



# Técnicas Computacionais em Teoria do Campo

Jorge C. Romão

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP

A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

2 de Maio de 2017

## Sumário

FeynCalc

QGRAF

Cálculos  
Numéricos

CalcHEP

- ❑ FeynCalc para calcular traços de matrizes  $\gamma$
- ❑ QGRAF: Como encontrar os diagramas com os factores correctos
- ❑ Integrações numéricas usando a livraria CUBA
- ❑ Cálculos usando CalcHEP

Este é um programa muito ambicioso, que faz a álgebra de Lorentz e Dirac, mas também processos a *one-loop*. Pode ter como input o output de FeynArts. Pode ser obtido em <https://feyncalc.github.io>

## Definições importantes:

- ❑ DiracMatrix[mu]       $\gamma^\mu$
- ❑ DiracSlash[p]       $\not{p}$
- ❑ DiracMatrix[5]       $\gamma_5$
- ❑ MetricTensor[mu, nu]       $g^{\mu\nu}$
- ❑ FourVector[p, mu]       $p^\mu$
- ❑ LeviCivita[a, b, c, d]       $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
- ❑ ScalarProduct[p, q]       $p \cdot q = p^\mu q_\mu$

# FeynCalc: $\mu^- e^- \rightarrow \mu^- e^-$

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_2 + m_e)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\nu] \frac{e^4}{t^2}$$

[Sumário](#)

[FeynCalc](#)

● **Traços Input**

● Traços Output

● Amp Hel. In

● Amp. Hel. Out

[QGRAF](#)

[Cálculos Numéricos](#)

[CalcHEP](#)

```

(***** Programa para calcular os tracos *****)

(* Chamar o FeynCalc *)

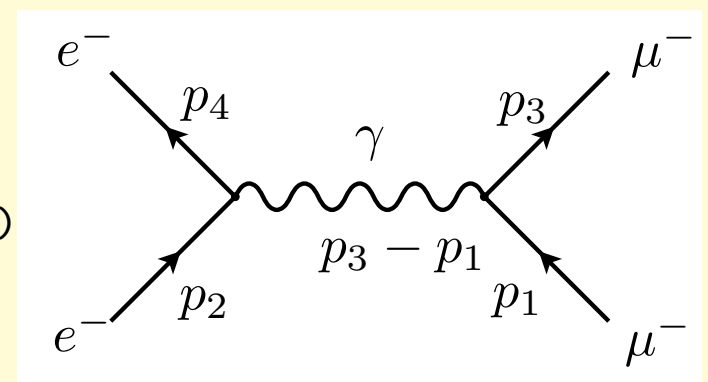
<< HighEnergyPhysics 'FeynCalc'

(* Definicoes para simplificar a escrita *)

dm[mu_] := DiracMatrix[mu]
ds[p_] := DiracSlash[p]
prop[p_, m_] := ds[p] + m

(* Programa *)
Line1 := prop[p4, m2] . dm[mu] . prop[p2, m2] . dm[nu]
Line2 := prop[p3, m1] . dm[mu] . prop[p1, m1] . dm[nu]
ans = Simplify[Contract[Tr[Line1] Tr[Line2]]]
ans = e^4 ans/t^2/4

(***** Fim do Programa *****)
  
```



## Sumário

### FeynCalc

- Traços Input
- **Traços Output**
- Amp Hel. In
- Amp. Hel. Out

### QGraf

### Cálculos Numéricos

### CalcHEP

$$\text{Out [2]} = \frac{8 e^4 (2 m_1^2 m_2^2 - m_2^4 p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 - m_1^2 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4)}{t^2}$$

No endereço <http://porthos.ist.utl.pt/CTQFT> podem ser encontrados programas para calcular os seguintes processos:

- ❑  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  em QED (muemue.m)
- ❑  $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$  em QED (Bhabha.m)
- ❑  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  em QED (eGeG.m)
- ❑  $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$  em QED (eEGG.m)
- ❑  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  no Modelo Standard (eEmM.m)

Podemos usar o FeynCalc para fazer as contas das amplitudes de helicidade. A seguir apresentamos um programa para calcular as amplitudes de helicidade na difusão de Bhabha para fermiões sem massa (Eq. 5.120)

```

(***** Begin Program *****)
(* Definitions *)

dp[s_] := (1 + s DiracMatrix[5])/2
U[p_,s_] := dp[s] . Spinor[p,0]
UBar[p_,s_] := SpinorUBar[p,0] . dp[-s]
Myds[p_] := U[p,1] UBar[p,1] + U[p,-1] UBar[p,-1]
PolS[k_,p_,l_] := 2 ( U[p,1] UBar[k,1] )
                  + 2 ( U[k,-1] UBar[p,-1] )
PolSV[k_,r1_,r2_] := PolS[r1,r2,-1]
gvga = gm dp[-1] + gp dp[1]
GammaGamma[p_,q_,s_] := 2 ( U[q,s] UBar[p,s] )
                       + 2 ( U[p,-s] UBar[q,-s] )
delta[s1_,s2_] := If[s1==s2,1,0]

(* Amplitudes *)
M1[s1_,s2_,s3_,s4_] :=
delta[s1,s2] UBar[p3,s3] . GammaGamma[p2,p1,s1] . U[p4,s4]
res1[s1_,s2_,s3_,s4_] := DiracSimplify[DotSimplify[M1[s1,s2,s3,s4]]]/s
  
```

- Sumário

---

- FeynCalc
  - Traços Input
  - Traços Output
  - **Amp Hel. In**
  - Amp. Hel. Out

---

- QGraf

---

- Cálculos Numéricos

---

- CalcHEP

## Sumário

### FeynCalc

- Traços Input
- Traços Output
- Amp Hel. In
- Amp. Hel. Out

### QGRAF

### Cálculos Numéricos

### CalcHEP

```

M2[s1_,s2_,s3_,s4_] :=
delta[s1,s3] UBar[p2,s2] . GammaGamma[p3,p1,s1] . U[p4,s4]
res2[s1_,s2_,s3_,s4_] :=
-DiracSimplify[DotSimplify[M2[s1,s2,s3,s4]]]/t

(* Simplify *)
vlist={p1,p2,p3,p4}

simp1=Table[Spinor[vlist[[i]],0] . Spinor[vlist[[j]],0] ->
sp[vlist[[i]],vlist[[j]]] + spc[vlist[[j]],vlist[[i]]],
{i,1,4},{j,1,4}] /. {sp[p_, p_] -> 0, spc[q_, q_] -> 0}

simp2=Table[Spinor[vlist[[i]],0] . DiracMatrix[5] .
Spinor[vlist[[j]],0] -> -sp[vlist[[i]],vlist[[j]]]
+ spc[vlist[[j]],vlist[[i]]],{i,1,4},{j,1,4}]
/. {sp[p_, p_] -> 0, spc[q_, q_] -> 0}

simp=Flatten[{simp1,simp2}];

M[s1_,s2_,s3_,s4_] :=
Expand[res1[s1,s2,s3,s4]+res2[s1,s2,s3,s4] /. simp]
(***** End Program *****)
  
```

[Sumário](#)

[FeynCalc](#)

- Traços Input
- Traços Output
- Amp Hel. In
- **Amp. Hel. Out**

[QGRAF](#)

[Cálculos Numéricos](#)

[CalcHEP](#)

Obtemos o seguinte output,

```

In [3] := M[1, 1, 1, 1]

Out [3] = 
$$\frac{-2 \operatorname{sp}[p_2, p_3] \operatorname{spc}[p_4, p_1]}{t} + \frac{2 \operatorname{sp}[p_3, p_2] \operatorname{spc}[p_4, p_1]}{s}$$


In [4] := M[1, 1, -1, -1]

Out [4] = 
$$\frac{2 \operatorname{sp}[p_2, p_4] \operatorname{spc}[p_1, p_3]}{s}$$


In [5] := M[-1, -1, 1, 1]

Out [5] = 
$$\frac{2 \operatorname{sp}[p_3, p_1] \operatorname{spc}[p_4, p_2]}{s}$$


```



Sumário

---

FeynCalc

- Traços Input
- Traços Output
- Amp Hel. In
- **Amp. Hel. Out**

---

QGraf

---

Cálculos Numéricos

---

CalcHEP

---

```

In [6] := M[-1, -1, -1, -1]

Out [6] = 
$$\frac{2 \text{ sp}[p1, p4] \text{ spc}[p2, p3]}{s} - \frac{2 \text{ sp}[p1, p4] \text{ spc}[p3, p2]}{t}$$


In [7] := M[1, -1, 1, -1]

Out [7] = 
$$\frac{-2 \text{ sp}[p3, p4] \text{ spc}[p1, p2]}{t}$$


In [8] := M[-1, 1, -1, 1]

Out [8] = 
$$\frac{-2 \text{ sp}[p2, p1] \text{ spc}[p4, p3]}{t}$$

  
```

No endereço <http://porthos.ist.utl.pt/CTQFT> podem ser encontrados programas para calcular os seguintes processos:

- ❑  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$  em QED (SpinorProducts-eEeE.m)
- ❑  $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$  em QED (SpinorProducts-eEGG.m)

[Sumário](#)[FeynCalc](#)[QGRAF](#)[● Model QED](#)[● Bhabha Input](#)[● Bhabha Output](#)[Cálculos  
Numéricos](#)[CalcHEP](#)

Este programa de Paulo Nogueira <http://cfif.ist.utl.pt/~paulo/> escrito em Fortran, permite gerar os diagramas e Feynman para qualquer processo com os factores de simetria correctos. O modelo teórico é metido como input. Por exemplo o ficheiro do modelo para QED é

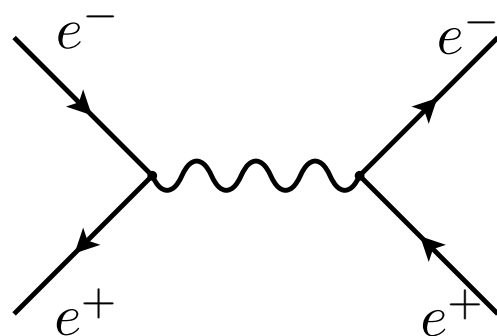
```
***** QGRAF QED Model File *****
* leptons
  [e,E,-]
* photon
  [A,A,+]
* fermion - fermion - photon
  [E,e,A]
***** End of QGRAF QED Model File *****
```

[Sumário](#)[FeynCalc](#)[QGRAF](#)

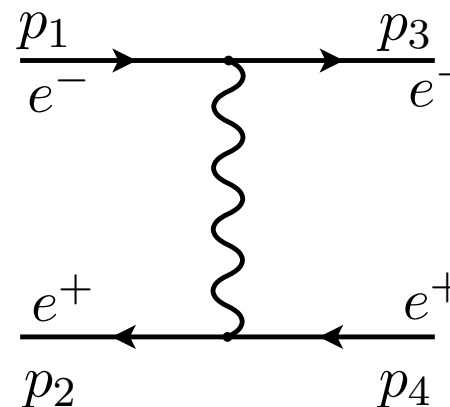
- Model QED

- **Bhabha Input**

- Bhabha Output

[Cálculos Numéricos](#)[CalcHEP](#)

-



```
***** QGRAF input file *****
output= list ;
style= Styles/sum.sty ;
model= Models/qed;
in= e, E;
out=e, E ;
loops= 0;
loop_momentum= ;
options= ;
***** Fim do Programa *****
```

[Sumário](#)

[FeynCalc](#)

[QGRAF](#)

• [Model QED](#)

• [Bhabha Input](#)

• [Bhabha Output](#)

[Cálculos](#)

[Numéricos](#)

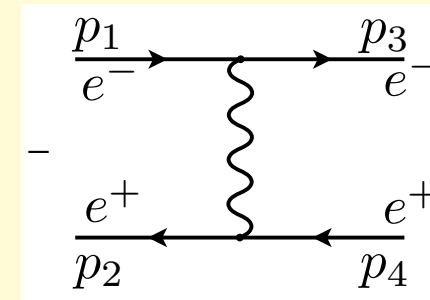
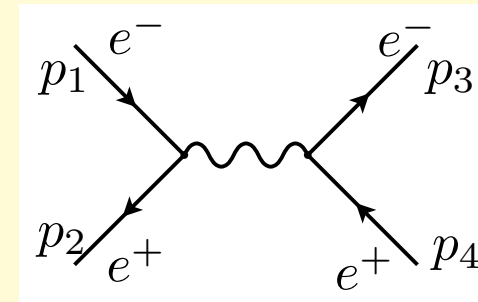
[CalcHEP](#)

```

***** QGRAF ouputut File *****
#
# file generated by qgraf-3.1
#
#
tsum := 0

+(1)*
prop(A(1,-p1-p2),A(2,p1+p2))*
vrtx(E(-3,p2),e(-1,p1),A(1,-p1-p2))*
vrtx(E(-2,-p3),e(-4,-p4),A(2,p1+p2))

-(1)*
prop(A(1,-p1+p3),A(2,p1-p3))*
vrtx(E(-2,-p3),e(-1,p1),A(1,-p1+p3))*
vrtx(E(-3,p2),e(-4,-p4),A(2,p1-p3))
;
# end
  
```



[Sumário](#)[FeynCalc](#)[QGRAF](#)[Cálculos  
Numéricos](#)[• Ref. CM](#)[• Analítico](#)[• Ref. Lab](#)[•  \$\theta\_{\text{Lab}}\$  vs  \$\theta\_{\text{CM}}\$](#) [• Cinemática Lab](#)[• Resultados](#)[CalcHEP](#)

- ❑ Em poucos casos podem os integrais que aparecem no cálculo das secções eficazes ser feitos analiticamente. A maior parte das vezes é necessário usar métodos numéricos para efectuar as integrações.
- ❑ Uma boa biblioteca de programas é o pacote de software CUBA. Pode ser *linked* com programas em C/C++ ou em Fortran. A vantagem é que tem vários métodos com a mesma estrutura de chamada e portanto é muito útil para verificar a precisão dum método. Eu fiz um programa para integrações de Gauss com mesma estrutura e que pode ser muito útil quando temos poucas integrações a fazer.
- ❑ Para ilustrar o modo de como fazer estas integrações, vamos voltar ao processo  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ . Vamos efectuar os cálculos quer no referencial do CM, quer no referencial do Laboratório. Desta maneira verificaremos que a secção eficaz é de facto invariante para transformações de Lorentz segundo a direcção das partículas incidentes.

## $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ : Referencial CM

- ❑ No referencial CM é possível fazer os integrais exactamente.
- ❑ No entanto, o resultado diverge. Esta divergência, designada por *divergência colinear*, aparece por causa do fóton ter massa nula.

$$p_1 = (p_1^0, 0, 0, |\vec{p}_{\text{CM}}|), \quad p_3 = (p_3^0, 0, |\vec{p}_{\text{CM}}| \sin \theta, |\vec{p}_{\text{CM}}| \cos \theta)$$

$$t = (p_3 - p_1)^2 = -2p_{\text{CM}}^2 (1 - \cos \theta_{\text{CM}})$$

o que mostra que se integrarmos  $1/t^2$  no intervalo  $\theta \in [0, \pi]$  o integral diverge.

- ❑ Como experimentalmente os ângulos abaixo dum certo valor limite de  $\theta$  não são acessíveis (corresponderiam a ter o detector dentro dos tubos onde passam os feixes), a solução é integrar a partir dum certo valor. Nos exemplos numéricos vamos tomar

$$\theta_{\text{CM}} > 10^\circ$$

No CM é possível fazer as integrações analíticas até ao fim. Obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2}{(1-x)^2}$$

com  $x = \cos \theta$ , e

$$A_0 = \frac{4\alpha^2}{\pi s} \frac{1}{32s^2 p_{\text{CM}}^4} \left[ m_1^8 + m_2^8 - 2m_2^6 s + 8p_{\text{CM}}^4 s^2 - 2m_2^2 s^3 + 4p_{\text{CM}}^2 s^3 + s^4 \right. \\ \left. - 2m_1^6 (2m_2^2 + s) + 2m_1^4 (3m_2^4 + m_2^2 s - 2s p_{\text{CM}}^2 + s^2) \right. \\ \left. + m_2^4 (-4s p_{\text{CM}}^2 + 2s^2) - 2m_1^2 (2m_2^6 - m_2^4 s + s^3 - 2m_2^2 (2s p_{\text{CM}}^2 + 3s^2)) \right]$$

$$A_1 = \frac{4\alpha^2}{\pi s} \frac{-m_1^4 - m_2^4 + 2m_2^2 s + s^2 + 2m_1^2 (m_2^2 + s)}{8s p_{\text{CM}}^2}$$

$$A_2 = \frac{4\alpha^2}{\pi s} \frac{1}{4}$$

- [Sumário](#)

---

- [FeynCalc](#)

---

- [QGRAF](#)

---

- [Cálculos Numéricos](#)

---

- [Ref. CM](#)
- [Analítico](#)
- [Ref. Lab](#)
- [\$\theta\_{\text{Lab}}\$  vs  \$\theta\_{\text{CM}}\$](#)
- [Cinemática Lab](#)
- [Resultados](#)

---

- [CalcHEP](#)

[Sumário](#)[FeynCalc](#)[QGRAF](#)[Cálculos  
Numéricos](#)[• Ref. CM](#)[• Analítico](#)[• Ref. Lab](#)[•  \$\theta\_{\text{Lab}}\$  vs  \$\theta\_{\text{CM}}\$](#) [• Cinemática Lab](#)[• Resultados](#)[CalcHEP](#)

- ❑ Neste referencial o cálculo já não pode ser facilmente feito duma forma analítica. O integral é uma função muito complicada de  $\theta$ .
- ❑ Há assim que usar métodos numéricos.
- ❑ A dificuldade reside em saber os limites de integração em  $\theta$ . No referencial do laboratório há dois problemas.
  - ◆ O primeiro é saber quanto vale  $\theta_{\text{Lab}}^{\text{min}}$ .
  - ◆ O segundo é saber quanto vale  $\theta_{\text{Lab}}^{\text{max}}$ .



- Sumário

---

- FeynCalc

---

- QGRAF

---

- Cálculos Numéricos

---

- Ref. CM
- Analítico
- Ref. Lab
- $\theta_{\text{Lab}}$  vs  $\theta_{\text{CM}}$
- Cinemática Lab
- Resultados

---

- CalcHEP

□  $\theta_{\text{Lab}}^{\text{min}}$

$$\tan \theta_{\text{Lab}} = \frac{p_{3\text{CM}} \sin \theta_{\text{CM}}}{\gamma (p_{3\text{CM}} \cos \theta_{\text{CM}} + \beta E_{3\text{CM}})} = \frac{\sin \theta_{\text{CM}}}{\gamma \left( \cos \theta_{\text{CM}} + \frac{E_{3\text{CM}}}{E_{2\text{CM}}} \right)}$$

com  $\beta = p_{1\text{CM}}/E_{2\text{CM}}$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  e  $p_{1\text{CM}} = p_{3\text{CM}}$ .

Esta relação permite determinar o valor  $\theta_{\text{Lab}}^{\text{min}}$ . É fácil de ver que este ângulo é muito menor que no CM, devido ao efeito do chamado *boost* de Lorentz contido no factor  $1/\gamma$ .

□  $\theta_{\text{Lab}}^{\text{max}}$

Para determinar o valor máximo de  $\theta_{\text{Lab}}$  calculamos onde a derivada de  $\tan \theta_{\text{Lab}}$  em ordem a  $\theta_{\text{Lab}}$  se anula. Obtemos

$$\sin \theta_{\text{Lab}}^{\text{max}} = \frac{m_2}{m_1}$$

- ◆ Se  $m_2 > m_1$  não há limitações e o ângulo máximo será  $\pi$ . No entanto se  $m_1 > m_2$  há uma limitação. Este resultado relativista é exactamente igual que se obtém em mecânica não relativista.

- Sumário
- FeynCalc
- QGRAF
- Cálculos Numéricos
- Ref. CM
- Analítico
- Ref. Lab
- $\theta_{\text{Lab}}$  vs  $\theta_{\text{CM}}$
- Cinemática Lab
- Resultados
- CalcHEP

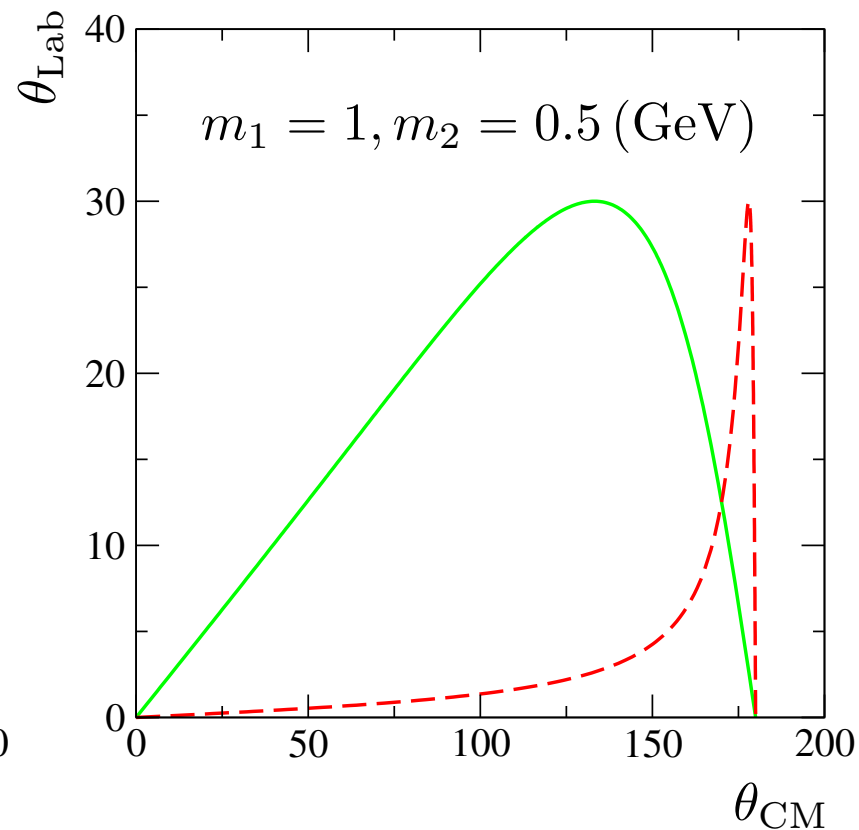
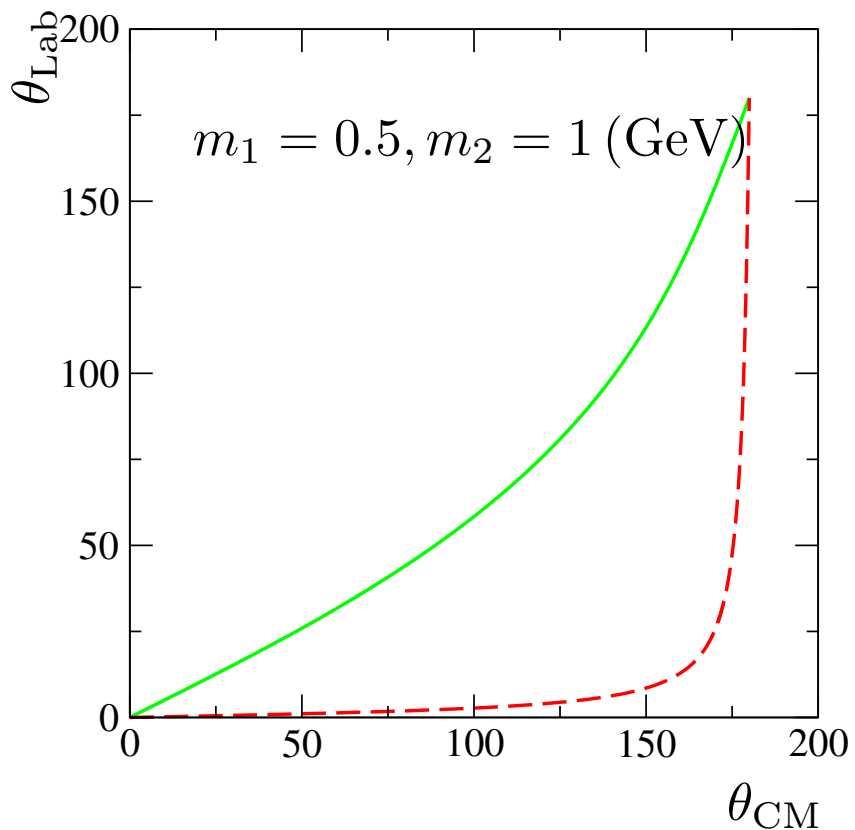


Figura 1:  $\theta_{\text{Lab}}$  em função de  $\theta_{\text{CM}}$  para  $m_1 < m_2$  (figura à esquerda) e para  $m_1 > m_2$  (figura à direita). Os valores das massas são 0.5 e 1 GeV, respectivamente. A curva a cheio corresponde a  $\sqrt{s} = 2$  GeV e a curva a tracejado a  $\sqrt{s} = 50$  GeV.

- Sumário
- FeynCalc
- QGRAF
- Cálculos Numéricos
- Ref. CM
- Analítico
- Ref. Lab
- $\theta_{\text{Lab}}$  vs  $\theta_{\text{CM}}$
- Cinemática Lab
- Resultados
- CalcHEP

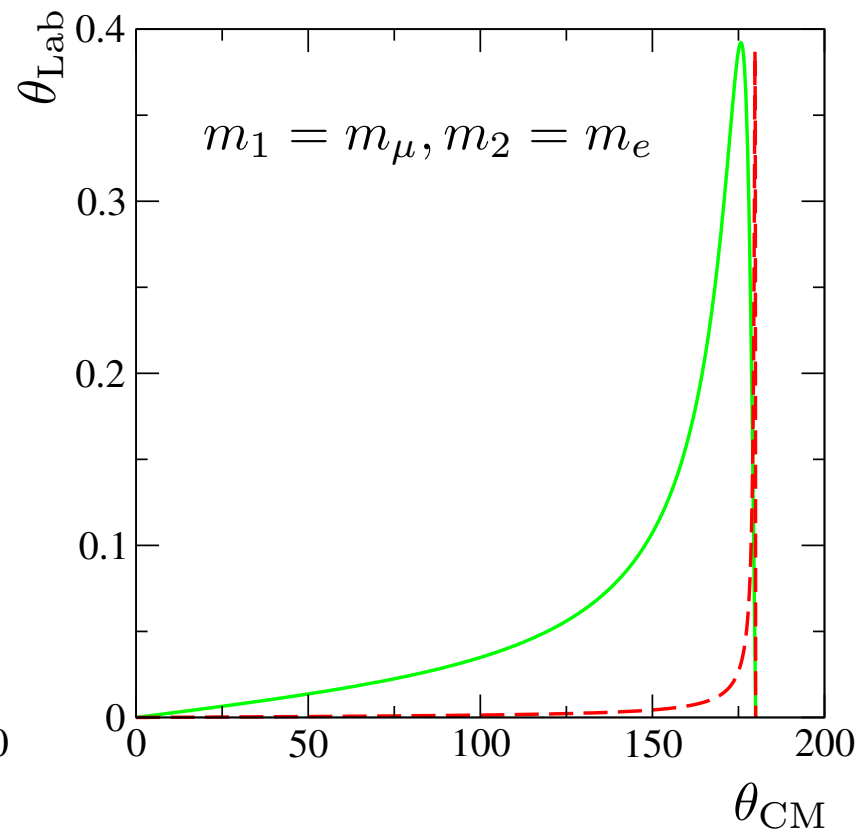
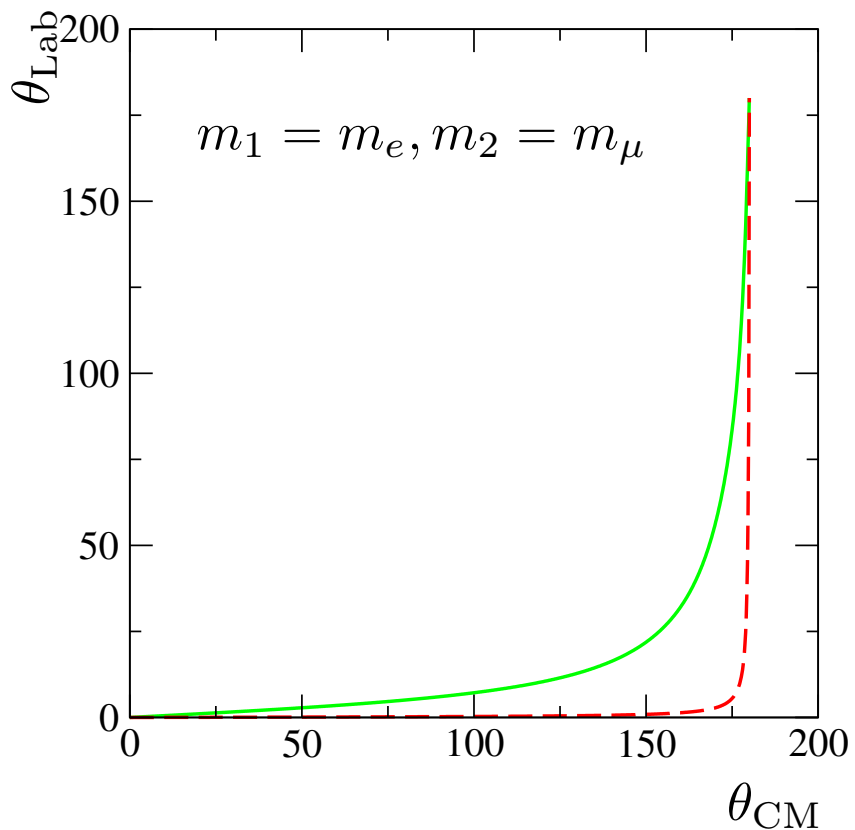
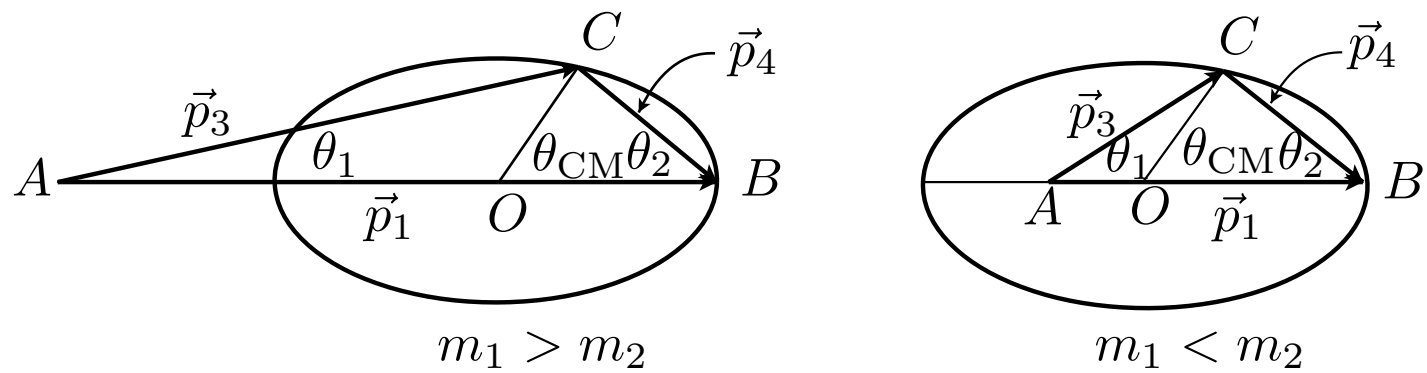


Figura 2:  $\theta_{\text{Lab}}$  em função de  $\theta_{\text{CM}}$  para  $m_1 = m_e < m_2 = m_\mu$  (figura à esquerda) e para  $m_1 = m_\mu > m_2 = m_e$  (figura à direita). A curva a cheio corresponde a  $\sqrt{s} = 2$  GeV e a curva a tracejado a  $\sqrt{s} = 50$  GeV.

- [Sumário](#)
- [FeynCalc](#)
- [QGRAF](#)
- [Cálculos Numéricos](#)
- [Ref. CM](#)
- [Analítico](#)
- [Ref. Lab](#)
- [\$\theta\_{\text{Lab}}\$  vs  \$\theta\_{\text{CM}}\$](#)
- **[Cinemática Lab](#)**
- [Resultados](#)
- [CalcHEP](#)



$$\frac{(p_3^y)^2}{p_{\text{CM}}^2} + \frac{\left( p_3^z - \gamma p_{\text{CM}} \frac{E_{3\text{CM}}}{E_{2\text{CM}}} \right)^2}{(\gamma p_{\text{CM}})^2} = 1$$

[Sumário](#)
[FeynCalc](#)
[QGRAF](#)
[Cálculos  
Numéricos](#)

- Ref. CM
- Analítico
- Ref. Lab
- $\theta_{\text{Lab}}$  vs  $\theta_{\text{CM}}$
- Cinemática Lab
- **Resultados**

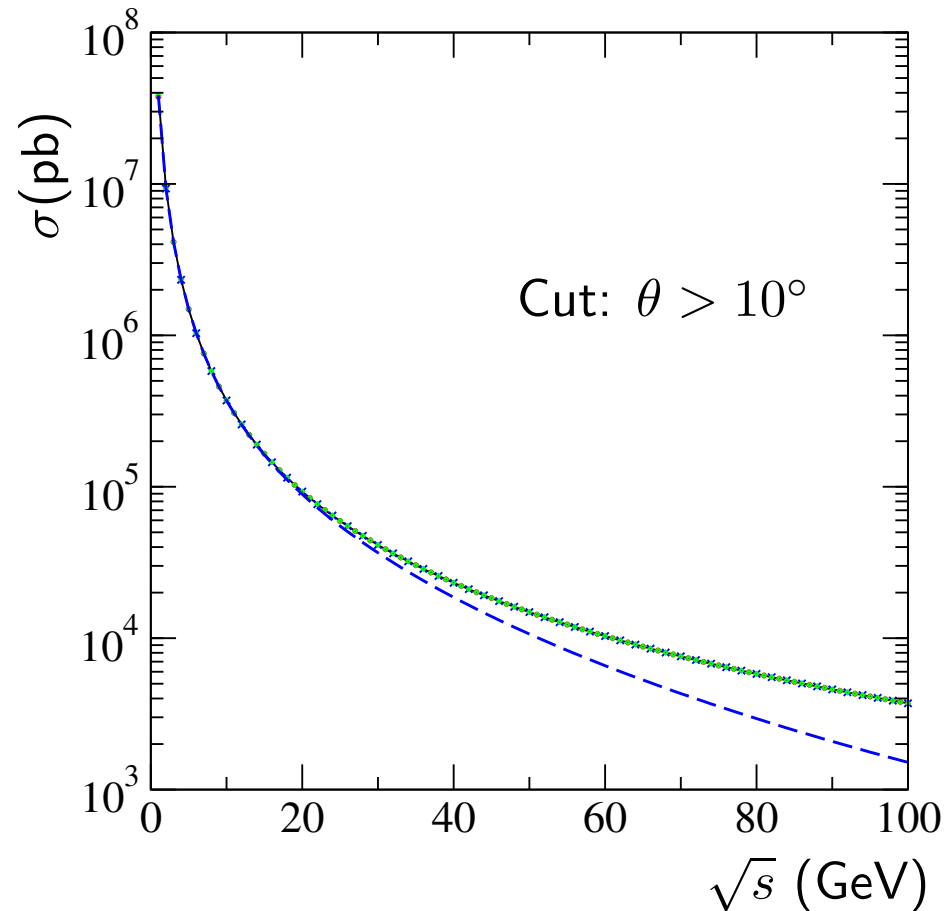
[CalcHEP](#)


Figura 3: a) Resultado analítico exacto (linha a preto) b) Integração de Gauss (círculos vermelhos) c) Integração de Vegas (cruzes azuis) d) Cálculo no referencial do laboratório com dois intervalos de integração (losangos verdes). e) Cálculo no referencial do laboratório só com um intervalo de integração (Gauss com 64 pontos, linha azul a tracejado).

[Sumário](#)[FeynCalc](#)[QGRAF](#)[Cálculos  
Numéricos](#)[CalcHEP](#)[• Resultados](#)

- ❑ CalcHEP é um programa para o cálculo de diagramas de Feynman e integração no espaço de fases das partículas no estado final.
- ❑ O autor é Alexander Pukhov e o programa pode ser obtido na página do autor <http://theory.sinp.msu.ru/pukhov/calchep.html>.
- ❑ A ideia do programa é poder ir directamente do Lagrangiano para as secções eficazes numa forma quase automática.
- ❑ Na minha página <http://porthos.ist.utl.pt/CTQFT> explica-se como usar o programa. Aí podem também ser encontrados alguns programas auxiliares que eu escrevi para usar o programa dum forma mais automática.

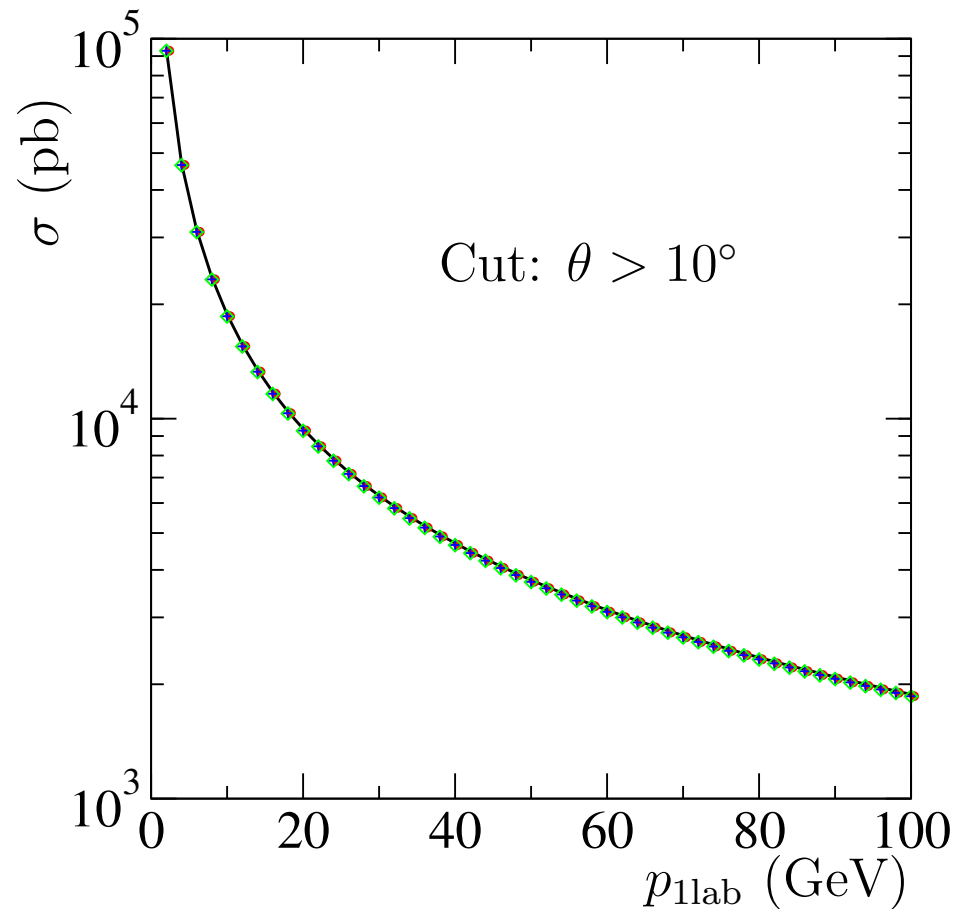
[Sumário](#)
[FeynCalc](#)
[QGRAF](#)
[Cálculos  
Numéricos](#)
[CalcHEP](#)
[● Resultados](#)


Figura 4: a) Resultado analítico exacto (**linha a preto**) b) Integração de Gauss (**círculos vermelhos**) c) Integração de Vegas (**cruzes azuis**) d) Usando CalcHEP (**diamantes verdes**). Neste gráfico  $p_{2\text{Lab}} = 50$  GeV.

A secção eficaz diferencial de Compton (fórmula de Klein-Nishina)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left[ \frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - \sin^2 \theta \right]$$

pode ser integrada nas variáveis angulares para dar

$$\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{m_e^2} \frac{1}{x} \left[ \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2}\right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right]$$

onde

$$x = \frac{2k}{m_e}$$

Podemos assim comparar com o resultado do CalcHEP que calcula a secção eficaz total.



- Sumário
- FeynCalc
- QGRAF
- Cálculos Numéricos
- CalcHEP
- Resultados

