



Advanced Quantum Field Theory

Chapter 5

Functional Methods

Jorge C. Romão

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

Fall 2013

[Lecture 7](#)

[Functional Methods](#)

[Green's functions](#)

[Generating
functionals](#)

[Feynman Rules](#)

[Path integral for GF](#)

[Lecture 8](#)

[Change of variables](#)

Lecture 7

Before we start, let us clarify some questions related with the notation. Let us assume that we have real scalar field $\phi^a(x)$ where $a = 1, \dots, N$. In the following we will encounter expressions of the type,

$$I_1 = \int d^4x \phi^a(x) \phi^a(x)$$

or

$$I_2 = \int d^4x d^4y \phi^a(x) M^{ab}(x, y) \phi^b(y)$$

where $M^{ab}(x, y)$ is normally a differential operator. According to the rules for functional derivation, we have,

$$\frac{\delta I_1}{\delta \phi^b(y)} = 2\phi^b(y)$$

where we used the result

$$\frac{\delta \phi^a(x)}{\delta \phi^b(y)} = \delta^{ab} \delta^4(x - y)$$

If we keep all the indices in the previous expressions (and in some much more complicated that we will encounter soon), we will get a very complicated situation with respect to the notation. Therefore it will be useful to make use of a more compact notation. To this end we identify,

$$\phi_i \iff \phi^a(x)$$

that is, the indice i will represent *both* the discrete indice a as well as the continuous x ,

$$i \iff \{a, x\}$$

In the case that the fields have further indices we will assume that i will always represent them collectively. We also use the Einstein convention meaning a sum for discrete indices and an integration for continuous indices. With these conventions we have

$$I_1 = \int d^4x \phi^a(x)\phi^a(x) \equiv \phi_i\phi_i \quad I_2 = \int d^4x d^4y \phi^a(x)M^{ab}(x,y)\phi^b(y) \equiv \phi_i M_{ij}\phi_j$$

$$\frac{\delta I_1}{\delta \phi_j} = 2\phi_j \quad \frac{\delta \phi_i}{\delta \phi_j} = \delta_{ij}$$

- Connected GF
- Truncated GF
- Irreducible GF

Os objectos básicos em Teoria Quântica dos Campos são as *funções de Green*. Para evitar complicações desnecessárias vamos aqui considerar quase exclusivamente campos escalares. As generalizações são no entanto imediatas. Assim a função de Green de ordem n é dada por

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle .$$

As funções de Green definidas na equação anterior são, por vezes, designadas *completas* por oposição às chamadas funções de Green *conexas*, *truncadas* e *irreduzíveis* (ou *próprias*) que passamos a definir.

Connected Green's functions

Chamam-se funções de Green *conexas* aquelas em que nenhuma das linhas exteriores passa através do diagrama sem interagir.

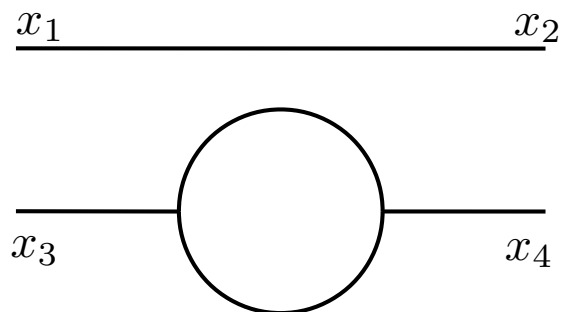


Figure 1: Disconnected contribution to $G^4(x_1, \dots, x_4)$.

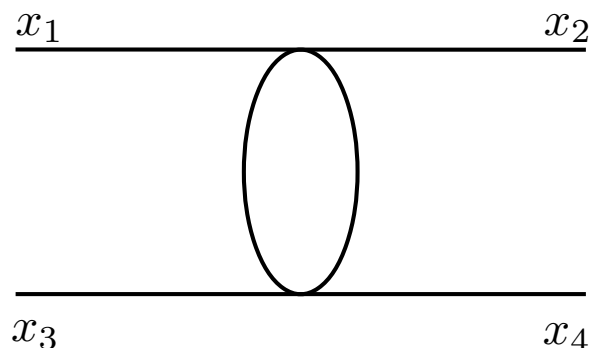


Figure 2: Connected contribution to $G^4(x_1, \dots, x_4)$.

[Lecture 7](#)

[Functional Methods](#)

[Green's functions](#)

● **Connected GF**

● Truncated GF

● Irreducible GF

[Generating functionals](#)

[Feynman Rules](#)

[Path integral for GF](#)

[Lecture 8](#)

[Change of variables](#)

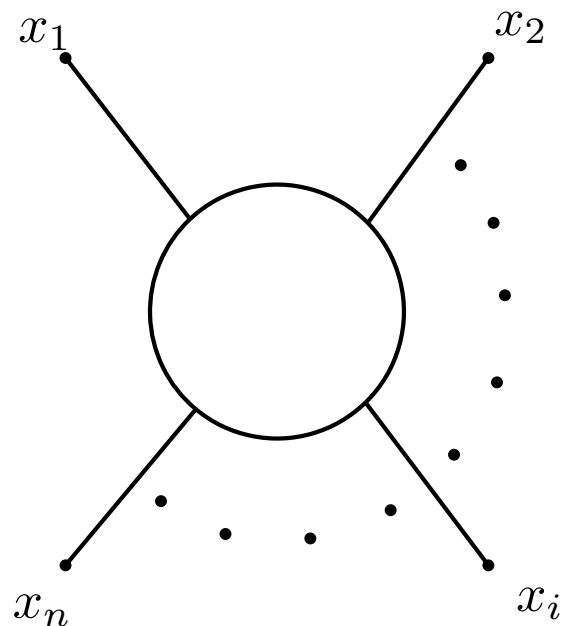
Connected Green's functions ...

Assim as funções de Green conexas $G_c^{(4)}(x_1, \dots, x_n)$, são obtidas somando todos os diagramas conexos. As funções de Green desconexas, correspondendo aos diagramas desconexos, podem ser obtidas a partir de funções de Green conexas de ordem mais baixa, pelo que as quantidades relevantes são as funções de Green conexas $G_c^n(x_1, \dots, x_n)$. É claro que temos

$$G_c^n(x_1, \dots, x_n) = G^n(x_1, \dots, x_n) - \text{partes desconexas},$$

e ainda $G_c^2(x_1, x_2) = G^2(x_1, x_2)$. Convencionalmente representamos

$$G_c^n(x_1, \dots, x_n) =$$

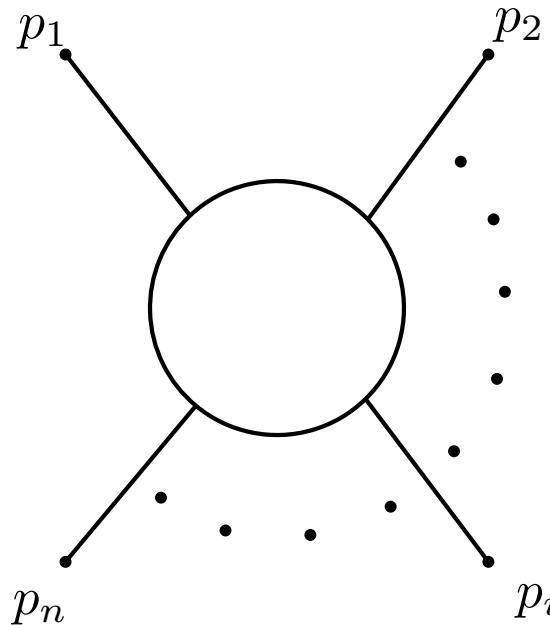


Connected Green's functions ...

Por vezes interessa considerar as funções de Green no espaço dos momentos. Definimos então $G_c^n(p_1, \dots, p_n)$ através da relação

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n) G_c^n(p_1, \dots, p_n) \equiv \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{-i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} G_c^n(x_1, \dots, x_n),$$

$$G_c^n(p_1, \dots, p_n) =$$



Os momentos p_1, \dots, p_n estão a entrar no diagrama (*incoming momenta*).
 Notar ainda que na definição se factorizou a função delta que assegura a conservação de 4-momento.

Com estas convenções $G^2(p, -p) \equiv G^2(p)$ é o propagador completo representado na Figura 3.

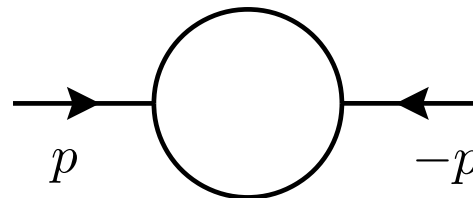


Figure 3: Full propagator $G^2(p)$.

Para $n > 2$ definem-se as funções de Green *truncadas* através da relação

$$G_{\text{trunc}}^n(p_1, \dots, p_n) = \prod_{k=1}^n [G^2(p_k)]^{-1} G_c^n(p_1, \dots, p_n)$$

isto é, multiplica-se cada linha exterior pelo inverso do propagador completo referente a essa linha. São estas funções que representam um papel fundamental na Teoria pois são elas que estão relacionadas com os elementos da matriz S . De facto a fórmula de redução LSZ para campos escalares é

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n \text{ out} | q_1, \dots, q_\ell \text{ in} \rangle &= \langle p_1, \dots, p_n \text{ in} | S | q_1, \dots, q_\ell \text{ in} \rangle = \text{termos desconexos} \\ &+ (iZ^{-1/2})^{n+\ell} \int d^4 y_1 \cdots d^4 x_\ell \exp \left[i \left(\sum_{k=1}^n p_k \cdot y_k - \sum_{k=1}^{\ell} q_k \cdot x_k \right) \right] \\ &\times (\square_{y_1} + m^2) \cdots (\square_{x_\ell} + m^2) \langle 0 | T \phi(y_1) \cdots \phi(x_\ell) | 0 \rangle_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n \text{ out} | q_1, \dots, q_\ell \text{ in} \rangle &= \langle p_1, \dots, p_n \text{ in} | S | q_1, \dots, q_\ell \text{ in} \rangle = \text{termos desconexos} \\ &+ Z^{-(n+\ell)/2} (2\pi)^4 \delta \left(\sum p_i - \sum q_j \right) G_{\text{trunc}}^{n+\ell}(-p_1, \dots, -p_n, q_1, \dots, q_\ell) \end{aligned}$$

Irreducible diagrams

De entre os diagramas truncados desempenha um papel importante o subconjunto dos diagramas *próprios* ou *irredutíveis* (em inglês *1-Particle Irreducible*), que são os diagramas truncados que permanecem ligados quando uma linha interna arbitrária é cortada.

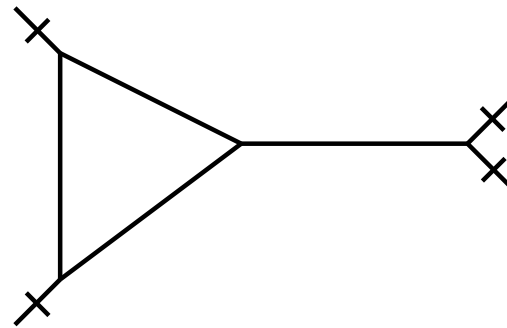


Figure 4: Example of a truncated diagram that is not proper.

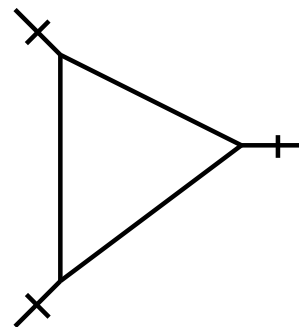


Figure 5: Example of a proper diagram.

A razão pela qual os diagramas truncados não irreduzíveis não são importantes é que estes se podem escrever sempre em termos de diagramas irreduzíveis de ordem mais baixa (recordar a série que conduz à definição de *self-energy*). É conveniente introduzir uma notação para as funções de Green irreduzíveis (soma de todos os diagramas irreduzíveis para determinado número de pernas exteriores)

$$i\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) =$$

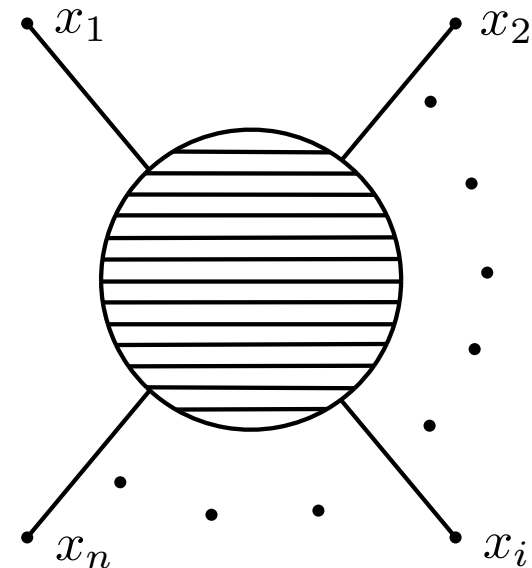
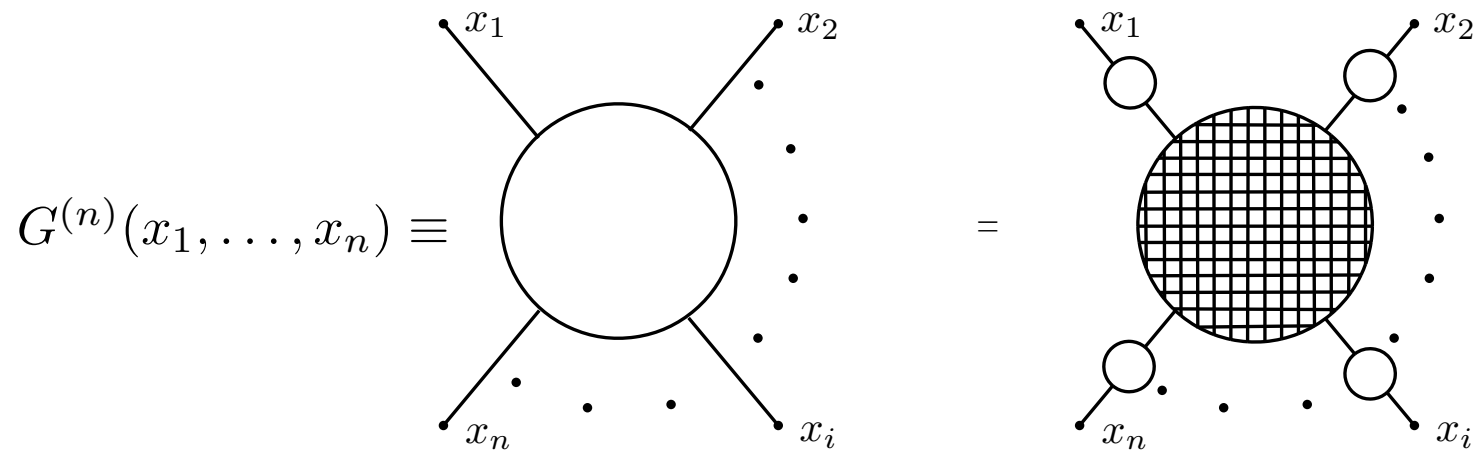
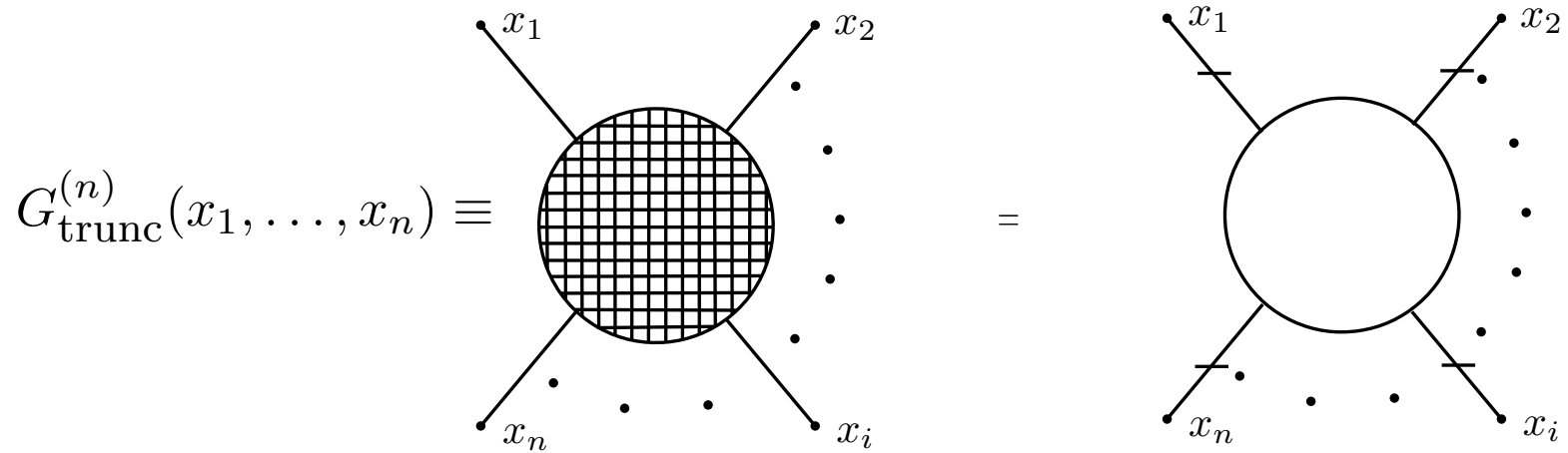


Figure 6: Irreducible Green functions.

É conveniente definir um diagrama para as funções de Green truncadas de ordem n .



Os *funcionais geradores* (FG) das funções de Green representam um papel muito importante em teoria quântica dos campos. De facto a partir deles, por derivação funcional em relação a fontes exteriores podem-se obter todas as funções de Green. Permitem assim tratar ao mesmo tempo um número infinito de funções de Green. O FG das funções de Green completas é dado por

$$Z(J) \equiv \langle 0 | T e^{iJ_i \phi_i} | 0 \rangle$$

onde estamos a usar a notação condensada explicada na introdução

$$J_i \phi_i \equiv \int d^4x J(x) \phi(x) .$$

$Z(J)$ gera todas as funções de Green pois expandindo

$$\begin{aligned} Z(J) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} J_{i_1} \cdots J_{i_n} \langle 0 | T \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_n} | 0 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} J_{i_1} \cdots J_{i_n} G_{i_1 \cdots i_n}^n \end{aligned}$$

As funções de Green são então dadas por

$$G_{i_1 \dots i_n}^n = \left. \frac{\delta^n Z}{i\delta J_{i_1} \dots i\delta J_{i_n}} \right|_{J_i=0}$$

O FG das funções de Green conexas é definido através da relação

$$Z(J) = e^{iW(J)}$$

ou ainda

$$W(J) = -i \ln Z(J) .$$

As funções de Green conexas são então obtidas por derivação funcional

$$G_c^n_{i_1 \dots i_n} = i \left. \frac{\delta^n W}{i\delta J_{i_1} \dots i\delta J_{i_n}} \right|_{J_i=0}$$

Antes de mostrarmos que isto é de facto verdade, vamos definir o funcional gerador das funções de Green irredutíveis. Este é definido através da primeira transformada da Legendre de $W(J)$, isto é

$$\Gamma(\phi) \equiv W(J) - J_i \phi_i$$

onde

$$\begin{cases} \phi_i & \equiv \frac{\delta W(J)}{\delta J_i} \\ J_i & = -\frac{\delta \Gamma(\phi)}{\delta \phi_i} \end{cases}$$

As funções de Green próprias (ou irredutíveis) são então dadas por

$$\Gamma_{i_1 \dots i_n}^n = \left. \frac{\delta^n \Gamma(\phi)}{\delta \phi_{i_1} \dots \delta \phi_{i_n}} \right|_{\phi=0} .$$

Dadas as definições falta-nos agora mostrar que $W(J)$ e $\Gamma(\phi)$ geram efectivamente as funções de Green conexas e próprias. Começemos por $W(J)$. A demonstração faz-se calculando $G_c^n_{i_1 \dots i_n}$. Vamos fazer somente para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. As generalizações são imediatas.

- $n = 2$

$$\begin{aligned}
 G_c^2_{i_1 i_2} &= i \left. \frac{\delta^2 W}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}} \right|_{J_i=0} = \left. \frac{\delta^2 \ln Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}} \right|_{J_i=0} = \frac{\delta}{i\delta J_{i_1}} \frac{1}{Z} \left. \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}} \right|_{J_i=0} \\
 &= \frac{1}{Z} \left. \frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}} \right|_{J_i=0} - \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_1}} \frac{1}{Z} \left. \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}} \right|_{J_i=0} \\
 &= \left. \frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}} \right|_{J_i=0}
 \end{aligned}$$

ou seja

$$G_c^2_{i_1 i_2} = G_{i_1 i_2}^2$$

Para se obter 1 fez-se uso dos seguintes resultados

$$Z(0) = 1 \quad \text{O vácuo está normalizado}$$

$$\frac{\delta Z}{i\delta J_i} = \langle 0|T\phi_i|0\rangle = 0 \quad \text{Não há quebra de simetria}$$

- $n = 3$

$$G_{c\ i_1 i_2 i_3}^3 = \left[\frac{1}{Z} \frac{\delta^3 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2} i\delta J_{i_3}} - \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}} \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_3}} - \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_2} i\delta J_{i_3}} \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_1}} - \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_3}} \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}} + 2 \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_1}} \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}} \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{i\delta J_{i_3}} \right]_{J_i=0}$$

logo

$$G_{i_1 i_2 i_3}^3 = G_{c\ i_1 i_2 i_3}^3$$

O caso $n = 4$ é deixado como exercício. A extensão a $n > 4$ é imediata.

Mostrámos assim que $W(J)$ dado por é o funcional gerador das funções de Green conexas.

Mostremos agora que $\Gamma(\phi)$ é o funcional gerador das funções de Green próprias, ou irredutíveis. Para isto necessitamos de dois resultados prévios que passamos a demonstrar. O primeiro baseia-se na relação

$$\frac{\delta J_i}{\delta J_k} = \delta_{ik}$$

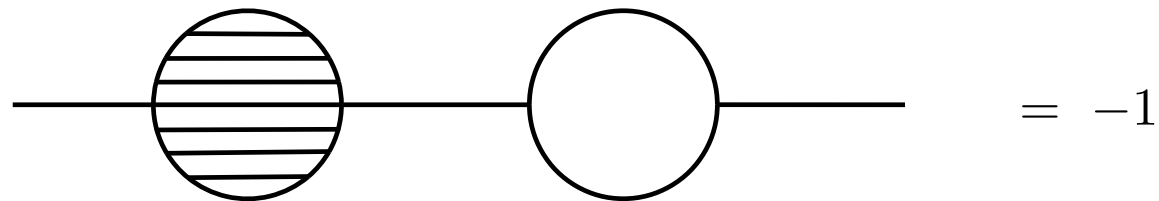
Esta relação é evidente mas podemos obter a partir dela uma relação importante. De facto

$$\frac{\delta J_i}{\delta J_k} = \frac{\delta J_i}{\delta \phi_\ell} \frac{\delta \phi_\ell}{\delta J_k} = - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_i \delta \phi_\ell} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\ell \delta J_k} = -i \Gamma_{i\ell} G_{\ell k}$$

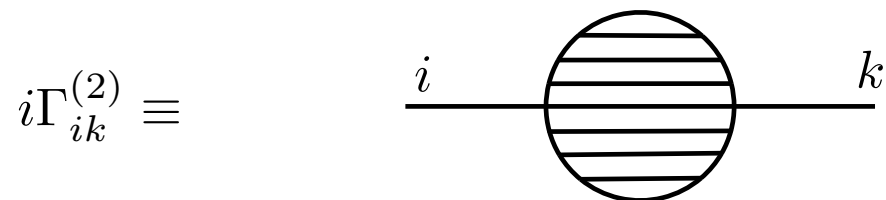
ou ainda

$$\Gamma_{i\ell} G_{\ell k} = i \delta_{ik}$$

Esta relação fundamental exprime que Γ^2 é o inverso do propagador G^2 (à parte o factor i que tem que ver com convenções). É também útil escrevê-la numa forma diagramática:



Notar que



o que explica o desaparecimento do i

Um segundo resultado diz respeito à seguinte derivada funcional

$$\frac{\delta}{i\delta J_i}$$

Pretende-se derivar em ordem a J_i quantidades que dependem de J_i indirectamente através de ϕ_k . Obtemos então

$$\frac{\delta}{i\delta J_i} = \frac{\delta\phi_k}{i\delta J_i} \frac{\delta}{\delta\phi_k} = \frac{\delta^2 W}{\delta J_k i\delta J_i} \frac{\delta}{\delta\phi_k} = G_{ik}^{(2)} \frac{\delta}{\delta\phi_k}$$

e portanto

$$\frac{\delta}{i\delta J_i} = G_{ik} \frac{\delta}{\delta\phi_k}$$

Estas equações permitem obter todas as relações entre as funções de Green próprias e as funções de Green conexas. Esta análise é mais fácil em termos de diagramas desde que se notem as seguintes identidades

$$\frac{\delta}{i\delta J_i} \text{ (circle with left line } k \text{ and right line } m \text{)} = \text{ (circle with left line } k \text{, top line } m \text{, and bottom line } i \text{)}$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi_k} \text{ (shaded circle with left line } i \text{)} = \text{ (shaded circle with left line } i \text{, top line } j \text{, and bottom line } k \text{)}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

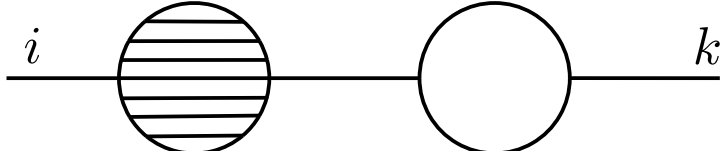
Change of variables

e

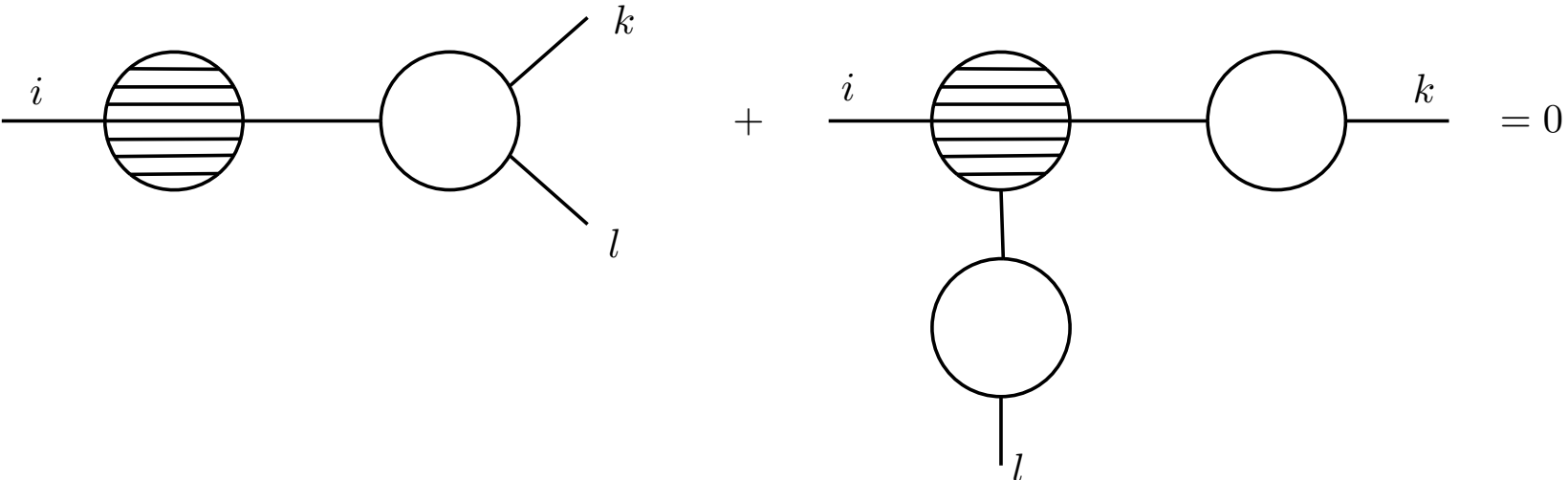
$$\frac{\delta}{i\delta J} \text{ (diagram: circle with horizontal lines, left line labeled } k, \text{ right line labeled } j) = G_{im} \frac{\delta}{\delta\phi_m} \text{ (diagram: circle with horizontal lines, left line labeled } k, \text{ right line labeled } j) = \text{ (diagram: circle with horizontal lines, left line labeled } k, \text{ right line labeled } j, \text{ and a small circle on top connected to the main circle by a vertical line labeled } m, \text{ with a line labeled } i \text{ extending upwards from the small circle)}$$

Em todas estas manipulações está subentendido que no final se faz $J = 0$ e $\phi = 0$ nos sítios convenientes. Usemos agora estes métodos para relacionar as funções de Green próprias e conexas para $n = 3$ e $n = 4$.

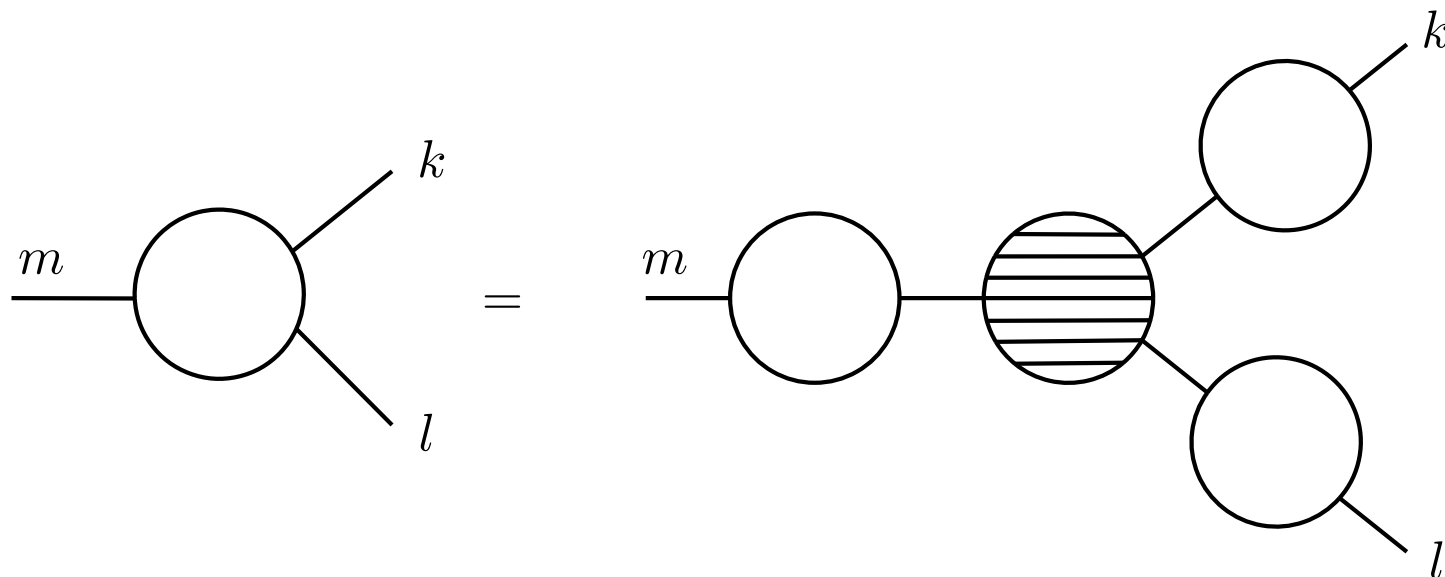
- $n = 3$

$$\frac{\delta}{i\delta J_\ell} \text{---} i \text{---} \text{---} k = 0$$


Usando as equações anteriores obtemos

$$\text{---} i \text{---} \text{---} k \text{---} l + \text{---} i \text{---} \text{---} k \text{---} l = 0$$


Multiplicando à esquerda por $G_{mi}^{(2)}$ obtemos

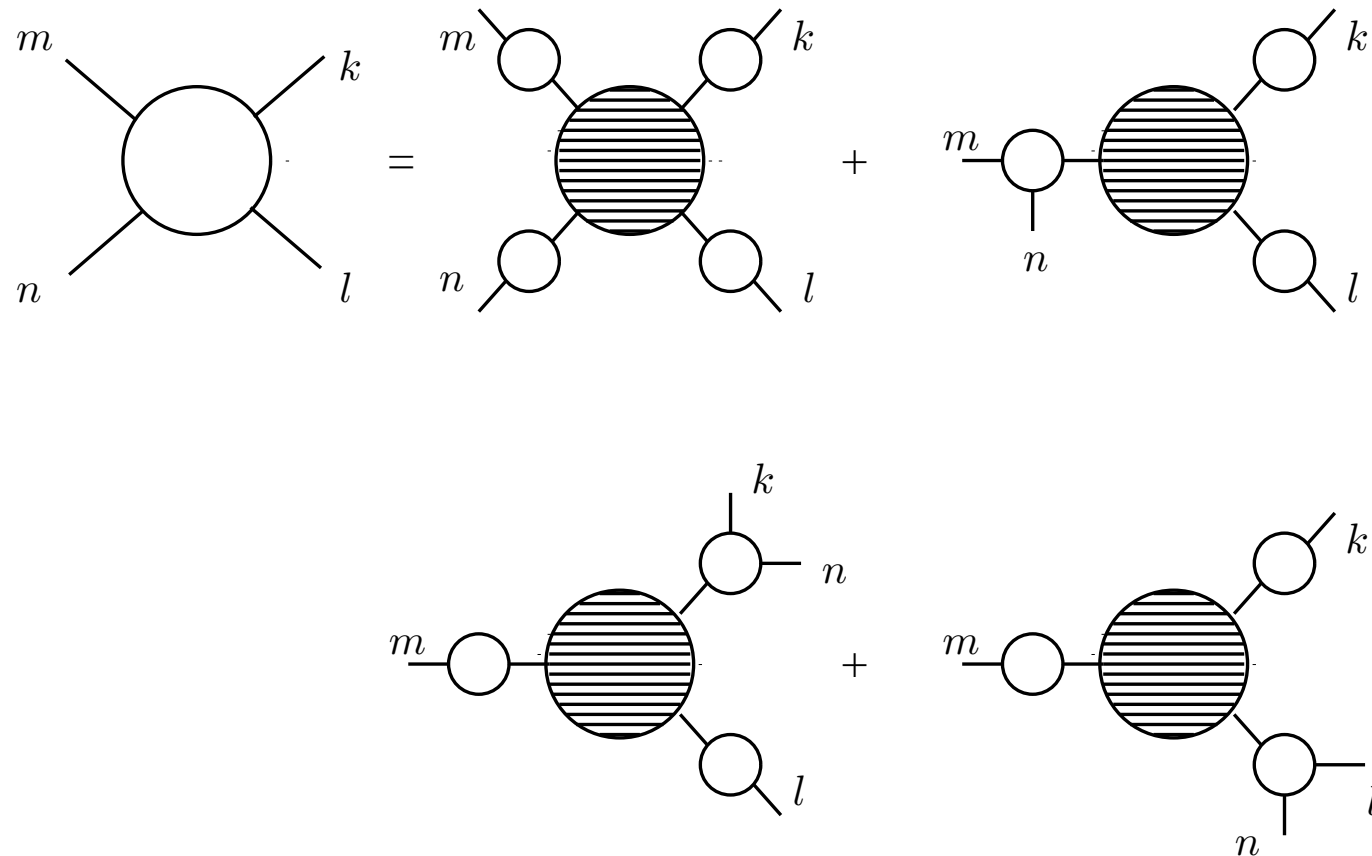


o que mostra que $\Gamma_{mkl}^{(3)}$ é de facto a função de Green própria com 3 pernas exteriores porque para 3 pernas as funções próprias e truncadas coincidem. Para se ver que se trata de facto de funções próprias e não somente truncadas, é preciso ir para $n = 4$ pois aí é que começa a diferença.

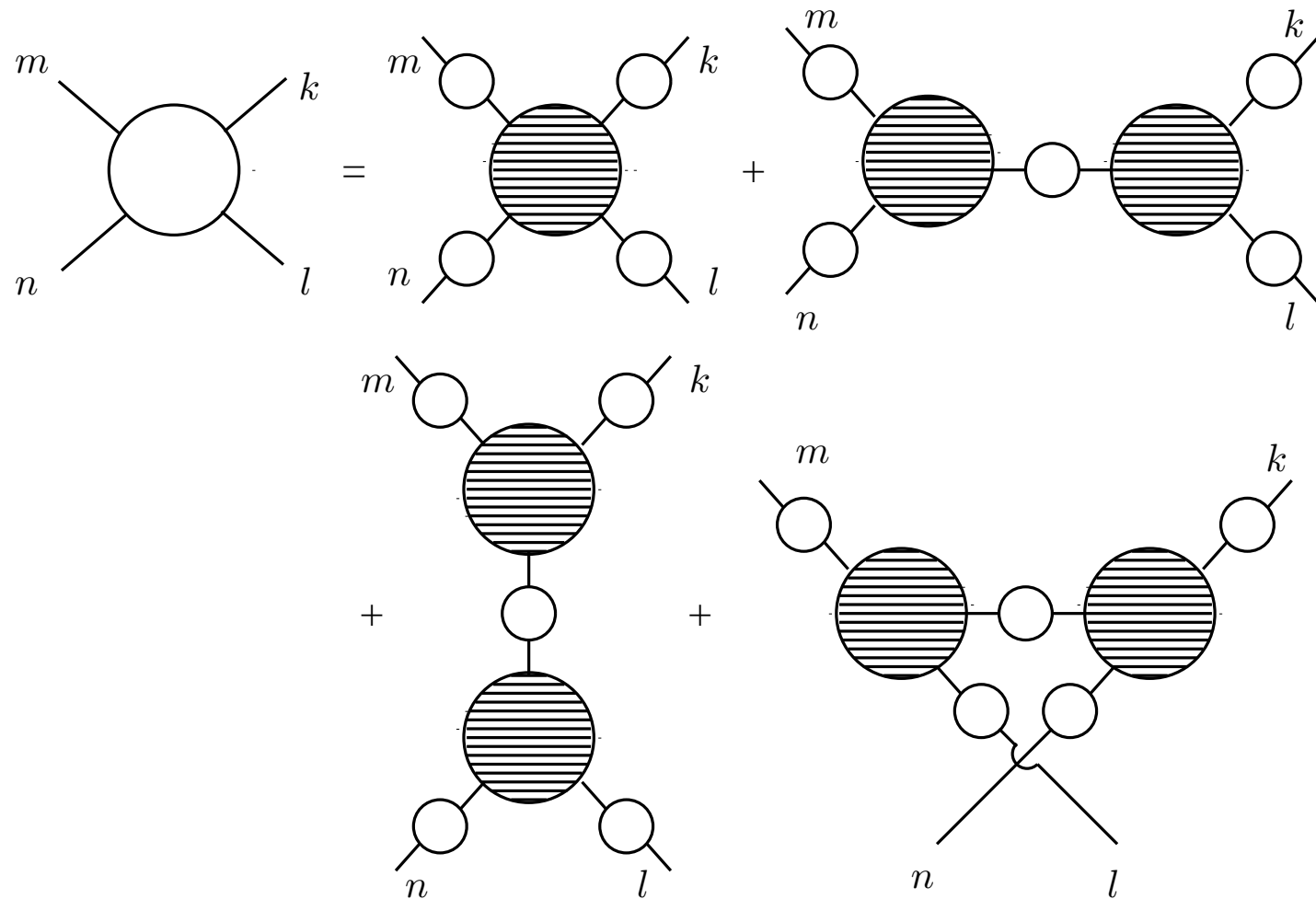
Generating functionals for Green's functions ...

- $n = 4$

Partimos da equação da expressão anterior e derivamos em relação a $\frac{\delta}{i\delta J_n}$. Usando os métodos anteriores obtemos



Se expressarmos $G_{kml}^{(3)}$ em termos de $\Gamma_{kml}^{(3)}$ obtemos a equação diagramática



[Lecture 7](#)
[Functional Methods](#)
[Green's functions](#)
[Generating functionals](#)
[Feynman Rules](#)

- **FR Vertices**

- FR Propagators

[Path integral for GF](#)
[Lecture 8](#)
[Change of variables](#)

The formalism of functional generators allows us to obtain the Feynman rules of any theory with all the correct conventions. We have already shown how to get the Feynman rules in chapter 3. There we used the result that in lowest order (tree level) we have

$$\Gamma_{\text{tree}}(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}[\phi] \equiv \Gamma_0(\phi)$$

Here we are going just to show this result. For the interaction terms ($n > 2$) this is clear. For instance for $n = 3$ we have

$$i\Gamma^{(3)} = G_{\text{tree}}^{(3)}$$

while for $n = 4$ we get

$$i\Gamma^{(4)} = G^{(4)} - \text{irreducible parts}$$

and it is obvious that $i\Gamma_{\text{tree}}^{(4)}$ generates the vertices. The i factor is in agreement with the usual conventions for the Feynman rules as it comes from the term $\exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\right)$ in the calculation of the Green functions.

For the quadratic terms we have,

$$\Gamma_{\text{tree}}^{(2)}(p) = p^2 - m^2$$

therefore, doing the inverse Fourier transform,

$$\Gamma_{\text{tree}}^{(2)}(x, y) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i(p_1 \cdot x + p_2 \cdot y)} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) (p_1^2 - m^2)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \phi(x) \Gamma_{\text{tree}}^{(2)}(x, y) \phi(y) &= \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i(p_1 \cdot x + p_2 \cdot y)} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) (p_1^2 - m^2) \phi(x) \phi(y) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x \phi(x) (-\square - m^2) \phi(x) = \frac{1}{2} \int d^4 x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \end{aligned}$$

which shows that Γ_{tree} is in fact the action. In getting this we have done an integration by parts and discarded, usual, the boundary term.

Começemos por recordar os resultados conhecidos para sistemas com 1 grau de liberdade. No Apêndice A faz-se uma introdução à quantificação via integral de caminho. Lá poderão ser encontradas as justificações para os resultados que usaremos no seguimento. O resultado fundamental é para a amplitude de transição

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = N \int \mathcal{D}(q) e^{i \int_t^{t'} dt L(q, \dot{q})} = N \int \mathcal{D}(q) e^{iS}$$

onde N é um factor de normalização e $\mathcal{D}(q)$ é uma forma simbólica de representar a medida de integração que é de facto um limite complicado (ver Apêndice A). Outro resultado importante diz respeito aos elementos de matriz do produto ordenado no tempo de operadores. Seja

$$O(t_1, \dots, t_n) = T[O_1^H(t_1) O_2^H(t_2) \dots O_n^H(t_n)]$$

tal que

$$t' \geq (t_1, t_2, \dots, t_n) \geq t$$

Então

$$\langle q'; t' | O(t_1, \dots, t_n) | q; t \rangle = N \int \mathcal{D}(q) O_1(q(t_1)) \cdots O_n(q(t_n)) e^{iS}$$

onde se admitiu que os operadores O_i são diagonais no espaço das coordenadas. Para a generalização à Teoria do Campo os objectos importantes não são as amplitudes de transição mas as funções de Green e os seus funcionais geradores. Consideremos por exemplo a função de Green

$$G(t_1, t_2) \equiv \langle 0 | T(Q^H(t_1)Q^H(t_2)) | 0 \rangle$$

onde $|0\rangle$ é o estado de base e $Q^H(t)$ é o operador coordenada na representação de Heisenberg. Para escrevermos esta equação em termos dum integral de caminho introduzimos conjuntos completos de estados e escrevemos

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \int dq dq' \langle 0 | q'; t' \rangle \langle q'; t' | T(Q^H(t_1)Q^H(t_2)) | q; t \rangle \langle q; t | 0 \rangle \\ &= \int dq dq' \phi_0(q', t') \phi_0^*(q, t) \int \mathcal{D}(q) q(t_1) q(t_2) e^{i \int_t^{t'} L d\tau} \end{aligned}$$

[Lecture 7](#)
[Functional Methods](#)
[Green's functions](#)
[Generating functionals](#)
[Feynman Rules](#)
[Path integral for GF](#)

- **Path Integral QM**

- Field theory

[Lecture 8](#)
[Change of variables](#)

onde

$$\phi_0(q, t) = \langle 0|q; t\rangle = \phi_0(q)e^{-iE_0t}$$

A presença na expressão 1 das funções onda do estado base torna a expressão pouco prática. Podemos removê-los do modo seguinte. Consideremos o elemento de matriz

$$\begin{aligned} & \langle q'; t' | O(t_1, t_2) | q; t \rangle \\ &= \int dQ dQ' \langle q'; t' | Q'; T' \rangle \langle Q'; T' | O(t_1, t_2) | Q; T \rangle \langle Q; T | q; t \rangle \end{aligned}$$

onde

$$O(t_1, t_2) = T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))$$

$$t' \geq T' \geq (t_1, t_2) \geq T \geq t$$

Sejam $|n\rangle$ os estados próprios com energia E_n e função de onda $\phi_n(q)$ isto é

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$\langle q|n\rangle = \phi_n^*(q)$$

Então

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | Q'; T' \rangle &= \langle q' | e^{-iH(t'-T')} | Q' \rangle \\ &= \sum_n \langle q' | n \rangle \langle n | e^{-iH(t'-T')} | Q' \rangle \\ &= \sum_n \phi_n^*(q') \phi_n(Q') e^{-iE_n(t'-T')} \end{aligned}$$

Consideremos agora o limite $t' \rightarrow -i\infty$. Então

$$\lim_{t' \rightarrow -i\infty} \langle q'; t' | Q'; T' \rangle = \phi_0^*(q') \phi_0(Q') e^{-E_0|t'|} e^{iE_0 T'}$$

De modo semelhante

$$\lim_{t \rightarrow i\infty} \langle Q; T | q; t \rangle = \phi_0(q) \phi_0^*(Q) e^{-E_0|t|} e^{-iE_0T}$$

Aplicando estes limites obtemos

$$\begin{aligned} & \lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} \langle q'; t' | O(t_1 t_2) | q; t \rangle \\ &= \int dQ dQ' \phi_0^*(q') \phi_0(Q') e^{-E_0|t'|} e^{iE_0T'} \\ & \quad \langle Q'; T' | O(t_1, t_2) | Q; T \rangle \phi_0(q) \phi_0^*(Q) e^{-E_0|t|} e^{-iE_0T} \\ &= \phi_0^*(q') \phi_0(q) e^{-E_0|t'|} e^{-E_0|t|} \\ & \quad \int dQ dQ' \phi_0(Q', T') \phi_0^*(Q, T) \langle Q'; T' | O(t_1, t_2) | Q; T \rangle \end{aligned}$$

Usando a definição da Função de Green obtemos o resultado importante

$$\lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} \langle q'; t' | O(t_1 t_2) | q; t \rangle = \phi_0^*(q') \phi_0(q) e^{-E_0|t'|} e^{-E_0|t|} G(t_1, t_2)$$

Por outro lado

$$\lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} \langle q'; t' | q; t \rangle = \phi_0^*(q') \phi_0(q) e^{-E_0|t'|} e^{E_0|t|}$$

pelo que finalmente podemos escrever

$$G(t_1, t_2) = \lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} \left[\frac{\langle q'; t' | T(Q^H(t_1) Q^H(t_2)) | q; t \rangle}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \right]$$

Podemos finalmente escrever $G(t_1, t_2)$ em termos dum integral de caminho

$$G(t_1, t_2) = \lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} \frac{1}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \int \mathcal{D}(q) q(t_1) q(t_2) e^{i \int_t^{t'} L d\tau}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating
functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

• Path Integral QM

• Field theory

Lecture 8

Change of variables

Este resultado é facilmente generalizado para funções de Green com n -pontos,

$$\begin{aligned}
 G(t_1, \dots, t_n) &= \langle 0 | T(q(t_1) \cdots q(t_n)) | 0 \rangle \\
 &= \lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} \frac{1}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \int \mathcal{D}(q) q(t_1) \cdots q(t_n) e^{i \int_t^{t'} L d\tau}
 \end{aligned}$$

É agora fácil de ver que todas as funções de Green podem ser obtidos a partir do funcional gerador

$$Z[J] = \lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} \frac{1}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \int \mathcal{D}(q) e^{i \int_t^{t'} [L(q, \dot{q}) + Jq] d\tau}$$

por derivação funcional

$$G(t_1, \dots, t_n) = \left. \frac{\delta^n Z[J]}{i\delta J(t_1) \cdots i\delta J(t_n)} \right|_{J=0}$$

A expressão para o funcional gerador mostra que ele é a amplitude de transição entre o estado base no instante t e o estado base no instante t' na presença duma fonte exterior com a normalização $Z[J = 0] = 1$

$$Z[J] = \langle 0 | 0 \rangle_J$$

Para um sistema com n graus de liberdade temos a generalização

$$Z[J_1, \dots, J_n] = \lim_{t' \rightarrow -i\infty} \lim_{t \rightarrow i\infty} N \int \mathcal{D}(q_i) e^{i \int_t^{t'} d\tau [L(q_i, \dot{q}_i) + \sum_{i=1}^N J_i q_i]}$$

Notas

- Na equação anterior os limites nos tempos t e t' são imaginários. Isto quer dizer que as funções de Green bem definidas são as funções de Green Euclidianas. Para a teoria de campos isto corresponde à prescrição $m^2 - i\epsilon$.
- Na equação anterior não escrevemos explicitamente a normalização. Ela é obviamente escolhida para que $Z[0, \dots, 0] = 1$ mas como veremos, para as funções de Green conexas em teoria dos campos a normalização não é relevante pelo que não nos vamos preocupar mais com ela.

Para obter o funcional gerador das funções de Green em Teoria dos Campos procedemos da forma heurística usual

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow x^\mu \\
 q(t) &\rightarrow \phi(x) \\
 \mathcal{D}(q) &\rightarrow \mathcal{D}(\phi) \\
 L(q_i, \dot{q}_i) &\rightarrow \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)
 \end{aligned}$$

Então obtemos

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}(\phi) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J(x)\phi(x)]}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating
functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

• Path Integral QM

• **Field theory**

Lecture 8

Change of variables

- O limite em do tempo imaginário recorda-nos que os integrais têm que se continuar analiticamente para o espaço euclidiano ou equivalentemente que se tem que fazer a prescrição $m^2 - i\epsilon$.
- A expressão anterior é a expressão fundamental que procurávamos para o funcional gerador das funções de Green completas. É fácil de ver que para o funcional gerador das funções de Green conexas

$$W(J) = -i \ln Z(J)$$

- a normalização é irrelevante (pois não depende de J). Uma demonstração mais rigorosa destas expressões pode ser encontrada no Apêndice B .

[Lecture 7](#)

[Functional Methods](#)

[Green's functions](#)

[Generating
functionals](#)

[Feynman Rules](#)

[Path integral for GF](#)

[Lecture 8](#)

- Applications
- PT for $\lambda \phi^4$
- Symmetry factors
- Normal Order
- GF for fermions

[Change of variables](#)

Lecture 8

[Lecture 7](#)

[Functional Methods](#)

[Green's functions](#)

[Generating functionals](#)

[Feynman Rules](#)

[Path integral for GF](#)

[Lecture 8](#)

● **Applications**

● PT for $\lambda\phi^4$

● Symmetry factors

● Normal Order

● GF for fermions

[Change of variables](#)

Uma vez conhecido o funcional gerador $Z[J]$ são conhecidas todas as funções de Green e portanto qualquer problema em Teoria dos Campos. Pode-se então perguntar em que condições é possível calcular $Z[J]$. Como só se sabem fazer exactamente integrais gaussianos a resposta é que só se pode calcular em situações triviais, sem interacções no Lagrangeano. Contudo as vantagens deste formalismo resultam de dois aspectos:

□ *Manipulações formais*

Relações entre funções de Green que tenham a ver com propriedades de simetria (identidades de Ward) são muito facilmente deduzidas por manipulações dos funcionais geradores. Aqui a forma $Z[J]$ em termos do integral de caminho é particularmente útil como veremos nas secções 4 e 5.

□ *Teoria de perturbações*

A expressão para $Z[J]$ permite imediatamente desenvolver a teoria de perturbações.

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

- PT for $\lambda\phi^4$
- Symmetry factors
- Normal Order
- GF for fermions

Change of variables

Como exemplo do ponto *ii)* consideremos o Lagrangeano para um campo escalar que por simplicidade tomaremos real,

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi)$$

onde $\mathcal{L}_0(\phi)$ é quadrático, isto é

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}(\phi) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi) + J\phi]} \\ &= N \int \mathcal{D}(\phi) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_I(\phi)]} e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi]} \end{aligned}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

● Applications

- PT for $\lambda\phi^4$
- Symmetry factors
- Normal Order
- GF for fermions

Change of variables

ou seja

$$Z[J] = \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) \right] Z_0[J]$$

onde

$$Z_0[J] = N \int \mathcal{D}(\phi) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi]} .$$

A utilidade desta expressão resulta do facto de que por um lado $Z_0[J]$ pode ser calculado exactamente, porque é quadrático nos campos, e por outro se $\mathcal{L}_I(\phi)$ tiver um parâmetro pequeno a exponencial pode ser desenvolvida em série nesse parâmetro e o funcional gerador $Z[J]$ obtido até à ordem que se pretender em teoria das perturbações.

Example: perturbation theory for $\lambda\phi^4$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

Para se ver a ligação com os resultados usuais vamos considerar como exemplo a teoria dum campo escalar em que a interacção é

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 .$$

O funcional gerador $Z[J]$ é dado por

$$Z[J] = \mathcal{N} \exp \left\{ (-i\lambda) \frac{1}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right)^4 \right\} Z_0[J]$$

onde (ver problema 5.2)

$$Z_0[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right\}$$

A normalização \mathcal{N} é escolhida para que $Z[0] = 1$, como veremos adiante.

Example: perturbation theory for $\lambda\phi^4$

Desenvolvemos a exponencial em série na constante de acoplamento:

$$Z[J] = \mathcal{N} Z_0[J] \left\{ 1 + (-i\lambda) Z'_1[J] + (-i\lambda)^2 Z'_2[J] + \dots \right\}$$

onde

$$Z'_1[J] \equiv Z_0^{-1}[J] \left\{ \frac{1}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right\} Z^0[J]$$

$$Z'_2[J] \equiv \frac{1}{2} Z_0^{-1}[J] \left\{ \frac{1}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right\}^2 Z^0[J]$$

$$= \frac{1}{2} Z_0^{-1}[J] \left\{ \frac{1}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right\} (Z_0 Z'_1)$$

$$= \frac{1}{2} (Z'_1[J])^2 + \frac{1}{2} Z_0^{-1}[J] \frac{1}{4!} \int d^4x \left\{ 4 \frac{\delta^3 Z_0}{\delta J^3(x)} \frac{\delta Z'_1}{\delta J(x)} \right. \\ \left. + 6 \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J^2(x)} \frac{\delta^2 Z'_1}{\delta J^2(x)} + 4 \frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} \frac{\delta^3 Z'_1}{\delta J^3(x)} + Z_0 \frac{\delta^4 Z'_1}{\delta J^4(x)} \right\}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

- [Lecture 7](#)
- [Functional Methods](#)
- [Green's functions](#)
- [Generating functionals](#)
- [Feynman Rules](#)
- [Path integral for GF](#)
- [Lecture 8](#)
- Applications
- **PT for $\lambda\phi^4$**
- Symmetry factors
- Normal Order
- GF for fermions
- [Change of variables](#)

Obtemos

$$\begin{aligned}
 Z'_1[J] &= \\
 &= \frac{1}{4!} \int d^4x \left[3\Delta(x, x)\Delta(x, x) - 3!\Delta(x, x) \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta(x, y_1)\Delta(x, y_2)J(y_1)J(y_2) \right. \\
 &\quad \left. + \int d^4y_1 \cdots d^4y_4 \Delta(x, y_1)\Delta(x, y_2)\Delta(x, y_3)\Delta(x, y_4)J(y_1)J(y_2)J(y_3)J(y_4) \right]
 \end{aligned}$$

Este resultado pode ser representado diagramaticamente na forma seguinte

$$Z'_1 = \frac{1}{8} \text{ (two circles)} - \frac{1}{4} \text{ (loop)} + \frac{1}{4!} \text{ (cross)}$$

Para Z'_2

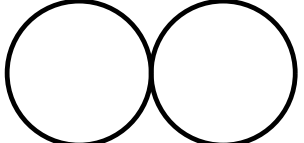
$$\begin{aligned}
 Z'_2[J] &= \frac{1}{2} (Z'_1[J])^2 + \frac{1}{2 \cdot 4!} \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta^4(x_1, x_2) \\
 &+ \frac{3}{2 \cdot 4!} \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta(x_1, x_1) \Delta^2(x_1, x_2) \Delta(x_2, x_2) \\
 &- \frac{1}{2 \cdot 3! \cdot 3!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 \cdots d^4y_6 \Delta(y_1, x_1) \Delta(y_2, x_1) \Delta(y_3, x_1) \\
 &\quad \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_2, y_4) \Delta(x_2, y_5) \Delta(x_2, y_6) J(y_1) \cdots J(y_6) \\
 &+ \frac{2}{4!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 \cdots d^4y_4 \Delta(y_1, x_1) \Delta(x_1, x_1) \Delta(x_1, x_2) \\
 &\quad \Delta(x_2, y_2) \Delta(x_2, y_3) \Delta(x_2, y_4) J(y_1) \cdots J(y_4) \\
 &+ \frac{3}{2 \cdot 4!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 \cdots d^4y_4 \Delta(y_1, x_1) \Delta(y_2, x_1) \Delta^2(x_1, x_2) \\
 &\quad \Delta(x_2, y_3) \Delta(x_2, y_4) J(y_1) \cdots J(y_4) \\
 &- \frac{1}{8} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \Delta(y_1, x_1) \Delta(x_1, x_1) \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_2, x_2) \Delta(x_2, y_2) J(y_1) J(y_2) \\
 &- \frac{1}{8} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \Delta(y_1, x_1) \Delta^2(x_1, x_2) \Delta(x_2, x_2) \Delta(x_1, y_2) J(y_1) J(y_2) \\
 &- \frac{1}{12} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \Delta(y_1, x_1) \Delta^3(x_1, x_2) \Delta(x_2, y_2) J(y_1) J(y_2)
 \end{aligned}$$

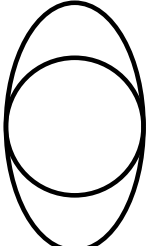
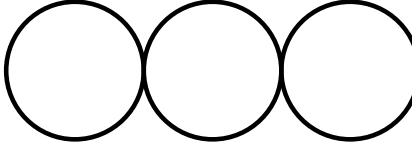
Example: perturbation theory for $\lambda\phi^4$

Vamos agora calcular a normalização até à segunda ordem em teoria de perturbações. Para isso a condição $Z[0] = 1$ dá:

$$1 = \mathcal{N} [1 + (-i\lambda)n_1 + (-i\lambda)^2 n_2 + \dots]$$

onde

$$n_1 = \frac{1}{8} \text{  }$$

$$n_2 = \frac{1}{2} n_1^2 + \frac{1}{2 \cdot 4!} \text{  } + \frac{3}{2 \cdot 4!} \text{  }$$

- [Lecture 7](#)
- [Functional Methods](#)
- [Green's functions](#)
- [Generating functionals](#)
- [Feynman Rules](#)
- [Path integral for GF](#)
- [Lecture 8](#)
- Applications
- **PT for $\lambda\phi^4$**
- Symmetry factors
- Normal Order
- GF for fermions
- [Change of variables](#)

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

Obtemos portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{1}{1 + (-i\lambda)n_1 + (-i\lambda)^2 n_2 + \dots} \\ &= 1 - (-i\lambda)n_1 - (-i\lambda)^2(n_2 - n_1^2) + \dots \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} Z[J] &= Z_0[J] \left\{ 1 - (-i\lambda)n_1 - (-i\lambda)^2(n_2 - n_1^2) + \dots \right\} \\ &\quad \left\{ 1 + (-i\lambda)Z'_1 + (-i\lambda)^2 Z'_2 + \dots \right\} \\ &= Z_0[J] \left\{ 1 + (-i\lambda)(Z'_1 - n_1) + (-i\lambda)^2(Z'_2 - n_2 + n_1^2 - n_1 Z'_1) + \dots \right\} \end{aligned}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

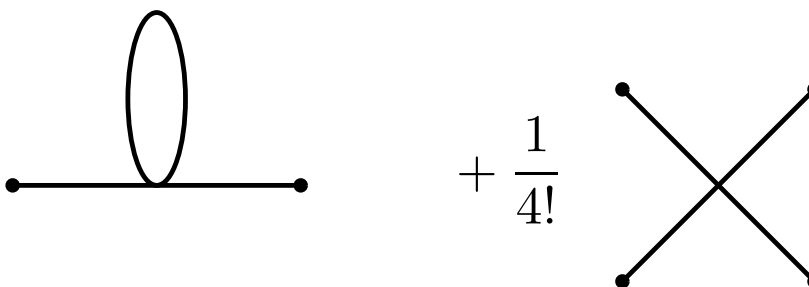
Change of variables

Definindo agora

$$Z_1 \equiv Z'_1 - n_1$$

$$Z_2 \equiv Z'_2 - n_2 + n_1^2 - n_1 Z'_1 = Z'_2 - n_2 - n_1 Z_1$$

obtemos

$$Z_1[J] = -\frac{1}{4} \text{ (diagram with loop)} + \frac{1}{4!} \text{ (diagram with cross)}$$


Example: perturbation theory for $\lambda\phi^4$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

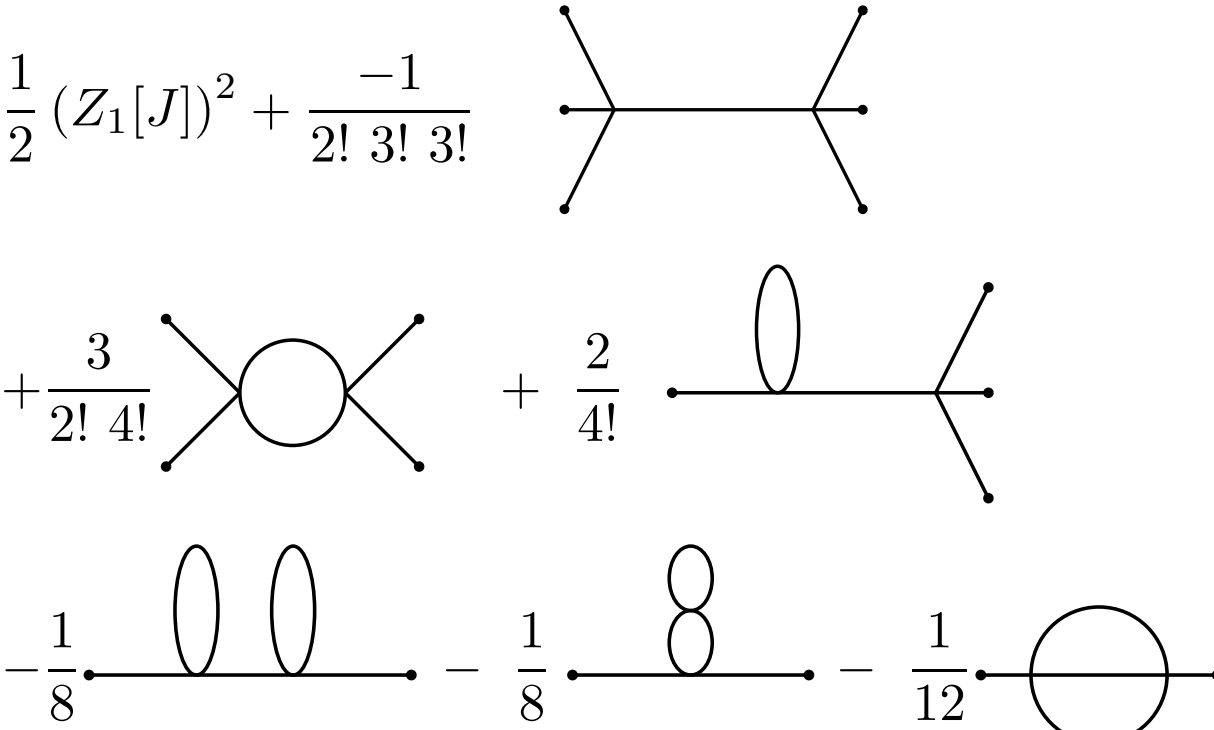
• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

$$\begin{aligned}
 Z_2[J] = & \frac{1}{2} (Z_1[J])^2 + \frac{-1}{2! 3! 3!} \text{diagram} \\
 & + \frac{3}{2! 4!} \text{diagram} + \frac{2}{4!} \text{diagram} \\
 & - \frac{1}{8} \text{diagram} - \frac{1}{8} \text{diagram} - \frac{1}{12} \text{diagram}
 \end{aligned}$$


com $Z_1[0] = Z_2[0] = 0$.

Logo o funcional gerador

$$Z[J] = Z_0[J] \{ 1 + (-i\lambda)Z_1[J] + (-i\lambda)^2 Z_2[J] + \dots \}$$

é automaticamente normalizado se desprezarmos todas as amplitudes vácuo-vácuo, designadas por *bubbles*. Para verificarmos que a expressão anterior reproduz os resultados da teoria de perturbações usual calculemos como exemplo o propagador até à ordem λ^2 . Obtemos

$$\begin{aligned} \Delta'(x_1, x_2) &= \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{i\delta J(x_1)i\delta J(x_2)} \right|_{J=0} \\ &= - \left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \right|_{J=0} - (-i\lambda) \left. \frac{\delta^2 Z_1[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \right|_{J=0} - (-i\lambda)^2 \left. \frac{\delta^2 Z_2[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \right|_{J=0} \\ &= \Delta(x_1, x_2) + (-i\lambda) \frac{1}{2} \int d^4 y \Delta(x_1, y) \Delta(x_2, y) \Delta(y, y) \\ &\quad + (-i\lambda)^2 \int d^4 y_1 d^4 y_2 \left[\frac{1}{4} \Delta(x_1, y_1) \Delta(y_1, y_1) \Delta(y_1, y_2) \Delta(y_2, y_2) \Delta(y_2, x_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \Delta(x_1, y_1) \Delta^2(y_1, y_2) \Delta(y_2, y_2) \Delta(y_1, x_2) + \frac{1}{6} \Delta(x_1, y_1) \Delta^3(y_1, y_2) \Delta(y_2, x_2) \right] \end{aligned}$$

Em termos diagramáticos temos a situação da Figura

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \frac{1}{2} \text{Diagram 3} \\
 & + \frac{1}{4} \text{Diagram 4} + \frac{1}{4} \text{Diagram 5} + \frac{1}{6} \text{Diagram 6}
 \end{aligned}$$

The diagrams are:

- Diagram 1: A circle with two external lines labeled x_1 and x_2 .
- Diagram 2: A straight line with two external lines labeled x_1 and x_2 .
- Diagram 3: A loop (circle) attached to a straight line with two external lines labeled x_1 and x_2 .
- Diagram 4: Two separate loops attached to a straight line with two external lines labeled x_1 and x_2 .
- Diagram 5: Two loops stacked vertically on a straight line with two external lines labeled x_1 and x_2 .
- Diagram 6: A circle with two external lines labeled x_1 and x_2 , where the circle is split by the line.

Example: perturbation theory for $\lambda\phi^4$

Continuando a estudar o exemplo da teoria $\lambda\phi^4$ passemos a analisar o funcional gerador das funções de Green conexas $W[J]$. É fácil de ver que termos do tipo $Z_1^2[J]$ correspondem a diagramas desconexos contidos em $Z[J]$. Vamos ver que elas desaparecem no funcional $W[J]$. Temos

$$\begin{aligned}
 iW[J] &= \ln Z[J] = \\
 &= \ln Z_0[J] + \ln \{ 1 + (-i\lambda)Z_1[J] + (-i\lambda)^2 Z_2[J] + \dots \} \\
 &= iW_0[J] + (-i\lambda)Z_1[J] - \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 (Z_1[J])^2 + (-i\lambda)^2 Z_2[J] + \dots \\
 &= iW_0[J] + (-i\lambda)Z_1[J] + \left\{ -i\lambda)^2 (Z_2[J] - \frac{1}{2} (Z_1[J])^2) \right\} + \dots \\
 &\equiv i \{ W_0[J] + (-i\lambda)W_1[J] + (-i\lambda)^2 W_2[J] + \dots \}
 \end{aligned}$$

com

$$iW_1[J] = Z_1[J] \quad iW_2[J] = Z_2[J] - \frac{1}{2} (Z_1[J])^2$$

Portanto os diagramas desconexos contidos em $Z_2[J]$ são subtraídos e W_1 e W_2 contém somente diagramas conexos como seria de esperar.

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

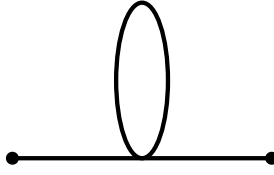
• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

Symmetry factors

Depois de efectuar as derivadas em ordem a J para obter numa dada função de Green os números que resultam são os chamados factores de simetria. Por exemplo para a correcção a $1-loop$ ao propagador obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta'(x_1, x_2) &= \left. \frac{\delta^2 Z}{i\delta J(x_1)i\delta J(x_2)} \right|_{J=0} = \\
 &= \left. \frac{\delta^2 Z_0}{i\delta J(x_1)i\delta J(x_2)} \right|_{J=0} + (-i\lambda) \left. \frac{\delta^2 Z_1}{i\delta J(x_1)i\delta J(x_2)} \right|_{J=0} + \dots \\
 &= \Delta(x_1, x_2) + \frac{1}{2} \text{ (diagrama)} + \dots
 \end{aligned}$$


The diagram shows a horizontal line with two dots at its ends, representing a propagator. A vertical oval loop is attached to the middle of this line, representing a self-energy correction.

O factor $\frac{1}{2}$ é o factor de simetria correspondente àquele diagrama. Como vimos o método de obter as funções de Green a partir do funcional gerador *automaticamente* dá os estes factores correctos. Contudo na maior parte das aplicações é mais fácil aplicar directamente as regras de Feynman e então uma regra para os factores de simetria deve ser fornecida.

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• **Symmetry factors**

• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

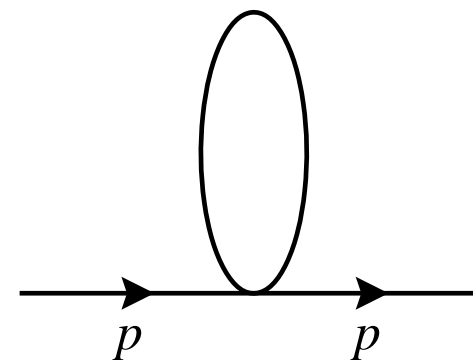
O factor de simetria S dum dado diagrama é dado por

$$S = \frac{N}{D}$$

onde N é o $\#$ de maneiras diferentes de formar o diagrama e D é o produto dos factores de simetrias de cada vértice e do número de permutações de vértices iguais.

Como exemplo consideremos o diagrama que contribui para o propagador a *1-loop*. Então de acordo com a regra obtemos

$$S = \frac{4 \times 3}{4!} = \frac{1}{2}$$



A comment on the normal ordering

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda \phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

- No exemplo anterior diagramas, que designamos genericamente por “*tadpoles*”, ligando campos que pertencem ao mesmo vértice enquanto que no formalismo canónico usual estão excluídos devido ao ordenamento normal.
- Esta diferença deve-se ao facto de não termos sido muito rigorosos na definição do integral de caminho. Se o tivéssemos feito chegaríamos à conclusão que para obter a expressão do Lagrangeano a incluir em $e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)}$ teríamos primeiro que ordenar normalmente o Lagrangeano Quântico e só então efectuar a transcrição para os campos clássicos do integral de caminho. Isto faz com que o Lagrangeano $\mathcal{L}(\phi)$ usado no integral de caminho seja diferente do Lagrangeano para a teoria clássica.
- Vejamos o exemplo de ϕ^4 . Vamos usar as relações

$$\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) =: \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) : + \langle 0 | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) | 0 \rangle$$

ou, mais simbolicamente,

$$: \hat{\phi}^2 := \hat{\phi}^2 - \langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle .$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

- Applications
- PT for $\lambda \phi^4$
- Symmetry factors
- **Normal Order**
- GF for fermions

Change of variables

De modo semelhante

$$\hat{\phi}^4 =: \hat{\phi}^4 : + 6 : \hat{\phi}^2 : \langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle + 6 \langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle$$

e portanto obtemos

$$: \hat{\phi}^4 := \hat{\phi}^4 - 6 : \hat{\phi}^2(x) : \langle 0 | \hat{\phi}^2(x) | 0 \rangle - 6 \left(\langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle \right)^2$$

ou ainda

$$: \hat{\phi}^4 := \hat{\phi}^4 - 6 \hat{\phi}^2 \langle 0 | \hat{\phi}^2 | 0 \rangle$$

Isto quer dizer que o Lagrangeano quântico se escreve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Int}^Q &= -\frac{\lambda}{4!} : \hat{\phi}^4 : \\ &= -\frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}^4 + \frac{\lambda}{4} \hat{\phi}^2 I \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I &\equiv \langle 0 | \hat{\phi}^2(x) | 0 \rangle \\ &= \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \langle 0 | (a^\dagger(k_1)e^{ik_1 \cdot x} + a(k_1)e^{-ik_1 \cdot x}) (a^\dagger(k_2)e^{ik_2 \cdot x} + a(k_2)e^{-ik_2 \cdot x}) | 0 \rangle \\ &= \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \langle 0 | a(k_1)a^\dagger(k_2) | 0 \rangle e^{i(k_2 - k_1) \cdot x} \\ &= \int d\tilde{k}_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \end{aligned}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

Change of variables

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

- Applications
- PT for $\lambda\phi^4$
- Symmetry factors
- **Normal Order**
- GF for fermions

Change of variables

Na expressão anterior usámos as relações

$$[a(k), a^+(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\omega_k = \sqrt{k_0^2 + |\vec{k}|^2}$$

O integral I é divergente e é igual ao integral do *loop* da Figura. De facto

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{i}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} = I \end{aligned}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

- Applications
- PT for $\lambda\phi^4$
- Symmetry factors
- Normal Order
- GF for fermions

Change of variables

Portanto se tivéssemos sido cuidadosos teríamos que incluir o termo $\frac{\lambda}{4}\phi^2 I$ na interacção. O Lagrangeano a introduzir na exponencial do integral de caminho seria então

$$\mathcal{L}_{Int}^{IC} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda}{4}\phi^2 I$$

É fácil de ver que o termo adicional cancela o *tadpole*. De facto temos

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: a tadpole loop on a horizontal line} \quad + \quad \text{Diagram: a horizontal line with a cross} \quad = \\
 & \frac{1}{2} \quad + \quad \text{---} \times \text{---} \quad = \\
 & = \frac{i}{p^2 - m^2} \left[-i\frac{\lambda}{2} I + i\frac{\lambda}{2} I \right] \frac{i}{p^2 - m^2} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

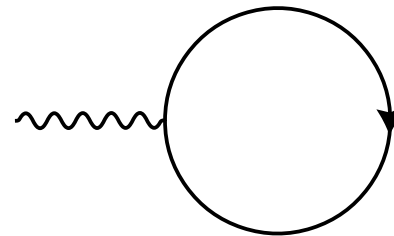
A comment on the normal ordering ...

e portanto os *tadpoles* não apareceriam. Contudo muitas vezes não nos preocupamos em usar o Lagrangeano correcto e usamos simplesmente o Lagrangeano clássico pois a contribuição do *tadpole* é uma renormalização da massa (infinita) e pode assim ser sempre reabsorvida no processo de renormalização.

Para *QED* o mesmo se passa, isto é, devíamos usar como Lagrangeano de interacção

$$\mathcal{L}_{Int}^{IC} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + eA_\mu \langle 0 | \bar{\psi}\gamma^\mu\psi | 0 \rangle$$

e o segundo termo removeria o *tadpole* representado na Figura



No entanto, devido à invariância de Lorentz da teoria, pode-se mostrar que este *tadpole* é zero em todas as ordens e portanto não nos temos que preocupar.

[Lecture 7](#)

[Functional Methods](#)

[Green's functions](#)

[Generating functionals](#)

[Feynman Rules](#)

[Path integral for GF](#)

[Lecture 8](#)

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• GF for fermions

[Change of variables](#)

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

• Applications

• PT for $\lambda\phi^4$

• Symmetry factors

• Normal Order

• **GF for fermions**

Change of variables

Para sistemas de fermiões introduzimos variáveis de Grassman. Estas variáveis anticomutativas são de alguma forma o limite clássico dos campos quânticos fermiônicos. Os detalhes desta construção estão explicados nos Apêndices A e B. Aqui apenas recordamos as nossas convenções. Devido ao carácter anticomutativo é necessário explicitar a ordem da derivação. Assim

- As derivadas são esquerdas

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} \int d^4y \bar{\eta}(y) \psi(y) = \psi(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)} \int d^4y \bar{\psi}(y) \eta(y) = -\bar{\psi}(x)$$

- Nas funções de Green a ordem de derivação é

$$\begin{aligned}
 G^{2n}(x_1, \dots, y_n) &= \langle 0 | T \psi(x_1) \cdots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \cdots \bar{\psi}(y_n) | 0 \rangle \\
 &\equiv \frac{\delta^{2n} Z[\eta, \bar{\eta}]}{i\delta\eta(y_n) \cdots i\delta\eta(y_1) i\delta\bar{\eta}(x_n) \cdots i\delta\bar{\eta}(x_1)} \\
 &\equiv \frac{\delta}{i\delta\eta(y_n)} \cdots \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x_1)} Z[\eta, \bar{\eta}]
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 Z[\eta, \bar{\eta}] &= \langle 0 | T e^{i \int d^4x [\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]} | 0 \rangle \\
 &= \int \mathcal{D}(\psi, \bar{\psi}) e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]}
 \end{aligned}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

● Introduction

- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

- Uma das grandes vantagens de ter uma expressão para o funcional gerador $Z[J]$ em termos dum integral de caminho é que um grande número de manipulações familiares para integrais usuais (mudança de variáveis de integração, integração por partes ...) podem agora ser aqui aplicadas. Vamos ver as consequências da mudança de variáveis de integração.
- Consideremos uma transformação infinitesimal da forma

$$\phi_i \rightarrow \phi_i + \varepsilon F_i(\phi)$$

onde

$$F_i(\phi) = f_i + f_{ij}\phi_j + \dots$$

Então devemos ter

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\phi) &\rightarrow \mathcal{D}(\phi) \det \left| \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\delta F_i}{\delta \phi_j} \right| \\ &= \mathcal{D}(\phi) \left(1 + \varepsilon \frac{\delta F_i}{\delta \phi_i} \right) \end{aligned}$$

- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

- Por outro lado

$$e^{i(S(\phi)+J_i\phi_i)} \rightarrow e^{i(S(\phi)+J_i\phi_i)} \left[1 + i\varepsilon \left(\frac{\delta S}{\delta\phi_i} + J_i \right) F_i(\phi) \right]$$

- Como $Z(J)$ deverá ser independente de transformação de variáveis obtemos

$$0 = \int \mathcal{D}(\phi) \left[i \left(\frac{\delta S}{\delta\phi_i} + J_i \right) F_i + \frac{\delta F_i}{\delta\phi_i} \right] e^{i(S[\phi]+J_i\phi_i)}$$

Usando $\phi_i \rightarrow \frac{\delta}{i\delta J_i}$ obtemos a expressão mais compacta

$$\left\{ i \left[\frac{\delta S}{\delta\phi_i} \left(\frac{\delta}{i\delta J_i} \right) + J_i \right] F_i \left(\frac{\delta}{i\delta J_i} \right) + \frac{\delta F_i}{\delta\phi_i} \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) \right\} Z(J) = 0$$

- Esta é a expressão geral que vamos aplicar a dois casos particulares importantes, as equações de Dyson-Schwinger e as identidades de Ward.

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

• Introduction

• **Dyson-Schwinger**

• Self-energy in ϕ^3

• Self-energy in ϕ^4

• Ward identities

- Seja $F_i = f_i$ independente de ϕ_i , isto é uma simples translação dos campos. Então a equação anterior escreve-se

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] + J_i \right) Z(J) = 0$$

que, como veremos, é a expressão da equação de Dyson-Schwinger (DS) para o funcional gerador das funções de Green completas.

- Assim as equações de DS não são mais do que uma consequência da invariância dos integrais de caminho para translações. A equação anterior pode-se ainda escrever

$$J_k = -\frac{1}{Z} E \left[\frac{\delta}{i\delta J_k} \right] Z[J]$$

onde o funcional $E[\phi]$ é a equação de movimento,

$$E[\phi_k] \equiv \frac{\delta S}{\delta \phi_k} .$$

- [Lecture 7](#)
- [Functional Methods](#)
- [Green's functions](#)
- [Generating functionals](#)
- [Feynman Rules](#)
- [Path integral for GF](#)
- [Lecture 8](#)
- [Change of variables](#)
- [• Introduction](#)
- [• **Dyson-Schwinger**](#)
- [• Self-energy in \$\phi^3\$](#)
- [• Self-energy in \$\phi^4\$](#)
- [• Ward identities](#)

□ Para muitas aplicações é mais conveniente escrever as equações de Dyson-Schwinger para as funções de Green conexas e próprias. Para isso temos de escrever a equação equivalente para os funcionais W e Γ

□ **Funções de Green conexas.** Usando a identidade

$$\frac{1}{Z} \frac{\delta}{i\delta J_k} (Z[J]f[J]) = \left(\frac{\delta iW}{i\delta J_k} + \frac{\delta}{i\delta J_k} \right) f[J]$$

Podemos escrever

$$\frac{1}{Z} E \left[\frac{\delta}{i\delta J_k} \right] Z[J] = E \left[i \frac{\delta W}{i\delta J_k} + \frac{\delta}{i\delta J_k} \right] 1$$

Portanto a equação de DS para o funcional gerador das funções de Green conexas escreve-se simplesmente

$$J_k = -E \left[i \frac{\delta W}{i\delta J_k} + \frac{\delta}{i\delta J_k} \right] 1$$

- Lecture 7
- Functional Methods
- Green's functions
- Generating functionals
- Feynman Rules
- Path integral for GF
- Lecture 8
- Change of variables
 - Introduction
 - **Dyson-Schwinger**
 - Self-energy in ϕ^3
 - Self-energy in ϕ^4
 - Ward identities

□ Funções de Green próprias

Mais útil é a equação de DS para as funções de Green próprias ou irreduzíveis. Para isso utilizamos as relações

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_k = \frac{i \delta W}{i \delta J_k} & J_k = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_k} \\ \frac{\delta}{i \delta J_k} = G_{km} \frac{\delta}{\delta \phi_m} & \frac{\delta}{\delta \phi_k} = -i \Gamma_{kr} \frac{\delta}{i \delta J_r} \end{array} \right.$$

e obtemos

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_k} = E \left[\phi_k + G_{km} \frac{\delta}{\delta \phi_m} \right] 1$$

É nesta forma que as equações de DS são mais úteis.

Example : Self-energy in ϕ^3

A acção para esta teoria escreve-se, usando a notação compacta

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi_k (-\square - m^2) \delta_{km} \phi_m - \frac{\lambda}{3!} (\phi_k)^3$$

logo

$$E[\phi_k] = (-\square - m^2) \phi_k - \frac{\lambda}{2} (\phi_k)^2$$

e portanto

$$E \left[\phi_k + G_{km} \frac{\delta}{\delta \phi_m} \right] 1 = -(\square + m^2) \phi_k - \frac{\lambda}{2} \left(\phi_k + G_{kr} \frac{\delta}{\delta \phi_r} \right) \phi_k$$

[Lecture 7](#)

[Functional Methods](#)

[Green's functions](#)

[Generating functionals](#)

[Feynman Rules](#)

[Path integral for GF](#)

[Lecture 8](#)

[Change of variables](#)

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- **Self-energy in ϕ^3**
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

Obtemos

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_k} = -(\square + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{2} (\phi_k^2 + G_{kr}\delta_{rk})$$

Derivando funcionalmente em relação a ϕ_m obtemos as equações de DS para diversas funções de Green. Por exemplo para a self-energy obtemos

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_k\delta\phi_m} = -(\square + m^2)\delta_{km} - \frac{\lambda}{2} (2\phi_k\delta_{km} - i\Gamma_{mn}G_{krn}\delta_{rk})$$

Pondo $\phi_k = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{km} - (-\square - m^2)\delta_{km} &= i\frac{\lambda}{2} \Gamma_{mn}G_{krn}\delta_{rk} \\ &= \frac{\lambda}{2} \Gamma_{mn}G_{krn}\Gamma_{rs}G_{sk} \\ &= i\frac{\lambda}{2} \Gamma_{mn}\Gamma_{rs}G_{sk}G_{kk'}G_{rr'}G_{nn'}\Gamma_{k'r'n'} \\ &= -i\frac{\lambda}{2} G_{kk'}G_{ks}\Gamma_{k'sm} \end{aligned}$$

Example : Self-energy in ϕ^3

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

onde se usou repetidamente a relação

$$\Gamma_{ij} G_{jk} = i\delta_{ik}$$

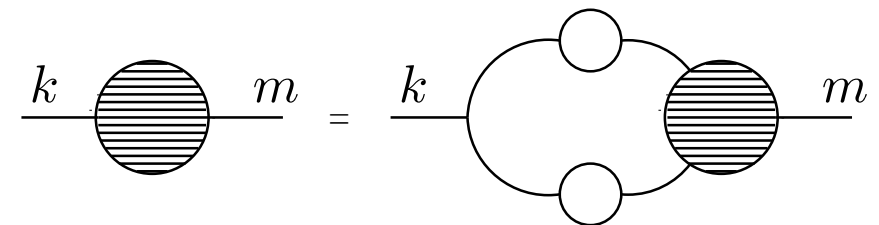
Mas por definição de self-energy

$$\Gamma_{km} - (-\square - m^2)\delta_{km} \equiv -\Sigma_{km}$$

e portanto

$$-i\Sigma_{km} = -i\frac{\lambda}{2} G_{kk'} G_{ks} i\Gamma_{k'sm}$$

como mostrado na figura



Como vemos a equação de DS não é mais que a afirmação que o vértice na teoria é $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$.

Example: Self-energy in ϕ^4

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

Neste caso a acção escreve-se

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi_k (-\square - m^2) \delta_{km} \phi_m - \frac{\lambda}{4!} (\phi_k)^4 .$$

Logo a equação de movimento é

$$E[\phi] = (-\square - m^2) \phi_k - \frac{\lambda}{3!} (\phi_k)^3 .$$

Portanto

$$\begin{aligned} E \left[\phi_k + G_{km} \frac{\delta}{\delta \phi_m} \right] 1 &= -(\square + m^2) \phi_k - \frac{\lambda}{3!} \left(\phi_k + G_{km} \frac{\delta}{\delta \phi_m} \right) \left(\phi_k + G_{kn} \frac{\delta}{\delta \phi_n} \right) \phi_k \\ &= -(\square + m^2) \phi_k - \frac{\lambda}{3!} \left(\phi_k + G_{km} \frac{\delta}{\delta \phi_m} \right) (\phi_k^2 + G_{kn} \delta_{nk}) \\ &= -(\square + m^2) \phi_k - \frac{\lambda}{3!} (\phi_k^3 + \phi_k G_{kn} \delta_{nk} + 2G_{km} \phi_k \delta_{km} \\ &\quad - iG_{km} \Gamma_{ml} G_{knl} \delta_{nk}) \end{aligned}$$

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- **Self-energy in ϕ^4**
- Ward identities

Obtemos

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_k} = -(\square + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{3!} (\phi_k^3 + \phi_k G_{kn}\delta_{nk} + 2G_{km}\phi_k\delta_{km} - iG_{km}\Gamma_{ml}G_{knl}\delta_{nk})$$

Para obter a equação de DS para a self-energy derivamos em ordem a ϕ_j e fazemos $\phi_i = 0$ depois de derivar. Obtemos assim

$$\begin{aligned} \Gamma_{kj} &= (-\square - m^2)\delta_{kj} \\ &= -\frac{\lambda}{3!} (G_{kn}\delta_{nk}\delta_{kj} + 2G_{km}\delta_{km}\delta_{kj} - iG_{km}\Gamma_{mlj}G_{knl}\delta_{nk} \\ &\quad - G_{kmp}\Gamma_{pj}\Gamma_{ml}G_{knl}\delta_{nk} - G_{km}\Gamma_{ml}G_{knlp}\Gamma_{pj}\delta_{nk}) \end{aligned}$$

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

Logo

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_{kj} &= -i\frac{\lambda}{2}G_{kk}\delta_{kj} + i\frac{\lambda}{3!}G_{km}i\Gamma_{mlj}G_{kk'}G_{nn'}G_{ll'}i\Gamma_{k'n'l'}\delta_{nk} \\
 &\quad + i\frac{\lambda}{3!}G_{kk'}G_{mm'}G_{pp'}i\Gamma_{k'm'p'}\Gamma_{pj}\Gamma_{ml}G_{kk''}G_{nn'}G_{ll'}i\Gamma_{k''n'l'}\delta_{nk} \\
 &\quad + i\frac{\lambda}{3!}G_{km}\Gamma_{ml}G_{knlp}\Gamma_{pj}\delta_{nk} \\
 &= -i\frac{\lambda}{2}G_{kk}\delta_{kj} + i\frac{\lambda}{3!}\delta_{kl}\delta_{nk}G_{knlp}i\Gamma_{pj}
 \end{aligned}$$

Para a teoria ϕ^4 temos $\Gamma_{ijk} = 0$ pelo que

$$G_{knlp} = G_{kk'}G_{nn'}G_{ll'}G_{pp'}i\Gamma_{k'n'l'p'}$$

e obtemos

$$-i\Sigma_{kj} = -i\frac{\lambda}{2}G_{kk}\delta_{kj} - i\frac{\lambda}{3!}G_{kk'}G_{kn'}G_{kl'}i\Gamma_{k'n'l'j}$$

Example: Self-energy in ϕ^4

que representamos diagramaticamente na Figura

$$\begin{array}{c} k \\ \text{---} \end{array} \text{ (shaded circle) } \begin{array}{c} j \\ \text{---} \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{ (loop) } \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \end{array} + \frac{1}{3!} \begin{array}{c} \text{ (3 loops) } \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \end{array}$$

Novamente a equação de DS mais não é que um identificação do vértice da teoria.

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

Seja uma teoria com uma simetria qualquer. Essa simetria é expressa pela invariância da acção

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i} F_i(\phi) = 0$$

onde considerámos a transformação infinitesimal definida anteriormente. Se esta expressão deixar invariante a medida $\mathcal{D}(\phi)$ então a expressão geral reduz-se a

$$J_i F_i \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] Z(J) = 0$$

Esta expressão é conhecida por *identidade de Ward*. Derivação em ordem às fontes conduz a relações entre as funções de Green que expressam as simetrias da teoria. Para teorias de gauge a expressão é um pouco mais complicada. A razão é que no processo de quantificação das teorias de gauge é normalmente necessário introduzir termos que quebram a simetria para fixar a gauge.

Lecture 7

Functional Methods

Green's functions

Generating functionals

Feynman Rules

Path integral for GF

Lecture 8

Change of variables

- Introduction
- Dyson-Schwinger
- Self-energy in ϕ^3
- Self-energy in ϕ^4
- Ward identities

- Assim podemos escrever

$$S_{eff} = S_I + S_{NI}$$

onde $\frac{\delta S_I}{\delta \phi_i} F_i = 0$ e $\frac{\delta S_{NI}}{\delta \phi_i} F_i \neq 0$. Então se a medida continuar a ser invariante, devemos ter agora a identidade de Ward na forma

$$\left(\frac{\delta S_{NI}}{\delta \phi_i} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] + J_i \right) F_i \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] Z(J) = 0$$

- No próximo capítulo vamos aplicar esta expressão para obter as identidades de Ward para QED e para as teorias de gauge não abelianas. Para estas últimas a questão da invariância da medida é um pouco mais delicada e será aí analisada depois de mostrarmos como se quantificam estas teorias.