INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Exame de Teoria do Campo

Curso de Física Tecnológica - 2007/2008 1ª Época (4/7/2008)

I (4 valores)

a) Um feixe de electrões com energia $E_e = 50$ GeV, colide frontalmente com um feixe dum laser com energia $E_\gamma = 1$ eV. Qual é a energia dos fotões que são difundidos para trás, isto é, na direcção do feixe de electrões.

b) Considere a equação de Dirac para um electrão livre de massa m. As soluções de onda plana são estados próprios do Hamiltoniano $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ e do momento $\vec{p}$. Mostre que

$$\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = -2\vec{\alpha} \times \vec{p}, \quad \text{com} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Utilize este resultado para mostrar que o operador helicidade $(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})/|\vec{p}|$ é uma constante do movimento com valores próprios ± 1.

c) Escreva a expressão

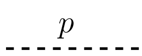
$$\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_5$$

em termos dos elementos da base do espaço das matrizes de Dirac: $I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$, com coeficientes apropriados.

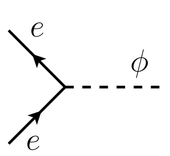
Para os problemas **II**, **III**, **IV** e **V** considere a teoria descrita pelo seguinte Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QED}} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi \, \partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi \, \partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m_\phi^2 \, \phi^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2 \, \chi^2 - \frac{1}{2}\mu \, \phi^2\chi - \beta \, \overline{\psi}\gamma_5\psi \, \phi$$

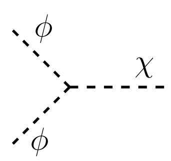
onde ϕ é um campo (pseudo)-escalar (spin 0) neutro, χ é um campo escalar (spin 0) neutro e ψ é o electrão. A constante β não tem dimensões (no sistema $\hbar = c = 1$) e a constante μ tem dimensões duma massa. Para além de QED, os propagadores e os novos vértices são:



$$\frac{i}{p^2 - m_{\phi,\chi}^2}$$



$$-i\,\beta\,\gamma_5$$



$$-i\,\mu$$

II (3 valores)

Para cada um dos processos seguintes:

a) $e^- + e^+ \to \phi + \phi$

b) $e^- + \chi \to e^- + \chi$

c) $e^- + \phi \to e^- + \gamma$

diga se existem em ordem mais baixa de teoria de perturbações e, em caso afirmativo, desenhe o(s) diagrama(s) de Feynman e escreva as respectivas amplitudes. Não é para calcular as secções eficazes nem os quadrados dos elementos de matriz.

III (4 valores)

Considere o processo $e^- + \phi \to e^- + \gamma$ no quadro do modelo acima descrito.

a) Desenhe o(s) diagrama(s) que contribuem para o processo em ordem mais baixa.

b) Escreva a amplitude para o processo.

c) Mostre que a amplitude é invariante de gauge, isto é, se $\mathcal{M} \equiv \epsilon^\mu(k)\,\mathcal{M}_\mu$ onde k é o 4-momento do fotão, então temos $k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$.

IV (4.5 valores)

Considere o decaimento $\phi \to e^+ + e^-$ no mesmo modelo.

a) Escreva a amplitude invariante para o processo.

b) Calcule a largura de decaimento $\Gamma(\phi \to e^+ + e^-)$ em função dos parâmetros do modelo.

c) Imagine que se mede $m_\phi = 5$ GeV e um tempo de vida média $\tau_\phi = 2 \times 10^{-22}$ s. Qual o valor de β?

V (4.5 valores)

Considere o processo $e^- + e^+ \to \phi + \chi$ no quadro do modelo acima descrito.

a) Desenhe o(s) diagrama(s) que contribuem para o processo em ordem mais baixa.

b) Escreva a amplitude para o processo.

c) Considere que $\sqrt{s} \gg m_e, m_\phi$ e que portanto é uma boa aproximação fazer $m_e = m_\phi = m_\chi = 0$. Nestas condições calcule a secção eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$ no referencial do centro de massa em função da energia no CM ($\sqrt{s}$) e do ângulo de difusão θ.

Dados

- $m_e = 0.511$ MeV
- $\hbar = c = 1$ implica:

$$1 = 3 \times 10^8 \mathrm{m\,s^{-1}},\ \ 1 = 197.327 \text{ Mev fermi},\ \ 1\text{fermi} = 10^{-15}\mathrm{m}$$

- $\varepsilon^{0123} = +1$, $\gamma_5 = i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.
- No referencial do CM temos:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2}\,\frac{|\vec{p}_{\mathrm{CM}}|}{m^2}\,\overline{|M|}^2, \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2\, s}\,\frac{|\vec{p}_{3\mathrm{CM}}|}{|\vec{p}_{1\mathrm{CM}}|}\,\overline{|M|}^2$$

respectivamente para uma partícula de massa m que decai em duas, e para um processo $p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$.