Teoria de Campo – Série 1

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2012/2013

`Entregar até 12/4/2013`

`Versão de 12/03/2013`

1.1 Um feixe de electrões com energia $E_e = 100\,\text{GeV}$, colide frontalmente com um feixe dum laser com energia $E_\gamma = 1$ eV. Qual é a energia dos fotões que são difundidos para trás, isto é, na direcção do feixe de electrões? Nessas condições qual a energia dos electrões?

1.2 Para uma colisão $1 + 2 \to 3 + 4$ podemos definir no referencial do centro de massa (`CM`),

$$P_{\text{CM}} = (\sqrt{s}, \vec{0}) = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

onde $\sqrt{s}$ é a energia total no referencial `CM`. Mostre que,

$$\begin{aligned}
p^0_{1\text{CM}} &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \qquad & p^0_{2\text{CM}} &= \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}} \\
p^0_{3\text{CM}} &= \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \qquad & p^0_{4\text{CM}} &= \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}} \\
|\vec{p}_1|_{\text{CM}} &= \frac{\lambda(\sqrt{s}, m_1, m_2)}{2\sqrt{s}}, \quad & |\vec{p}_3|_{\text{CM}} &= \frac{\lambda(\sqrt{s}, m_3, m_4)}{2\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

onde

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{(x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4y^2 z^2}$$

Nota: Este problema é muito importante e vamos usar estes resultados muitas vezes.

1.3 Considere um electrão descrito pela equação de Dirac. Mostre que no caso do electrão livre se tem,

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})}{dt} = 0$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Qual o significado desta lei de conservação?

Nota: Para um operador $\mathcal{O}$ que não dependa do tempo tem-se

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = i\Big[H, \mathcal{O}\Big]$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema.

1.4 Preencha as entradas da *tabela de multiplicação* das matrizes γ indicada na Tabela 1. Esta tabela torna-se muito útil em cálculos práticos. Para estabelecer a tabela tenha em atenção que qualquer produto de matrizes γ se pode escrever em termos das 16 matrizes independentes e que com as nossas convenções

$$\varepsilon^{0123} = +1\,, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta_2\gamma_2\delta_2} = -\sum_P (-1)^P g^{P[\beta_2}_{\beta_1} g^{\gamma_2}_{\gamma_1} g^{\delta_2]}_{\delta_1}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\,, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma_1\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma_2\delta_2} = -2\left(g^{\gamma_2}_{\gamma_1} g^{\delta_2}_{\delta_1} - g^{\delta_2}_{\gamma_1} g^{\gamma_2}_{\delta_1}\right)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta_2} = -6 g^{\delta_2}_{\delta_1}\,.$$

	1	γ_5	γ^μ	$\gamma_5\gamma^\mu$	$\sigma^{\mu\nu}$
1	1				
γ_5					
γ^α					
$\gamma_5\gamma^\alpha$					
$\sigma^{\alpha\beta}$					

Table 1: Tabela de multiplicação de matrizes γ

Nota: Quando conseguir fazer esta tabela de multiplicação, ficará seguro de que não mais terá problemas com as matrizes gama.

1.5 Demonstre somente duas das nove relações seguintes. Escolha as que quiser.

$$\overline{u}(p,s)u(p,s') = 2m\ \delta_{ss'} \qquad \overline{v}(p,s)v(p,s') = -2m\ \delta_{ss'}$$

$$u^\dagger(p,s)u(p,s') = 2E_p\ \delta_{ss'} \qquad v^\dagger(p,s)v(p,s') = 2E_p\ \delta_{ss'}$$

$$\overline{v}(p,s)u(p,s') = 0 \qquad v^\dagger(p,s)u(-p,s') = 0$$

$$\sum_s [u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p,s)] = (\not{p}+m)_{\alpha\beta} \qquad \sum_s [v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p,s)] = -(-\not{p}+m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s [u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p,s) - v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p,s)] = 2m\ \delta_{\alpha\beta}$$