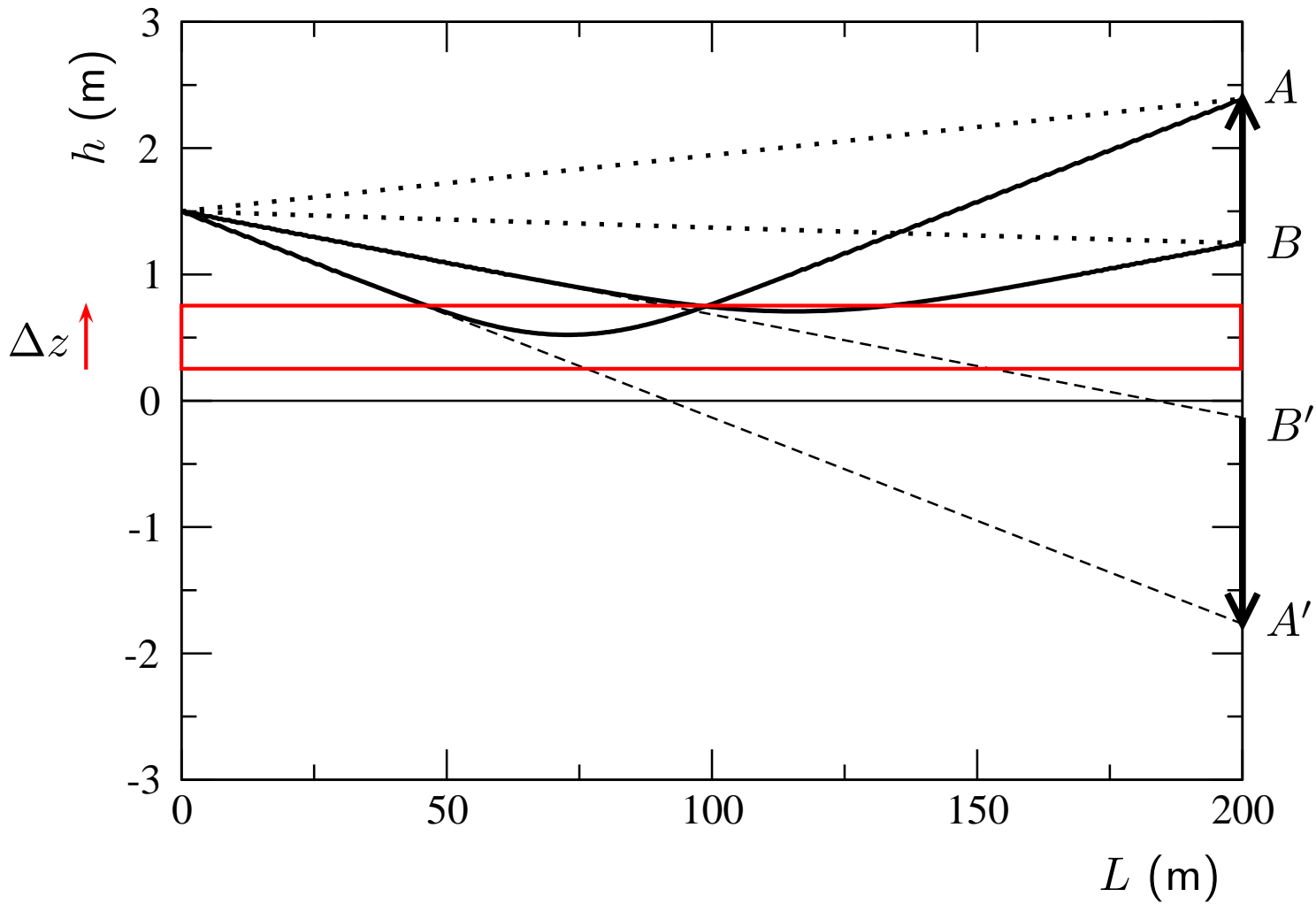
[Links interessantes](#)



$$n(z) = 1 + \frac{0.0003}{1 + e^{(z_0 - z)/\Delta z}}, \quad z_0 = 0.5\text{m}, \quad \Delta z = 0.5\text{m}$$

- Índice
- Introdução
- Arco-Íris
- Princípio de Fermat
- Miragens
  - Explicação
  - Perfil de  $n(z)$
  - **Cálculo Exacto**
- Equações de Fresnel
- Links interessantes

$$n(z) z'' - \frac{dn}{dz} (1 + z'^2) = 0$$



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

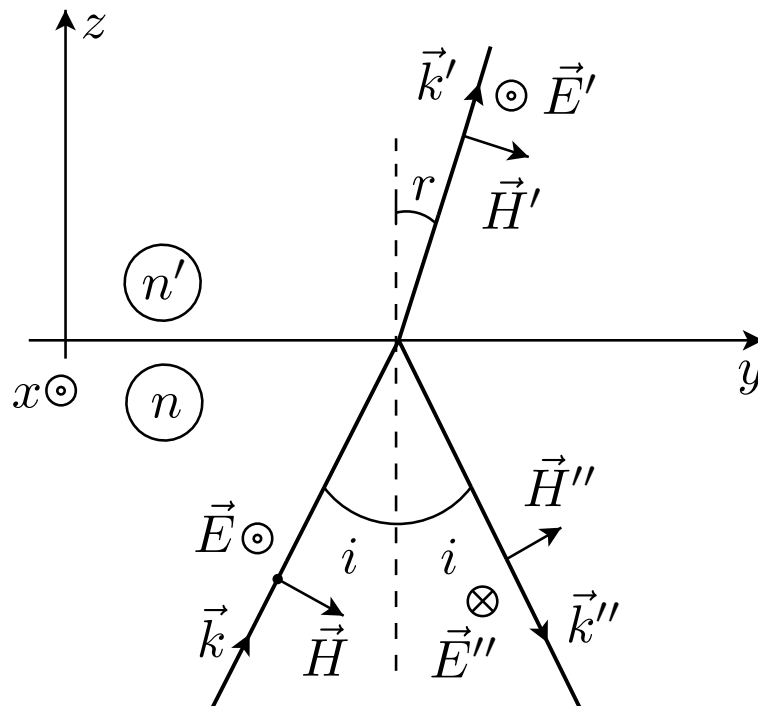
[Equações de Fresnel](#)

• **Fresnel  $\vec{E}_\perp$**

• Fresnel  $\vec{E}_\parallel$

•  $R$  e  $T$

[Links interessantes](#)



$$\frac{E''_\perp}{E_\perp} = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$$

$$\frac{E'_\perp}{E_\perp} = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i + r)}$$

$$R_\perp = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}$$

$$T_\perp = \frac{4 \sin i \cos i \sin r \cos r}{\sin^2(i + r)}$$

$$R_\perp + T_\perp = 1$$

[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

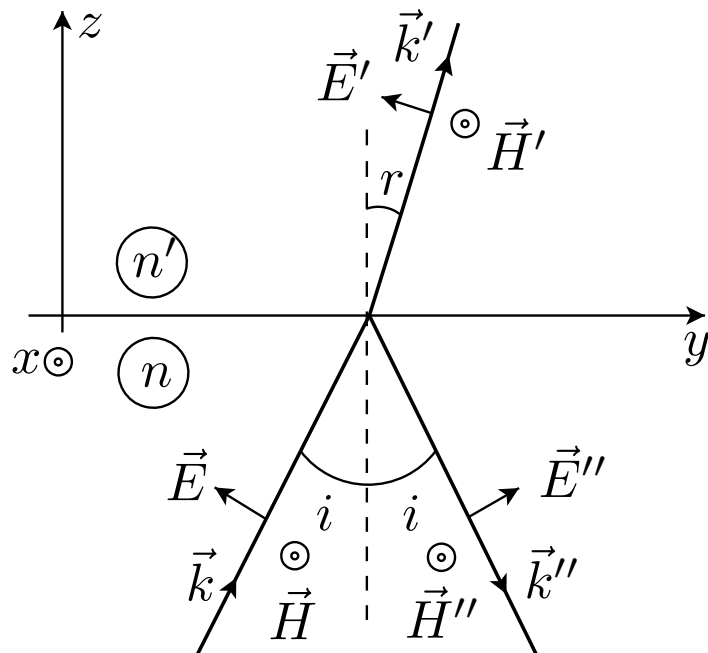
[Equações de Fresnel](#)

• Fresnel  $\vec{E}_{\perp}$

• **Fresnel  $\vec{E}_{\parallel}$**

•  $R$  e  $T$

[Links interessantes](#)



$$\frac{|E''_{\parallel}|}{|E_{\parallel}|} = \left| \frac{\tan(i - r)}{\tan(i + r)} \right|$$

$$\frac{|E'_{\parallel}|}{|E_{\parallel}|} = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i + r) \cos(i - r)}$$

$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(i - r)}{\tan^2(i + r)}$$

$$T_{\parallel} = \frac{4 \sin i \cos i \sin r \cos r}{\sin^2(i + r) \cos^2(i - r)}$$

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$$

$$i_B + r = \frac{\pi}{2}$$



Índice

Introdução

Arco-Íris

Princípio de Fermat

Miragens

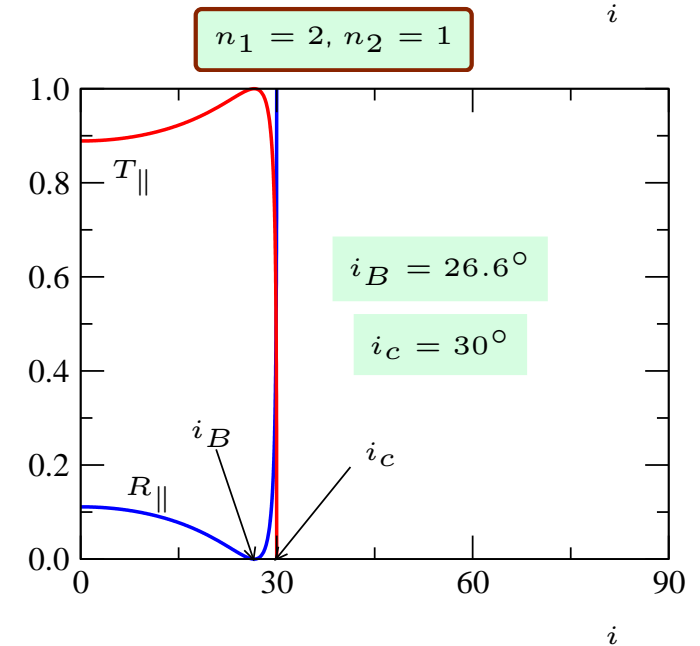
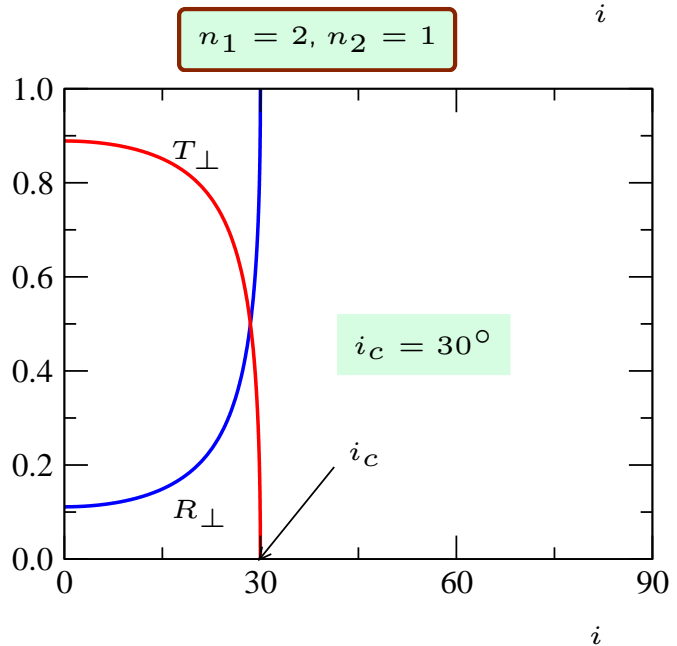
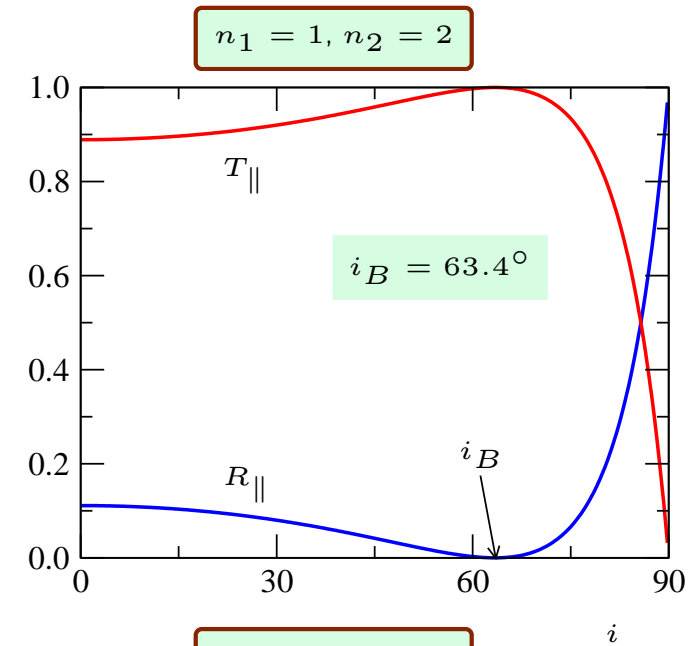
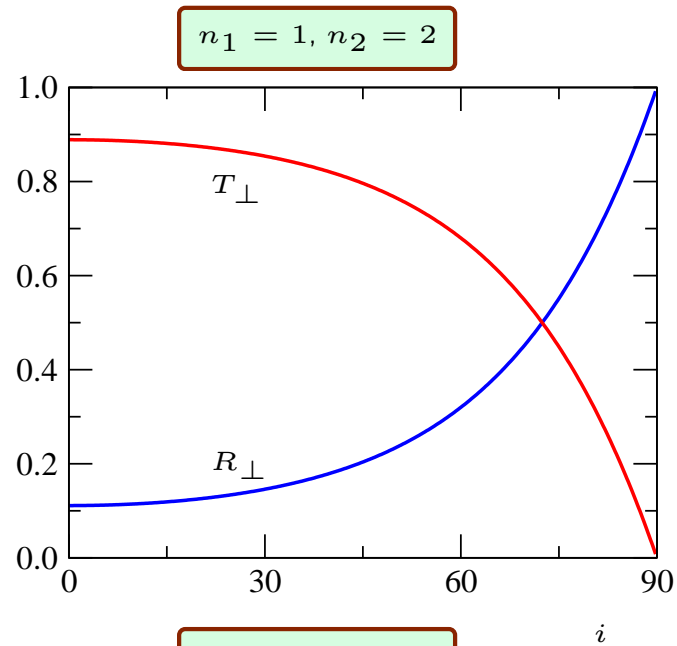
Equações de Fresnel

• Fresnel  $\vec{E}_\perp$

• Fresnel  $\vec{E}_\parallel$

•  $R$  e  $T$

Links interessantes



[Índice](#)

[Introdução](#)

[Arco-Íris](#)

[Princípio de Fermat](#)

[Miragens](#)

[Equações de Fresnel](#)

[Links interessantes](#)

- ❑ Ondas Electromagnéticas  
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=35>
- ❑ Reflexão e Refracção  
[http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c24\\_refraction.html](http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c24_refraction.html)
- ❑ Refracção <http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=43>
- ❑ Ângulo de Brewster  
[http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c27\\_brewster.html](http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c27_brewster.html)
- ❑ Arco-Íris  
[http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c28\\_rainbow.html](http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c28_rainbow.html)
- ❑ Arco-Íris  
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows>
- ❑ Gerador  
[http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c18\\_generators.html](http://buphy.bu.edu/~duffy/semester2/c18_generators.html)
- ❑ Ondas evanescentes  
<https://www.youtube.com/watch?v=z9Rro7FDeDo&index=2&list=PLL3KaSy>