

Capítulo 7

O Electromagnetismo e a Teoria da Relatividade

7.1 Introdução

Não podemos acabar um texto, mesmo introdutório, sobre o electromagnetismo, sem falar da sua relação com a teoria da relatividade restrita. De facto, as equações de Maxwell, descobertas em meados do séc. XIX, são o primeiro exemplo duma teoria relativista, antes da relatividade. Não são covariantes para transformações de Galileu, o que quer dizer que as leis da física não teriam a mesma forma em todos os referenciais de inércia. Este era um problema central nos finais do séc. XIX. Lorentz, com as suas transformações, contribuiu para a solução do problema, mas foi Einstein quem verdadeiramente compreendeu o seu significado profundo que veio revolucionar toda a física do séc. XX.

O que se expõe a seguir é apenas uma breve introdução, que pensamos poder ser útil. O leitor é aconselhado a ler o excelente livro de Resina Rodrigues indicado na Bibliografia [11], assim como os capítulos das *Feynman Lectures on Physics* [9] dedicados a este assunto.

7.2 Postulados da relatividade

O impasse criado pelos resultados negativos das experiências de Michelson e Morley [6] só foi ultrapassado em 1905, quando Einstein compreendeu que esses resultados implicavam uma atitude radicalmente nova, em particular uma reinterpretação física das transformações que Lorentz tinha introduzido para explicar aquelas experiências, transformações que levam o seu nome. Einstein resumiu a sua posição em *dois postulados*, que formam a base da teoria da relatividade restrita:

- I. As leis da natureza permanecem as mesmas em todas os referenciais em movimento de translação relativa e uniforme.
- II. A velocidade da luz no vazio, c , permanece a mesma para todos os observadores animados de movimento de translação relativa e uniforme.

As transformações que ligam as coordenadas entre referenciais com velocidade relativa uniforme v são as *transformações de Lorentz*. No caso de dois referenciais S , de coordenadas (t, x, y, z) , e S' , de coordenadas (t', x', y', z') , em que o segundo se move relativamente ao primeiro com uma velocidade v paralela ao eixo x , no sentido positivo, estas transformações são dadas por [6, 9, 11]

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Veremos que é possível verificar que as equações de Maxwell permanecem inalteradas mediante estas transformações de coordenadas, o mesmo não acontecendo com as equações da mecânica, que terão de ser alteradas. Podemos dizer que, sem o saber, Maxwell foi o primeiro físico relativista.

7.3 Consequências das transformações de Lorentz

7.3.1 Dilatação do tempo

Para compreendermos este efeito, imaginemos uma montagem muito simples (ver Ref.[9]): dois espelhos paralelos, à distância D , entre os quais oscila um sinal luminoso (ver Fig. 7.1). Um observador em repouso relativamente a este sistema mede um tempo igual a D/c para

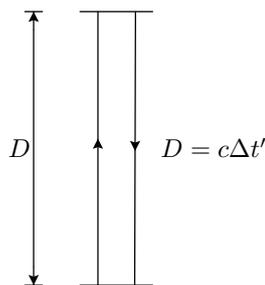


Figura 7.1: Raio luminoso num referencial em repouso.

cada percurso. Tal sistema funciona como um relógio. Vamos supor que este conjunto se põe em movimento, relativamente ao observador, com uma velocidade v paralela ao eixo x do referencial do observador. Exactamente a situação para a qual escrevemos as Eqs. (7.1). O observador verifica que o relógio trabalha agora mais lentamente, devido ao alongamento do percurso do sinal luminoso entre os dois espelhos, o que está indicado na Fig. 7.2. No entanto, e isto é muito importante, se imaginarmos um observador ligado ao referencial em que se encontra o relógio, parado relativamente a este, tal observador não notará qualquer alteração na situação física do problema e continuará a ver o mesmo percurso do raio luminoso, para cima e para baixo, e um intervalo de tempo para cada percurso dado por $\Delta t' = D/c$. Os dois observadores estarão em desacordo. Da Fig. 7.2, obtemos ($D^2 = c^2(\Delta t')^2$):

$$c^2(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t')^2 + v^2(\Delta t)^2, \quad (7.2)$$

donde tiramos que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.3)$$

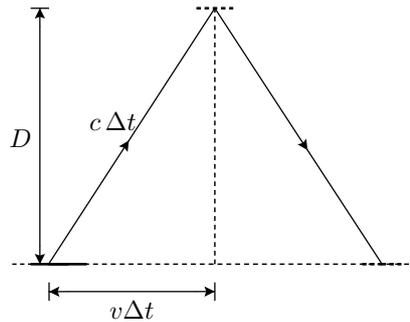


Figura 7.2: Raio luminoso num referencial em movimento.

ou seja, $\Delta t > \Delta t'$. Vemos aqui a razão do aparecimento do factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nas transformações de Lorentz. Este efeito de dilatação dos intervalos de tempo, tal como medidos por observadores em movimento relativo, é conhecido por *dilatação do tempo*.

Hoje, este efeito pode ser medido com grande precisão. Uma das suas primeiras verificações experimentais foi feita medindo o alongamento do tempo de vida médio dos muões provenientes de raios cósmicos, em função da sua velocidade, alongamento que obedece precisamente à relação encontrada. Os muões são partículas semelhantes aos electrões, mas mais pesadas e instáveis.

7.3.2 Contração de Lorentz

Designemos o observador ligado ao referencial S por O, e por O' o observador ligado ao referencial S'. Uma régua de comprimento $\Delta x'$, medido por O', vai ser vista pelo observador O como tendo o comprimento

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (7.4)$$

como se vê por diferenciação da relação $x'(x)$. Como $\Delta x < \Delta x'$, o observador O, se usasse a régua *tal como ele a observa*, diria que, para cobrir uma certa distância, teria de colocar consecutivamente a régua um número maior de vezes do que seria o caso se tal efeito não existisse. Esta relação também pode ser compreendida através de experiências simples de medições de comprimentos efectuadas por observadores O e O' em movimento relativo [11].

7.3.3 Simultaneidade

Suponhamos dois acontecimentos, um no ponto x_1 , no instante t , outro no ponto x_2 , no mesmo instante t , t medido no referencial a que pertencem x_1 e x_2 . Neste referencial, os dois

acontecimentos são simultâneos. Num outro referencial, em movimento relativamente ao primeiro, devido ao termo vx/c^2 , um observador não concordaria em que os dois acontecimentos fossem simultâneos. Na realidade,

$$\Delta t' = \frac{t - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v/c^2(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq 0, \quad (7.5)$$

o que significa que o conceito de simultaneidade, para acontecimentos que ocorrem em *pontos diferentes do espaço, é relativo.*

7.3.4 Dinâmica relativista

É fácil verificar que a equação de Newton

$$\vec{F} = m \frac{d}{dt} \vec{v} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (7.6)$$

invariante sob a acção das transformações de Galileu ($t' = t, x' = x \pm vt, y' = y, z' = z$), não o é sob a acção das transformações de Lorentz.

Einstein mostrou que a modificação a fazer era escrever

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (7.7)$$

desde que se definisse

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v}, \quad (7.8)$$

onde m corresponde à massa do corpo. A expressão anterior mostra-nos que a inércia do corpo aumenta com a velocidade deste e tende para infinito quando $v \rightarrow c$. Daí que na relatividade a velocidade da luz *no vazio* se considere como uma velocidade *limite*, no sentido de se aceitar que nenhum fenómeno físico se possa propagar com uma velocidade superior.

Falta-nos encontrar uma expressão relativista para a energia. Começemos por notar que mc^2 tem as unidades duma energia. Então, desenvolvendo em série, em termos de $(v/c)^2$,

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right]; \quad (7.9)$$

e se a velocidade v não for muito elevada ($v \ll c$) obtemos

$$\mathcal{E} \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (7.10)$$

em que o último termo dá a energia cinética não-relativista. Isto torna sugestiva a interpretação de \mathcal{E} como sendo a *energia total* do corpo, donde $\mathcal{E} = \text{energia em repouso } (mc^2) + \text{energia cinética (não-relativista)} + \text{termos de ordem mais elevada}$. Estas igualdades traduzem a famosa *equivalência entre massa e energia*. A física nuclear e a física das altas energias fornecem-nos inúmeros exemplos da validade destes conceitos.

Com as definições* para energia total $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ e para o momento $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$, não é difícil deduzir as relações

$$\mathcal{E}^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \quad (7.11)$$

$$\vec{p}c = \mathcal{E} \frac{\vec{v}}{c}. \quad (7.12)$$

7.3.5 Transformação das velocidades

Consideremos mais uma vez os dois observadores O e O' movendo-se com uma velocidade relativa $v = v_x$. Um objecto move-se com velocidade u' em relação a O'. Queremos saber a sua velocidade (u) em relação a O. A velocidade será sempre definida pelo quociente da distância percorrida, medida num certo referencial, com tempo decorrido, medido no mesmo referencial.

As transformações da Eq. (7.1) poderão ser invertidas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Assim, $u' = u'_x = dx'/dt'$ e

$$u = u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + v dx'/c^2} = \frac{u' + v}{1 + u' \frac{v}{c^2}} \neq u' + v. \quad (7.14)$$

*Os argumentos intuitivos aqui apresentados para as fórmulas relativistas para a energia e momento podem ser rigorosamente demonstrados. Exigindo apenas *i*) a conservação de energia e momento, *ii*) a validade das transformações de Lorentz e *iii*) o limite não relativista correcto, podem deduzir-se as expressões relativistas para energia e momento. Ver a discussão no livro de J. D. Jackson [6].

Exemplo 7.1 *Encontremos o resultado da composição de velocidades para os seguintes casos: i) $v = 1/3 c$ e $u' = 2/3 c$. ii) $v = 1/2 c$ e $u' = 1/2 c$. iii) $v = c$ e $u' = c$.*

Por aplicação da Eq. (7.14) obtemos

i)

$$u = \frac{2/3 + 1/3}{1 + 2/9} c = \frac{9}{11} c ; \quad (7.15)$$

ii)

$$u = \frac{1/2 + 1/2}{1 + 1/4} c = \frac{4}{5} c ; \quad (7.16)$$

iii)

$$u = \frac{1 + 1}{1 + 1} c = c , \quad (7.17)$$

e não $2c$!

7.4 A geometria do espaço-tempo

7.4.1 Intervalos de espaço-tempo

Uma importante propriedade das transformações de Lorentz é que elas conservam a quantidade

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) . \quad (7.18)$$

A quantidade invariante ds mede o *intervalo* entre dois pontos do espaço-tempo e substitui, em relatividade, o intervalo $dx^2 + dy^2 + dz^2$, que é conservado pelas transformações de Galileu. É introduzido um tratamento ao mesmo nível das coordenadas t e (x, y, z) , embora elas não possam ser confundidas como, aliás, se vê pelo sinal $(-)$ aparecendo em ds^2 . Este novo espaço, introduzido por Minkowski, definido pelas quatro coordenadas (ct, x, y, z) , é o *espaço-tempo*. Cada um dos seus pontos define um *acontecimento*.

7.4.2 Cone de luz

Dado um ponto O de coordenadas $(ct = x = y = z = 0)$, o lugar geométrico dos pontos que podem ser atingidos por um raio luminoso emitido a partir de O obedecem à equação

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 , \quad (7.19)$$

que define o chamado *cone de luz*. Considerando o seu corte pelo plano (ct, x) , obtemos a Fig. 7.3. A partir de O podemos atingir e influenciar acontecimentos situados na região (3), ou ser influenciados por acontecimentos que tiveram origem na região (4). Temos uma

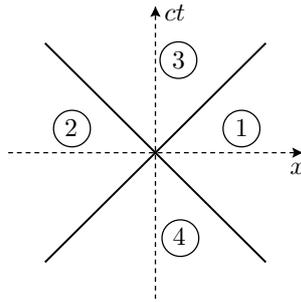


Figura 7.3: Cone de luz.

ligação *causal* com as regiões (3) e (4). Mas não temos com as regiões (1) e (2), pois isso exigiria velocidades superiores à velocidade da luz c .

Intervalos, cuja inclinação é inferior à da superfície delimitando o cone de luz, são intervalos de *tipo tempo*; os outros são intervalos de *tipo espaço*.

7.4.3 Quadrivectores

Quantidades que se transformam, numa mudança de referencial, da mesma forma que as coordenadas (ct, x, y, z) , são designadas por *quadrivectores*, numa generalização óbvia da noção conhecida de vector. Tal como neste último caso, também o produto interno entre dois quadrivectores se mantém invariante, sendo este agora definido da seguinte maneira: dados os quadrivectores $A^\mu \equiv (A^t, A^x, A^y, A^z)$ e $B^\mu \equiv (B^t, B^x, B^y, B^z)$, o seu produto interno é dado por

$$A \cdot B \equiv \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \equiv \sum_{\nu} A_\nu B^\nu = A^t B^t - \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (7.20)$$

Note-se que $A_\nu = \sum_{\mu} g_{\mu\nu} A^\mu$. Diremos que a métrica definida pelas transformações de Lorentz é *pseudo-euclidiana*, querendo nós com isto dizer que

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

ou, de outro modo, $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, em vez da métrica usual em geometria euclidiana $g_{ij} = (1, 1, 1)$, definindo o produto interno $\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} A^i B^j = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

Apresentemos alguns exemplos de quadrivectores.

Quadrivector energia-momento:

$$p^\mu \equiv \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right), \quad \text{com} \quad \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.22)$$

De facto, $p \cdot p = \mathcal{E}^2/c^2 - |\vec{p}|^2 = mc^2$ é invariante sob a acção de uma transformação de Lorentz.

Podemos mostrar explicitamente que p^μ é um quadrivector, calculando as suas componentes num sistema O' em movimento uniforme, relativamente ao referencial O no qual definimos as componentes de p^μ . Isto é deixado como exercício.

Quadrivector velocidade:

$$u^\mu \equiv \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \rightarrow u \cdot u = c^2, \quad (7.23)$$

que resulta de $u^\mu = p^\mu/m$.

Quadrivector densidade de corrente:

$$j^\mu \equiv (\rho c, \vec{J}), \quad (7.24)$$

com $\vec{J} = \rho\vec{v}$, como é conhecido, em que ρ nos dá a densidade volumétrica das cargas, e \vec{v} a velocidade a que estas se deslocam. Calculemos o seu quadrado:

$$j^2 = j \cdot j = \rho^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (7.25)$$

Se nos deslocarmos com a velocidade das cargas, em relação a nós elas passam a ter uma velocidade nula e $\vec{J} = 0$. Quanto ao quadrivector, neste novo referencial, em relação ao qual as cargas estão paradas, $j'^\mu = (\rho_0 c, 0)$, em que ρ_0 representa a densidade de cargas medida neste referencial em que elas estão em repouso. Mas nós sabemos que $j \cdot j = j' \cdot j'$, o que implica que

$$\rho_0^2 c^2 = \rho c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.26)$$

e a densidade aumenta. Porquê? Porque se dá uma contracção do comprimento na direcção do movimento, e portanto o volume diminui.

Quadrivector potencial:

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right), \quad (7.27)$$

sendo ϕ o potencial escalar e \vec{A} o potencial vector do campo magnético.

Operadores em notação quadridimensional:

Operador nabla:

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad (7.28)$$

ou, devido à presença do sinal $(-)$ nas componentes espaciais de $g_{\mu\nu}$,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (7.29)$$

A equação da continuidade escrever-se-á, em notação quadridimensional:

$$\partial \cdot j = \sum_\mu \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (7.30)$$

usando as definições dadas anteriormente.

D'alembertiano:

$$\square \equiv \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2. \quad (7.31)$$

7.5 Electrodinâmica relativista**7.5.1 Equações para os potenciais**

Atendendo às definições de j^μ e A^μ , e a que $1/\epsilon_0 = \mu_0 c^2$, as equações de ondas para os potenciais, equações de d'Alembert, podem ser escritas como uma única equação:

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad (7.32)$$

o que, nesta notação quadridimensional, imediatamente nos mostra a sua invariância[†] sob a acção das transformações de Lorentz. As equações para os potenciais tinham sido deduzidas mediante a imposição da condição

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (7.33)$$

conhecida por *condição de Lorenz*.

De uma forma indirecta, estas duas últimas equações traduzem a invariância das equações de Maxwell em relação às transformações de Lorentz.

[†]Mais rigorosamente, a sua *covariância*, isto é, a equação mantém a sua forma em todos os referenciais de inércia.

7.5.2 Equações de movimento de uma carga eléctrica

Tendo em conta as alterações impostas pela relatividade, atrás descritas, a equação para uma carga q , movendo-se sob a acção de um campo electromagnético, vem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (7.34)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, e atendendo à definição de p^μ , Eq. (7.8), fica

$$\frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dp^\mu}{dt} = f^\mu, \quad (7.35)$$

com o quadrivector força:

$$f^\mu = \frac{1}{c} \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (7.36)$$

Das componentes espaciais da Eq. (7.35), $\mu = 1, 2, 3$, recuperamos imediatamente a Eq. (7.34). Quanto à componente temporal da Eq. (7.35), ela diz-nos que (lembrar que, no primeiro membro da equação, \mathcal{E} se refere à energia total da partícula):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{E}}{c} \right) &= \frac{1}{c} \frac{q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(q \frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{c} \right), \end{aligned} \quad (7.37)$$

ou, simplificando,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = q \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (7.38)$$

que traduz, correctamente, a variação da energia da partícula de carga q .

A expressão para o intervalo ds , pondo em evidência $c^2 dt^2$, pode ser posta sob a forma

$$ds = c dt \sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (7.39)$$

Desta maneira, a equação de movimento terá a forma compacta quadridimensional:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = f^\mu, \quad (7.40)$$

em termos do invariante ds . A quantidade ds/c é conhecida por *tempo próprio* de um observador e corresponde ao tempo medido pelo relógio do observador.

7.5.3 Transformações de Lorentz dos campos \vec{E} e \vec{B}

Este caso é mais complicado, pois \vec{E} e \vec{B} não formam as partes espaciais de um quadri-vector. Na verdade, no seu conjunto, \vec{E} e \vec{B} formam um tensor anti-simétrico de 2ª ordem, em função do qual podemos escrever as equações de Maxwell. Para vermos que isto é verdade comecemos por recordar as equações que relacionam os campos com os potenciais:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (7.41)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (7.42)$$

Usando a notação de quadri-vector para os potenciais, $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{E^i}{c} &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\phi}{c} - \frac{\partial A^i}{\partial(ct)} = -\partial_i A^t - \partial_t A^i \\ &= -(\partial^t A^i - \partial^i A^t) \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$B^i = \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} A^k = -\epsilon^{ijk} \partial^j A^k, \quad (7.44)$$

onde ϵ^{ijk} é o tensor completamente anti-simétrico definido por

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} &= 0 && \text{se dois índices forem iguais} \\ \epsilon^{ijk} &= 1 && \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação par de } (123) \\ \epsilon^{ijk} &= -1 && \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação ímpar de } (123). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Desta última equação resulta que

$$(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) = -B^3, \quad (\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1) = B^2, \quad (\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) = -B^1 \quad (7.46)$$

e, portanto, se definirmos o tensor anti-simétrico,

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (7.47)$$

vemos que este tensor é convenientemente representado pela matriz

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

ou, termo a termo,

$$\begin{aligned} F^{yz} &= -B_x, \quad F^{zx} = -B_y, \quad F^{xy} = -B_z \\ F^{xt} &= E_x/c, \quad F^{yt} = E_y/c, \quad F^{zt} = E_z/c \\ F^{\mu\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Um tensor de ordem n (com n índices) é uma entidade matemática que, sob a acção de uma mudança de coordenadas, se transforma como o produto de n vectores. A mudança de coordenadas que estamos a considerar é dada pelas transformações de Lorentz e, no caso presente, o tensor é de 2ª ordem. Directamente a partir da definição de tensor, ou da Eq. (7.47), encontra-se a regra, relacionando $F'_{\mu\nu}$ com $F_{\mu\nu}$. O problema não é difícil, mas é um pouco trabalhoso (ver Problema 7.6). Em termos dos campos eléctrico e magnético, o resultado final são as relações (continuamos a supor que $v = v_x$)

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ E'_z &= \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (7.50)$$

e ainda

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \frac{B_y + vE_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ B'_z &= \frac{B_z - vE_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Se atendermos a que o movimento relativo dos referenciais é paralelo ao eixo x ($v = v_x$), e que portanto as coordenadas y e z são transversais a este movimento, poderemos reescrever as expressões acima:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= \frac{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (7.52)$$

e

$$\begin{aligned} B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\ B'_{\perp} &= \frac{(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E})_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Reparando nestas equações, a primeira coisa que salta à vista é que o termo da força de Lorentz $q\vec{v} \times \vec{B}$ nada mais é do que o campo eléctrico induzido no referencial próprio da carga q , que se encontra em movimento com velocidade \vec{v} relativamente ao referencial onde se estabeleceram os campos \vec{E} e \vec{B} , multiplicado pelo factor relativista $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Outra consequência importante é a seguinte. Se estivermos em repouso relativamente a uma carga eléctrica, apenas observaremos a existência de um campo eléctrico dado pela lei de Coulomb. Mas se nos pusermos em movimento em relação à carga q , com uma velocidade $v = v_x$, automaticamente observaremos o aparecimento de um campo magnético \vec{B}' , dado pela Eq. (7.51) (ver Exemplo 7.2) Como na altura dissemos, uma corrente eléctrica é um fluxo de cargas eléctricas com uma determinada velocidade, o que significa que a entidade básica, a fonte última do campo electromagnético, são as cargas eléctricas. Juntando tudo, podemos dizer que o campo magnético é uma manifestação relativista do campo eléctrico, causada pelo movimento das cargas. Como os efeitos relativistas são da ordem de v^2/c^2 , valor em geral muito pequeno, não admira que as forças magnéticas sejam em geral muito pequenas quando comparadas com as forças eléctricas.

Exemplo 7.2 Como exemplo de aplicação das fórmulas de transformação para os campos, Eqs. (7.50) e (7.51), vamos considerar uma partícula de carga q que se desloca com velocidade v uniforme, segundo o eixo x dum dado referencial S . Usemos as leis de transformação para deduzir os campos \vec{E} e \vec{B} em S e comparemos com os campos obtidos a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert.

Consideramos que, no instante $t = 0$, a partícula passa pela origem de S . Então num referencial solidário com a carga, que designamos por S' , a partícula está em repouso na origem. Vamos ainda supor, para simplificar, que o ponto P onde queremos determinar os campos tem as coordenadas $P(0, b, 0)$, conforme se indica na Fig. 7.4 No referencial

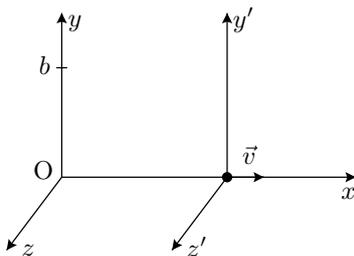


Figura 7.4: Carga em movimento uniforme segundo x .

S' , as coordenadas de P são

$$x' = -vt'$$

$$\begin{aligned}y' &= b \\z' &= 0 ,\end{aligned}$$

e a distância do ponto P à carga é

$$r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2} . \quad (7.54)$$

Os campos no referencial S' escrevem-se então:

$$\begin{aligned}E'_x &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{vt'}{r'^3}, \quad E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{r'^3}, \quad E'_z = 0 \\ \vec{B}' &= 0 .\end{aligned} \quad (7.55)$$

No referencial S , usando as Eqs. (7.50) e (7.51), obtemos

$$E_x = E'_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (7.56)$$

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (7.57)$$

$$B_z = \gamma \frac{\beta}{c} E'_y = \frac{\beta}{c} E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\gamma \beta b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} , \quad (7.58)$$

sendo nulas as outras componentes. Nas Eqs. (7.56-7.58) usámos a notação usual em relatividade

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} . \quad (7.59)$$

Como afirmámos acima, o campo \vec{E}' no referencial em que a partícula está em repouso deu origem a campos eléctricos e magnéticos no referencial em que a carga se move com velocidade uniforme. Para compararmos estes resultados com os obtidos a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert, notemos primeiro que a partir das Eqs. (7.56-7.58) se pode mostrar que

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} , \quad (7.60)$$

em acordo com a Eq. (6.73). Podemos também ver que o campo \vec{E} aponta radialmente da posição presente da partícula e que para $v \ll c$ recuperamos a lei de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} , \quad (7.61)$$

em acordo completo com o Problema 6.9. Fica como exercício comparar as expressões explícitas das componentes do campo \vec{E} .

7.5.4 É a lei de Biot-Savart uma lei aproximada?

No final do exemplo anterior mostrámos que os campos duma carga em movimento reproduzem, no limite não relativista, a lei de Biot-Savart. O leitor mais atento deve ter ficado confuso. Será que a lei de Biot-Savart é apenas válida para velocidades não relativistas? No entanto, tal não foi mencionado quando a introduzimos no capítulo 2. Por outro lado, a lei de Biot-Savart deve estar certa, pois a partir dela deduziram-se as equações de Maxwell, que por serem relativistas forçaram o aparecimento da própria relatividade. Onde está a solução deste aparente paradoxo? Repare-se que a expressão do campo B_z , antes de ser aplicado o limite $v \ll c$, Eq. (7.58), não se parece nada com a lei de Biot-Savart, dado que depende de $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Na verdade, tanto a lei de Biot-Savart como a Eq. (7.58) estão correctas. Para se reencontrar a lei de Biot-Savart, a partir da Eq. (7.58), temos de pensar que uma corrente é um contínuo de cargas em movimento e não uma carga isolada. Isto, como veremos, faz toda a diferença. Consideremos uma corrente como uma sucessão de cargas contíguas de valor $dq = \lambda dx$ num pequeno intervalo dx , isto é, em vez de termos uma carga, como na Fig. 7.4, temos um fio ao longo do eixo x percorrido por uma corrente estacionária $I = \lambda v$. Usando os resultados da Eq. (7.58), podemos escrever que o campo elementar no ponto $P(0, b, 0)$ devido a uma carga elementar em $x = vt$ é

$$dB_z = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\gamma \beta b}{(b^2 + \gamma^2 x^2)^{3/2}}. \quad (7.62)$$

Vemos que a expressão anterior é máxima, quando a carga passa pela origem, $x = 0$, e tende para zero, quando $x \rightarrow \pm\infty$. Como a corrente é estacionária, haverá sempre cargas em qualquer posição ao longo do fio (suposto infinito). Então o campo total deverá ser obtido integrando ao longo de todo o eixo x :

$$\begin{aligned} B_z &= \int_{-\infty}^{+\infty} dB_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b \beta dx}{c (b^2 + \gamma^2 x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda \gamma b v}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(b^2 + \gamma^2 x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda \gamma b v}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{x}{b^2 \sqrt{b^2 + \gamma^2 x^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda \gamma b v}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2}{b^2 \gamma} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b}, \end{aligned} \quad (7.63)$$

onde se usou $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ e $I = \lambda v$. A Eq. (7.63) é precisamente o resultado que se obtém da lei de Biot-Savart, para o fio infinito. Repare-se que os factores γ se cancelaram exactamente, sem nenhuma aproximação.

Fazendo o mesmo para o campo eléctrico, nas Eqs. (7.56) e (7.57), vemos que o campo \vec{E} , no ponto $P(0, b, 0)$, é dado por $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$, com

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}, \quad (7.64)$$

que é o campo dum fio carregado com densidade de carga linear λ , Eq. (1.7). Note-se que, havendo neutralidade eléctrica do condutor, este campo será cancelado por um campo igual e de sinal contrário devido aos iões do material condutor.

Antes de terminar esta secção, queríamos falar de um outro assunto relacionado. Consideremos uma corrente estacionária a percorrer um anel circular de raio R (ver Fig. 7.5). Podemos colocar duas questões. A primeira é semelhante à anterior e consiste em saber se a

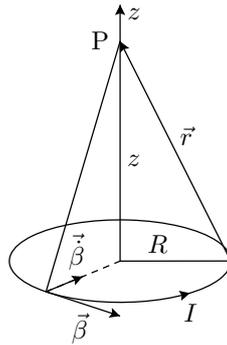


Figura 7.5: Corrente estacionária num anel circular.

lei de Biot-Savart continua válida. Vamos mostrar no exemplo seguinte que isso é verdade.

Exemplo 7.3 *Corrente estacionária a percorrer uma espira circular de raio R (ver Fig. 7.5). Se imaginarmos que a corrente é constituída por um contínuo de cargas elementares $dq = \lambda dl$, com $I = \lambda v$, vamos mostrar que a partir dos campos de Liénard-Wiechert para a carga em movimento se obtém o resultado da lei de Biot-Savart.*

Estudemos o caso simples dum ponto situado sobre o eixo de simetria da espira (ver Problema 7.11 para o caso geral). Os campos $d\vec{E}$ e $d\vec{B}$ elementares são dados pela Eq. (6.71). Nas condições do problema, $\vec{r} \cdot \vec{\beta} = 0$, pelo que

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\vec{r} - r\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{r^3} + \frac{\vec{r} \times [(\vec{r} - r\vec{\beta}) \times \vec{\beta}]}{cr^3} \right]_{\text{ret}} \quad (7.65)$$

$$d\vec{B} = \left. \frac{\vec{r} \times d\vec{E}}{cr} \right|_{\text{ret}}, \quad (7.66)$$

onde as quantidades devem ser calculadas no instante retardado $t' = t - r/c$. No entanto, como temos um contínuo de cargas, esta condição não é importante, haverá sempre uma carga na posição que desejarmos e os atrasos são todos iguais. Podemos esquecer a referência ao tempo retardado. Resolvamos o duplo produto externo na Eq. (7.65):

$$\begin{aligned} \vec{r} \times [(\vec{r} - r\vec{\beta}) \times \vec{\beta}] &= \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\beta}) - r\vec{r} \times (\vec{\beta} \times \vec{\beta}) \\ &= \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\beta}) - r^2\vec{\beta} - r\vec{\beta}(\vec{r} \cdot \vec{\beta}) + r\vec{\beta}(\vec{r} \cdot \vec{\beta}) \\ &= (\vec{r} - r\vec{\beta})c\beta^2 - r^2\vec{\beta}, \end{aligned} \quad (7.67)$$

onde se usou

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{\beta} &= 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{\dot{\beta}} &= |\dot{\beta}|R = c\beta^2 \end{aligned} \quad (7.68)$$

A expressão para $d\vec{E}$ vem

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\vec{r} - r\vec{\beta})}{r^3} - \frac{\vec{\beta}}{cr} \right] \quad (7.69)$$

e para $d\vec{B}$:

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{1}{cr} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\vec{r} \times \vec{\beta}}{r^2} - \frac{\vec{r} \times \vec{\dot{\beta}}}{cr} \right] \\ &= \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\vec{\beta} \times \vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} \times \vec{\dot{\beta}}}{cr^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Temos de integrar no anel de corrente. É fácil de ver que

$$\oint_{\text{anel}} dl \vec{\beta} = \oint_{\text{anel}} dl \vec{\dot{\beta}} = \oint_{\text{anel}} dl \vec{r} \times \vec{\beta} = 0 \quad (7.71)$$

e que (ver Fig. 7.5)

$$\begin{aligned} \oint_{\text{anel}} dl \frac{\vec{r}}{r^3} &= 2\pi \frac{zR}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z \\ \oint_{\text{anel}} dl \frac{\vec{\beta} \times \vec{r}}{r^3} &= 2\pi\beta \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (7.72)$$

pelo que $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$, $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$, com

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (7.73)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} . \quad (7.74)$$

Os resultados anteriores estão em completo acordo com a Eq. (2.38) e com o Problema 1.3. Num condutor percorrido por uma corrente estacionária, o campo eléctrico dos iões anulará o campo \vec{E} na Eq. (7.73), ficando somente a lei de Biot-Savart. Note-se que não houve nenhuma aproximação do tipo $\beta \ll 1$, o termo em β^2 na Eq. (7.65) cancelou-se exactamente. Notar ainda que, para $\beta \lesssim 1$, a lei de Biot-Savart vem do termo *dito* de radiação! O caso geral dum ponto P em posição arbitrária é muito mais difícil e será tratado no Problema 7.11.

A outra questão é seguinte. Como vimos no Capítulo 6, uma carga em movimento acelerado radia energia. Como um movimento circular uniforme tem aceleração, uma partícula carregada a descrever este tipo de movimento deverá radiar energia. Pensemos agora numa corrente estacionária num fio circular. As cargas estão a descrever um movimento circular uniforme, e por isso a pergunta: onde está a energia radiada? A resposta a esta questão é altamente não trivial, mas a ideia básica é semelhante à exposta acima a propósito da lei de Biot-Savart. Quando consideramos a corrente como um contínuo de cargas, pode-se mostrar que a radiação desaparece! Para os leitores mais curiosos, recomendamos a leitura dos Problemas 14.12 e 14.13 do livro de J. D. Jackson [6].

7.5.5 Covariância das equações de Maxwell

Antes de terminar esta breve introdução à teoria da relatividade restrita, e à sua relação com o electromagnetismo, queremos mostrar a covariância das equações de Maxwell. Partamos das equações de Maxwell no vácuo, escritas no referencial S:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J}, \end{aligned} \quad (7.75)$$

e determinemos as equações no referencial S'. Para isso, notemos que, a partir das transformações de Lorentz, Eq. (7.1), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) .\end{aligned}\tag{7.76}$$

Usando as Eqs. (7.50) e (7.51):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' &= \gamma \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial B'_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial B'_y}{\partial y} + \frac{\partial B'_z}{\partial z} \\ &= \gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + \gamma \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \gamma \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ &= \gamma \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \frac{v}{c^2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x \right] \\ &= 0 .\end{aligned}\tag{7.77}$$

A equação mantém portanto a forma nos dois referenciais.

Consideremos agora a lei de Gauss:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' &= \gamma \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial E'_y}{\partial y} + \frac{\partial E'_z}{\partial z} \\ &= \gamma \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) + \gamma \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} - v \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) + \gamma \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} + v \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \\ &= \gamma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \gamma v \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right)_x \right] \\ &= \gamma \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} - v \mu_0 J_x \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} J_x \right) \\ &= \frac{\rho'}{\epsilon_0} ,\end{aligned}\tag{7.78}$$

aplicando a lei de transformação da componente temporal do quadri-vector corrente e as equações de Maxwell em S. As demonstrações para as outras equações são deixadas como exercício.

7.6 Leis de transformação das frequências

7.6.1 Efeito de Doppler relativístico

Suponhamos um referencial S e um corpo que se desloca com velocidade v , uniforme e segundo o sentido positivo do eixo x . Este corpo emite sinais electromagnéticos periódicos, de período T_0 medido no seu referencial próprio S' . Um observador colocado na origem O pretende medir o período dos sinais que vai recebendo. Devido à dilatação relativística do tempo, em vez de T_0 , os relógios colocados no referencial S, pelos quais vai passando o corpo, medirão um período dado por

$$T' = T_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.79)$$

Consideremos dois sinais sucessivos emitidos pelo corpo, um emitido em t_0 e outro em $t_0 + T_0$, sinais que o observador em O recebe em t e $t + T$, ou seja, com um intervalo de tempo entre si de T . Para o cálculo de T , teremos de entrar com o facto de que os sucessivos sinais não são emitidos da mesma posição, mas de posições diferindo de vT' , exactamente como era o caso em mecânica não-relativista. A única diferença é que agora $T_0 \neq T'$. Um cálculo simples mostra que

$$T = T' + \frac{vT'}{c} = T_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = T_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad (7.80)$$

onde o sinal (+) no numerador vem de termos estado a supor que o corpo está a afastar-se do observador colocado em O. Em função da frequência, o resultado vem dado por

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \quad (7.81)$$

que exprime o *desvio Doppler para o vermelho*. No caso do corpo se estar a aproximar do observador, este medirá uma frequência

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad (7.82)$$

que é o *desvio Doppler para o azul*.

Este não é o único efeito causado pelo movimento do corpo em relação ao referencial S. Também os ângulos medidos nos dois referenciais, o referencial próprio do corpo e o referencial S, serão diferentes. É o fenómeno de *aberração da luz* (ver Problema 7.7).

Uma interessante aplicação do desvio Doppler temo-la na resolução do famoso paradoxo dos gémeos, ou melhor, pseudo paradoxo.

7.6.2 O pseudo paradoxo dos gémeos

Mostremos que o famoso paradoxo dos gémeos não é mais do que um pseudo paradoxo e, mais ainda, é de simples resolução. Por meio de uma mera contagem de impulsos, e

de sua posterior comparação, chegaremos à relação de Lorentz entre os tempos contados pelo observador inercial (o gémeo que ficou sempre na Terra, referencial que suporemos ser inercial) e pelo gémeo viajante.

Os gémeos e os respectivos referenciais serão designados por T e V , de Terra e Viajante. Assumiremos que os relógios foram sincronizados, quando os gémeos se encontravam ambos em T . Supomos que, num determinado instante, V parte para uma longa viagem, deslocando-se numa nave a uma velocidade uniforme v , em relação a T , viagem que o leva até um ponto F muito afastado (ver a Fig. 7.6). Se a distância percorrida tiver sido dada por l , o tempo escoado contado em T será l/v . Em F , o nosso viajante passa para outro veículo e regressa à mesma velocidade v uniforme.

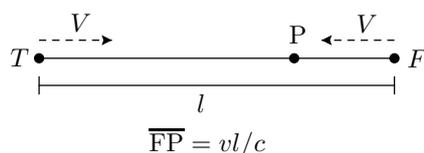


Figura 7.6: Geometria dos referenciais dos gémeos.

O relógio de cada gémeo emite um sinal eléctrico que pode ser detectado pelo outro gémeo. Podemos desprezar os problemas relacionados com as acelerações inicial e final, quando V parte e chega, assim como com a mudança de referencial em F . Elas só têm importância porque correspondem a distinguir os três referenciais, que são T e os dois utilizados pelo viajante, quando parte e quando regressa.

Tendo a viagem uma duração vista por T de $2l/v$, e sendo f a frequência dos relógios, o número de impulsos a que isto corresponde é dado por $N_T = 2fl/v$, que será o tempo escoado tal como contado por T , contado pelo seu relógio, o seu tempo de vida entre a partida e a chegada do outro gémeo. Calculemos o número de impulsos emitidos por V que T recebe. Na fase inicial, quando V se desloca de T para F , cada um dos gémeos observa um decréscimo na frequência dos sinais emitidos pelo outro, o chamado *desvio para o vermelho*, dado por

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (7.83)$$

O número total de impulsos emitidos por V e que T conta, correspondente ao percurso desde T até F , será $f'l/v$.

Chegamos ao ponto crucial. Quando em F o viajante troca de referencial, o gémeo T não se apercebe imediatamente disso, pois os sinais levam um certo tempo l/c a chegar de F a T . Durante este tempo, T continua assim a receber sinais desviados para o vermelho e teremos de somar a $f'l/v$ um número de sinais dado por $f'l/c$. Entretanto, o viajante, à

velocidade v , deslocou-se de uma distância vl/c em direcção à Terra, até ao ponto P. Só a partir deste ponto é que T receberá os sinais emitidos por V desviados para o azul, e só a partir deste ponto é que se apercebe que V mudou de referencial. Isto contrasta com o que V observa. Logo que muda de referencial, começa a receber os sinais emitidos por T desviados para o azul; não admira que, no final, eles não concordem entre si. Entrando com tudo isto, somando os sinais de T até F , de F até P e de P até T , vemos que T receberá um número total de sinais emitidos por V :

$$\begin{aligned} N'_T &= \frac{l}{v} f \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} + \frac{l}{c} f \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} + \left(\frac{l}{v} - \frac{l}{c}\right) f \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \\ &= 2 \left(\frac{l}{v}\right) f \sqrt{1-v^2/c^2} \neq N_T = 2f \left(\frac{l}{v}\right). \end{aligned}$$

Se supusermos que os impulsos emitidos correspondem, por exemplo, a batimentos do coração, o gémeo T dirá que o coração do irmão bateu menos vezes que o seu e que portanto envelheceu menos. A relação entre o tempo vivido por T e o tempo vivido por V , tal como medido por T na Terra, será

$$N'_T = N_T \sqrt{1-v^2/c^2} < N_T. \quad (7.84)$$

Podemos perguntar qual o número de impulsos N_V emitidos por T , contados por V . Temos

$$\begin{aligned} N_V &= \frac{l}{v} f \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} + \frac{l}{v} f \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \\ &= 2 \left(\frac{l}{v}\right) f \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \neq N_T \text{ e de } N'_T. \end{aligned}$$

Repetimos, o ponto crucial deste exercício aparece em F , quando V muda de referencial. Enquanto V se apercebe imediatamente deste facto, e começa imediatamente a receber os sinais emitidos por T desviados para o azul, T só se apercebe desta mudança l/c segundos depois. As duas situações não são simétricas e é razoavelmente simples contabilizar essa assimetria. Não há nenhum paradoxo, tudo está perfeitamente de acordo com as relações de Lorentz.

Problemas Capítulo 7

Transformações de Lorentz

7.1 Deduza as transformações de Lorentz. Considere somente o caso em que o referencial S' se move com velocidade v segundo o sentido positivo do eixo x . Siga os passos seguintes:

a) A partir do segundo postulado comece por mostrar que

$$\begin{aligned} c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= \\ &= \lambda(\vec{v}) [c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)] \end{aligned}$$

onde, obviamente, $\lambda(0) = 1$.

b) Usando vários referenciais, mostre que se deve ter sempre

$$\lambda(\vec{v}) = 1,$$

isto é, o intervalo

$$s = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

é invariante.

c) Admita que a relação entre as coordenadas de S e S' é linear, isto é,

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

onde $x^{\mu} = (ct, x, y, z)$. Use a invariância do intervalo para deduzir as transformações de Lorentz, Eq. (7.1).

7.2 A partir das transformações de Lorentz, mostre a contracção de Lorentz. Para isso, defina o comprimento da régua em S como $\Delta x = x_2 - x_1$, quando $t_1 = t_2$. Mostre que

$$\Delta x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta x',$$

onde $\Delta x' = x'_2 - x'_1$.

7.3 O tempo de vida média do muão é $\tau = 2 \mu s$. Considere um feixe de muões que se movem no referencial do laboratório com velocidade $v = 0.999 c$.

a) Qual é o tempo de vida média no referencial do laboratório?

b) Que distância percorre, em média, no laboratório um muão antes de decair? Qual seria a resposta sem a dilatação do tempo?

7.4 A que velocidade temos de nos deslocar em direcção a uma fonte luminosa vermelha ($\lambda = 650 \text{ nm}$), para ela nos parecer verde ($\lambda = 525 \text{ nm}$)?

7.5 Mostre que a lei de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

com \vec{p} dado pela Eq. (7.8), mantém a forma em todos os referenciais de inércia (é covariante).

7.6 Considere dois referenciais em movimento relativo uniforme segundo o eixo x .

a) Mostre que as transformações de Lorentz podem-se escrever na forma

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

onde

$$a^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z), \beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

b) Sabendo que o tensor do campo $F^{\mu\nu}$ se transforma como

$$F'^{\mu\nu} = a^\mu_\rho a^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} ,$$

deduza as leis de transformação para os campos \vec{E} e \vec{B} , Eqs. (7.50) e (7.51).

7.7 Considere um raio luminoso que se propaga no plano $O'x'y'$ dum referencial S' que se move com velocidade v segundo o eixo x do referencial S . Seja α' o ângulo que o raio luminoso faz no referencial S' com o eixo x' e α o ângulo correspondente no referencial S . Mostre que (Ver a Ref.[11]),

$$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha'}{1 + \frac{v}{c} \sec \alpha'} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Equações de Maxwell

7.8 Seguindo um método semelhante ao indicado no texto, mostre a covariância das restantes equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J} . \end{aligned}$$

7.9 Mostre que as equações de Maxwell homogêneas, isto é, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0$ resultam da seguinte relação (conhecida por identidade de Bianchi):

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 .$$

Partindo da definição de $F_{\mu\nu}$, mostre que a identidade de Bianchi é verificada.

7.10 Mostre que as equações de Maxwell com fontes podem escrever-se na forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu .$$

Deduza a equação de d'Alembert na gauge de Lorentz.

Métodos numéricos

7.11 Considere o anel de corrente estacionária da Fig. 7.5 no plano xy , centrado na origem e com raio a . Considere um ponto $P(r, \theta, \varphi)$ arbitrário. Partindo das expressões para os campos da Eq. (6.71), queremos mostrar que a lei de Biot-Savart é *exactamente* verificada.

a) Escolha um sistema de eixos onde

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \vec{r}' &= a (\cos \varphi', \sin \varphi', 0) \\ \vec{\beta} &= \beta (-\sin \varphi', \cos \varphi', 0) \\ \vec{\beta} &= \frac{\beta^2 c}{a} (-\cos \varphi', -\sin \varphi', 0) \\ R &= |\vec{r} - \vec{r}'| \\ \vec{n} &= \frac{1}{R} (\vec{r} - \vec{r}') . \end{aligned}$$

Mostre que os campos elementares produzidos por uma carga $dq = \lambda dl$ são dados por

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3 R^2} + \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]}{c(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times d\vec{E} \Big|_{\text{ret}} .$$

b) Como as distâncias da carga ao ponto P dependem da posição da carga (ângulo φ'), mostre que os campos produzidos no ângulo φ' correspondem à posição da carga em

$$\varphi'' = \varphi' + \frac{R(\varphi')\beta}{a} .$$

c) Use o resultado anterior para mostrar que ao integrar sobre *toda* a espira se deve ter

$$\int_0^{2\pi} d\varphi'' \rightarrow \int_0^{2\pi} d\varphi' J(\varphi') ,$$

onde

$$J(\varphi') = \frac{d\varphi''}{d\varphi'} .$$

d) Como o resultado geral é muito difícil de provar analiticamente, vamos fazer uma demonstração numérica. Para isso, faça um desenvolvimento dos campos em potências de β , isto é,

$$\begin{aligned} d\vec{E} J(\varphi') &= d\vec{E}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d\vec{E}_n \beta^n \\ d\vec{B} J(\varphi') &= d\vec{B}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} d\vec{B}_n \beta^n , \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} d\vec{E}_0 &= \frac{\lambda ad\varphi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ d\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 I ad\varphi'}{4\pi} \frac{\vec{e}_{\varphi'} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \end{aligned}$$

e) Mostre numericamente que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int d\vec{E} J(\varphi') = \int d\vec{E}_0 \\ \vec{B} &= \int d\vec{B} J(\varphi') = \int d\vec{B}_0 , \end{aligned}$$

isto é, mostre numericamente que todos os integrais de $d\vec{E}_n$, $n \geq 1$ e $d\vec{B}_n$, $n \geq 2$ são nulos. Verifique que obteve as leis de Biot-Savart e de Coulomb.

f) Use o resultado anterior para mostrar que não há energia radiada por uma corrente estacionária.

g) **Desafio ao leitor.** Os resultados deste problema envolvem uma demonstração numérica. Demonstre analiticamente o seguinte resultado.

Teorema

A partir dos campos duma carga em movimento, mostre que o campo \vec{B} produzido por uma corrente estacionária a percorrer uma espira circular é dado pela lei de Biot-Savart, independentemente da velocidade das cargas.

