INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Exame de Teoria do Campo

Curso de Física Tecnológica - 2011/2012 1ª Época (4/6/2012)

I (4 valores)

a) Um feixe de mesões K^+ incide num alvo de hidrogénio líquido para se estudar o processo

$$K^+ + p \to K^+ + p + \pi^+ + \pi^-$$

No referencial do **Lab**, onde o protão está em repouso, determine a energia mínima do feixe de mesões K^+ para que o processo possa ter lugar. Dados: $m_{K^+} = 493$ MeV, $m_p = 938$ MeV, $m_{\pi^\pm} = 140$ MeV.

b) Considere um electrão descrito pela equação de Dirac. Mostre que no caso do electrão livre se tem,

$$\frac{d(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p})}{dt} = 0, \quad \text{onde (rep. de Dirac)} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Qual o significado desta lei de conservação?

c) Considere a igualdade

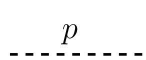
$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = A g^{\mu\nu} + B g^{\mu\nu}\gamma_5 + C\sigma^{\mu\nu} + D\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ \sigma_{\alpha\beta}$$

Determine A, B, C e D.

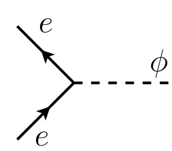
Para os problemas **II**, **III**, **IV** e **V** considere a teoria descrita pelo seguinte Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QED}} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\ \partial^\mu\phi\ - \frac{1}{2}m_\phi^2\ \phi^2 - g\,\overline{\psi}\psi\,\phi$$

onde ϕ é um campo escalar (spin 0) neutro e ψ é o electrão. A constante g não tem dimensões (no sistema $\hbar = c = 1$). Para além de QED, o propagador e o novo vértice são:



$$\frac{i}{p^2 - m_\phi^2}$$



$-i\,g$

II (3 valores)

Para cada um dos processos seguintes:

$$\text{a) } e^- + e^+ \to \phi + \phi, \quad \text{b) } e^+ + \phi \to e^+ + \phi, \quad \text{c) } e^- + e^+ \to \phi + \gamma$$

diga se existem em ordem mais baixa de teoria de perturbações e, em caso afirmativo, desenhe o(s) diagrama(s) de Feynman e escreva as respectivas amplitudes. Não é para calcular as secções eficazes nem os quadrados dos elementos de matriz.

III (4 valores)

Considere o processo $e^- + \phi \to e^- + \gamma$ no quadro do modelo acima descrito.

a) Desenhe o(s) diagrama(s) que contribuem para o processo em ordem mais baixa.

b) Escreva a amplitude para o processo.

c) Mostre que a amplitude é invariante de gauge, isto é, se $\mathcal{M} \equiv \epsilon^\mu(k)\,\mathcal{M}_\mu$ onde k é o 4-momento do fotão, então temos $k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$.

IV (5 valores)

Considere o processo $e^-(p_1) + e^+(p_2) \to \phi(p_3) + \phi(p_4)$ no modelo acima descrito.

a) Desenhe os diagramas que contribuem para o processo em ordem mais baixa.

b) Escreva a amplitude para o processo.

c) Considere que $\sqrt{s} \gg m_e, m_\phi$ e que portanto é uma boa aproximação fazer $m_e = m_\phi = 0$. Nestas condições calcule a secção eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$ no referencial do centro de massa. Verifique que obtém, nos cálculos intermédios,

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |M|^2 = \frac{g^4}{4}\left(\frac{2u}{t} + \frac{2t}{u} - 4\right) = \frac{g^4}{2}\frac{(t-u)^2}{tu}$$

onde as variáveis de Mandelstam são: $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$ e, para o caso sem massa, satisfazem $s + t + u = 0$.

d) Verifique que $d\sigma/d\Omega$ diverge quando $\theta \to 0, \pi$. Essa divergência é física ou tem que ver com as aproximações feitas? Justifique a resposta.

V (4 valores)

Considere as correcções a um *loop* no quadro do modelo acima descrito. Em todas as respostas considere somente os diagramas irredutíveis de uma partícula, isto é, aqueles em que o diagrama não se separa em duas partes pelo corte de uma linha interna. Não é para calcular nada.

a) Desenhe o(s) diagrama(s) para a auto energia do electrão a um *loop*.

b) Desenhe o(s) diagrama(s) para a auto energia do escalar ϕ a um *loop*.

c) Desenhe o(s) diagrama(s) a um *loop* para o vértice $\overline{\psi}\psi\phi$. Discuta o grau superficial de divergência, isto é, conte as potências do momento.

d) Será a teoria renormalizável? Justifique a resposta.

Dados

- Na representação de Dirac temos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

- Para um operador $\mathcal{O}$ que não dependa do tempo tem-se

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = i\big[H, \mathcal{O}\big]$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema.

- O Hamiltoniano para a equação de Dirac livre (sem interacções) é

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

onde $\beta = \gamma^0$ e $\vec{\alpha} = \beta\,\vec{\gamma}$.

- No referencial do CM temos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2\, s}\, \frac{|\vec{p}_{3\mathrm{CM}}|}{|\vec{p}_{1\mathrm{CM}}|}\, \overline{|M|}^2$$

para um processo $p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$.