Teoria de Campos Avançada
1º Semestre 2013/2014

Está aqui uma descrição dos temas propostos. Deverá escrever um pequeno texto sobre o tema que escolher e fazer uma apresentação oral do mesmo perante os colegas numa sessão a organizar, em Fevereiro. A duração da apresentação oral será no máximo de 30 minutos.

IST, 3 de Janeiro de 2014
Jorge C. Romão

1 O Grupo de Renormalização e Teorias Unificadas

Objectivo: Calcular a evolução das constantes de acoplamento usando o grupo de renormalização no Modelo Standard e no MSSM. O aluno retrá de calcular explicitamente todas as constantes de renormalização relevantes.

Bibliografia:

- *Advanced Quantum Field Theory* , Jorge C. Romão, Capítulo 7.

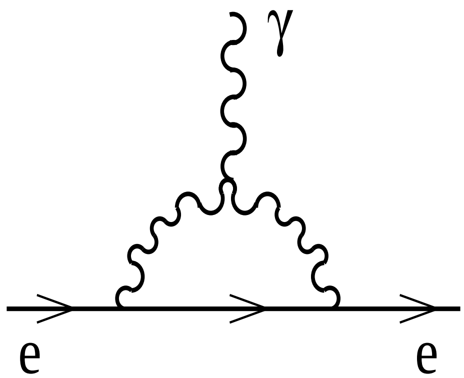
Aluno:

2 QED numa gauge não linear

Considere QED com a condição de gauge não linear

$$F = \partial_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{2}\, A_\mu A^\mu \ .$$

1. Escreva $\mathcal{L}_{eff}$ e mostre que $s\mathcal{L}_{eff} = 0$, onde s é o operador de Slavnov.
2. Escreva as regras de Feynman para os vértices e propagadores novos. Calcule ao nível árvore $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$. Compare com o resultado na gauge linear.
3. Calcule a polarização do vácuo a *1-loop*.
4. Mostre que o diagrama da figura junta potencialmente perigoso para o momento magnético anómalo do electrão não dá contribuição (seria proporcional a λ).



Aluno: Duarte Fontes

3 Polarização do vácuo em QCD

Considere a teoria que descreve as interacções dos quarks com os gluões (QCD) descrita pelo Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{\psi}^\alpha_i (i \not{D} - m_\alpha)_{ij} \psi^\alpha_j$$

onde

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$
$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - ig \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} A^a_\mu \ .$$

O índice $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ referencia os diferentes *sabores* de quarks (*up*,*down*,...,*top*). Para quantificar a teoria considere a condição de gauge

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \ (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \ \ ,$$

para a qual resulta o Lagrangeano dos fantasmas

$$\mathcal{L}_G = \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c$$

Para renormalizar a teoria necessitamos do seguinte Lagrangeano de contratermos:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} \ = \ & -\frac{1}{4}(Z_3 - 1) \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right)^2 - (Z_4 - 1) g f^{abc} \partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b} A^{\nu c} \\
& -\frac{1}{4} g^2 (Z_5 - 1) f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d} A^{\nu e} + \sum_\alpha (Z_2 - 1) i \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha_i \\
& -\sum_\alpha m_\alpha (Z_{m_\alpha} - 1) \overline{\psi}^\alpha_i \psi^\alpha_i + (Z_1 - 1) g \sum_\alpha \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \psi^\alpha_j A^a_\mu \\
& +(Z_6 - 1) \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + (Z_7 - 1) g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ .
\end{aligned}$$

1. Verifique a expressão para $\mathcal{L}_G$.
2. Verifique as regras de Feynman dadas no livro.
3. Calcule a polarização do vácuo.

Aluno: André Patrício

4 Renormalização da Cromodinâmica Quântica (QCD)

Considere a teoria que descreve as interacções dos quarks com os gluões (QCD) descrita pelo Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{\psi}^\alpha_i (i\not{D} - m_\alpha)_{ij} \psi^\alpha_j$$

onde

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \\ (D_\mu)_{ij} &= \delta_{ij} \partial_\mu - ig \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} A^a_\mu \ . \end{aligned}$$

O índice $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ referencia os diferentes *sabores* de quarks (*up*,*down*,...,*top*). Para quantificar a teoria considere a condição de gauge

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \ (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \ ,$$

para a qual resulta o Lagrangeano dos fantasmas

$$\mathcal{L}_G = \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ .$$

Para renormalizar a teoria necessitamos do seguinte Lagrangeano de contratermos:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} \ = \ & -\frac{1}{4}(Z_3 - 1) \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right)^2 - (Z_4 - 1) g f^{abc} \partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b} A^{\nu c} \\ & -\frac{1}{4} g^2 (Z_5 - 1) f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d} A^{\nu e} + \sum_\alpha (Z_2 - 1) i \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha_i \\ & - \sum_\alpha m_\alpha (Z_{m_\alpha} - 1) \overline{\psi}^\alpha_i \psi^\alpha_i + (Z_1 - 1) g \sum_\alpha \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \psi^\alpha_j A^a_\mu \\ & + (Z_6 - 1) \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + (Z_7 - 1) g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ . \end{aligned}$$

1. Mostre que se devem verificar as relações

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{Z_7}{Z_6} = \frac{\sqrt{Z_5}}{\sqrt{Z_3}}$$

2. Calcule Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6 e Z_7 usando subtracção mínima (MS), isto é calcule só a parte divergente dos diagramas. Verifique explicitamente que $Z_1 Z_6 = Z_2 Z_7$.

3. Calcule a contribuição dos fermiões para Z_4 e Z_5. Mostre que estão de acordo com as relações anteriores.

Aluna: Sofia Leitão

5 Renormalização da Electrodinâmica Escalar

Considere a Electrodinâmica Escalar, isto é a teoria da interacção de fotões com partículas escalares carregadas.

1. Escreva o Lagrangeano para esta teoria.
2. Deduza as regras de Feynman.
3. Identifique os diagramas divergentes.
4. Faça a renormalização das auto energias do fotão e da partícula carregada.

Aluno: Richard Brito

6 Renormalização do Modelo de Wess-Zumino

Considere o modelo de Wess e Zumino descrito pelo Lagrangiano seguinte

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A + \tfrac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B + \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\,\partial_\mu \psi - \tfrac{1}{2}m^2 A^2 - \tfrac{1}{2}m^2 B^2 - \tfrac{1}{2}m\overline{\psi}\psi \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{4}\left(A^2+B^2\right)^2 - \frac{m\lambda}{\sqrt{2}}A\left(A^2+B^2\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}A\overline{\psi}\psi + \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}B\overline{\psi}\gamma_5\psi
\end{aligned}
\tag{1}
$$

onde o fermião ψ é uma partícula de Majorana e A e B são campos escalares reais.

1. Deduza as regras de Feynman (não esquecer que o fermião é de Majorana).
2. Identifique os diagramas divergentes.
3. Calcule a auto energia do campo escalar e mostre que as divergências quadráticas cancelam.
4. Para renormalizar o modelo é necessário um lagrangeano de contratermos da forma geral

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\delta Z_A \partial_\mu A \partial^\mu A + \frac{1}{2}\delta Z_B \partial_\mu B \partial^\mu B + \frac{i}{2}\delta Z_\psi \overline{\psi}\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi \\
&\quad - \frac{1}{2}m^2(2\delta Z_m + \delta Z_A)A^2 - \frac{1}{2}m^2(2\delta Z_m + \delta Z_B)B^2 - \frac{1}{2}m(\delta Z_m + \delta Z_\psi)\overline{\psi}\psi \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{4}(2\delta Z_\lambda + 2\delta Z_A)A^4 - \frac{\lambda^2}{4}(2\delta Z_\lambda + 2\delta Z_B)B^4 \\
&\quad - 2\frac{\lambda^2}{4}(2\delta Z_\lambda + \delta Z_A + \delta Z_B)A^2B^2 \\
&\quad - \frac{m\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_m + \delta Z_\lambda + \frac{3}{2}\delta Z_A)A^3 - \frac{m\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_m + \delta Z_\lambda + \frac{1}{2}\delta Z_A + \delta Z_B)AB^2 \\
&\quad - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_\lambda + \frac{1}{2}\delta Z_A + \delta Z_\psi)A\overline{\psi}\psi + \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}(\delta Z_\lambda + \frac{1}{2}\delta Z_B + \delta Z_\psi)B\overline{\psi}\gamma_5\psi
\end{aligned}
$$

   Mostre que as 6 constantes de renormalização estão todas relacionadas, só há uma independente, uma renormalização da função de onda. Para isso calcule todas as constantes em *MS* (subtração mínima).

Aluno:

7 Identitidades de Ward para QED

As identidades de Ward para QED não têm a forma

$$J_i F_i \left[\frac{\partial}{i\partial J} \right] \; Z(J) = 0 \tag{2}$$

onde $\delta\phi_i = F_i[\phi]$ pois

$$S_{GF} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2\xi} \; (\partial \cdot A)^2 \right) \tag{3}$$

não é invariante para transformações de gauge. Introduza o funcional

$$Z'(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega}) \; e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{eff} + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)} \tag{4}$$

onde

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_G \tag{5}$$

e

$$\mathcal{L}_G = -\overline{\omega} \Box \omega \; . \tag{6}$$

onde ω e $\overline{\omega}$ são campos escalares anticomutativos.

a) Mostre que

$$Z'(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) = \mathcal{N} \; Z(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) \tag{7}$$

onde $\mathcal{N}$ não depende das fontes nem dos campos. Explique porque é que esta renormalização (infinita) não afecta o cálculo das funções de Green. Assim tanto Z como Z' servem para o cálculo destas. ßb) Mostre que a medida $\mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega})$ e $\int d^4x \mathcal{L}_{eff}$ são invariantes para a transformação

$$\begin{aligned} &\delta\psi = -ie\omega\theta\psi \qquad \delta\overline{\psi} = ie\overline{\psi}\omega\theta \\ &\delta A_\mu = \partial_\mu \omega\theta \\ &\delta\overline{\omega} = \tfrac{1}{\xi}(\partial \cdot A)\theta \quad \delta\omega = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

onde θ é um parâmetro anticomutativo constante (variável de Grassman). ßc) Introduza fontes anticomutativas para os campos ω e $\overline{\omega}$, isto é

$$\overline{Z}(J_\mu, \eta, \overline{\eta}, \zeta, \overline{\zeta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega}) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{eff} + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + \overline{\omega}\zeta + \overline{\zeta}\omega)} \tag{9}$$

Mostre que

$$\overline{Z}(J_\mu, \eta, \overline{\eta}, \zeta, \overline{\zeta}) = Z_G(\zeta, \overline{\zeta}) \; Z(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) \tag{10}$$

onde

$$Z(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}) \; e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{GF} + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)} \; . \tag{11}$$

Considere os funcionais $\overline{W}$, W_G e W e ainda $\overline{\Gamma}$, Γ_G e Γ definidos de maneira semelhante. Qual a relação entre $\overline{W}$, W_G e W e entre $\overline{\Gamma}$, Γ_G e Γ . ßd) Mostre que a equação de Dyson Schwinger para os campos ω e $\overline{\omega}$ é

$$\frac{\delta\overline{\Gamma}}{\delta\overline{\omega}} = -\Box\omega \; . \tag{12}$$

ße) Mostre que as identidades de Ward se podem agora escrever na forma

$$J_i F_i[\frac{\delta}{i\delta J}]\overline{Z} = 0 \; . \tag{13}$$

Escreva as identidades de Ward para $\overline{\Gamma}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega})$. Mostre que conduzem aos resultados conhecidos ßf) Mostre que um termo de massa para o fotão, embora quebre a simetria de gauge, não estraga as identidades de Ward desde que os fantasmas ω adquiram massa. Se o termo de massa do fotão for $\frac{1}{2}\ \mu^2 A_\mu A^\mu$ qual a massa dos fantasmas?
Aluno: