Teoria do Campo – Série 1

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2011/2012

`Entregar até 13/4/2012`

`Versão de 29/02/2012`

1.1 Um feixe de electrões com energia $E_e = 200\,\text{GeV}$, colide frontalmente com um feixe dum laser com energia $E_\gamma = 1$ eV. Qual é a energia dos fotões que são difundidos para trás, isto é, na direcção do feixe de electrões? Nessas condições qual a energia dos electrões?

1.2 Para uma colisão $1 + 2 \to 3 + 4$ podemos definir no referencial do centro de massa (`CM`),

$$P_{\text{CM}} = (\sqrt{s}, \vec{0}) = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

onde $\sqrt{s}$ é a energia total no referencial `CM`.

a) Mostre que,

$$\begin{aligned}
p^0_{1\text{CM}} &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \qquad & p^0_{2\text{CM}} &= \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}} \\
p^0_{3\text{CM}} &= \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \qquad & p^0_{4\text{CM}} &= \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}} \\
|\vec{p}_1|_{\text{CM}} &= \frac{\lambda(\sqrt{s}, m_1, m_2)}{2\sqrt{s}}, & |\vec{p}_3|_{\text{CM}} &= \frac{\lambda(\sqrt{s}, m_3, m_4)}{2\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

onde

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{(x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4y^2z^2}$$

b) Considere agora a mesma colisão no referencial do laboratório, onde a partícula 2 está em repouso (alvo) e a partícula 1 (feixe) tem energia E_1 e momento linear $\vec{p}_{1\text{Lab}}$. Mostre que a velocidade do referencial `CM` no laboratório satisfaz,

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_{1\text{Lab}}}{E_1 + m_2}, \quad \gamma = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{s}}, \quad s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2\ .$$

Com estas relações podemos obter

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{1\text{CM}} &= \gamma(\vec{p}_{1\text{Lab}} - \vec{\beta} E_1) = \frac{m_2}{\sqrt{s}} \vec{p}_{1\text{Lab}} \\
\vec{p}_{2\text{CM}} &= -\gamma \vec{\beta}\, m_2 = -\frac{m_2}{\sqrt{s}} \vec{p}_{1\text{Lab}}
\end{aligned}$$

e portanto verificar que

$$\vec{p}_{1\text{CM}} + \vec{p}_{2\text{CM}} = 0\ .$$

Nota: Este problema é muito importante e vamos usar estes resultados muitas vezes.

1.3 Preencha as entradas da *tabela de multiplicação* das matrizes γ indicada na Tabela 1. Esta tabela torna-se muito útil em cálculos práticos. Para estabelecer a tabela tenha em atenção que qualquer produto de matrizes γ se pode escrever em termos das 16 matrizes independentes e que com as nossas convenções

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{0123} = +1 \\
&\varepsilon_{\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta_2\gamma_2\delta_2} = -\sum_P (-1)^P g^{P[\beta_2}_{\beta_1} g^{\gamma_2}_{\gamma_1} g^{\delta_2]}_{\delta_1} \\
&\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\
&\varepsilon_{\alpha\beta\gamma_1\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma_2\delta_2} = -2\left(g^{\gamma_2}_{\gamma_1}g^{\delta_2}_{\delta_1} - g^{\delta_2}_{\gamma_1}g^{\gamma_2}_{\delta_1}\right) \\
&\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta_1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta_2} = -6g^{\delta_2}_{\delta_1}
\end{aligned}
$$

	1	γ_5	γ^μ	$\gamma_5\gamma^\mu$	$\sigma^{\mu\nu}$
1	1				
γ_5					
γ^α					
$\gamma_5\gamma^\alpha$					
$\sigma^{\alpha\beta}$					

Table 1: Tabela de multiplicação de matrizes γ

Nota: Quando conseguir fazer esta tabela de multiplicação, ficará seguro de que não mais terá problemas com as matrizes gama.

1.4 Demonstre somente duas das nove relações seguintes. Escolha as que quiser.

$$\overline{u}(p,s)u(p,s') = 2m\ \delta_{ss'}$$

$$\overline{v}(p,s)v(p,s') = -2m\ \delta_{ss'}$$

$$u^\dagger(p,s)u(p,s') = 2E_p\ \delta_{ss'}$$

$$v^\dagger(p,s)v(p,s') = 2E_p\ \delta_{ss'}$$

$$\overline{v}(p,s)u(p,s') = 0$$

$$v^\dagger(p,s)u(-p,s') = 0$$

$$\sum_s [u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p,s)] = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s [v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p,s)] = -(-\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_s [u_\alpha(p,s)\overline{u}_\beta(p,s) - v_\alpha(p,s)\overline{v}_\beta(p,s)] = 2m\ \delta_{\alpha\beta}$$