INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Exame de Introdução à Teoria do Campo

Curso de Física Tecnológica - 2003/2004 (9/7/2004)

I

Considere um electrão descrito pela equação de Dirac.

a) Mostre que no caso do electrão livre se tem,

$$\frac{d(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p})}{dt} = 0$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Qual o significado desta lei de conservação?

b) Considere agora que o electrão está num campo electromagnético exterior A^μ, independente do tempo. Calcule agora

$$\frac{d(\vec{\Sigma}\cdot\vec{\pi})}{dt}$$

onde $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$ é o momento canónico.

c) Em que condições

$$\frac{d(\vec{\Sigma}\cdot\vec{\pi})}{dt} = 0\,?$$

Qual o interesse prático deste resultado?

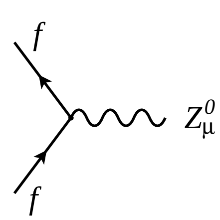
Sugestão: Para um operador $\mathcal{O}$ que não dependa do tempo tem-se

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = i\Big[H, \mathcal{O}\Big]$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema. Não esquecer que H é diferente nas alíneas a) e b).

II

Considere o processo $Z^0(p) \to e^-(q_1) + e^+(q_2) + \gamma(k)$ no quadro das interacções electrofracas, onde p, q_1, q_2 e k, são os momentos das partículas indicadas. A interacção do Z^0 com fermiões é dada pelo vértice seguinte,



$$i\frac{g}{\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma_5)$$

a) Desenhe o(s) diagrama(s) que contribuem para o processo em ordem mais baixa.

b) Escreva a amplitude para o processo.

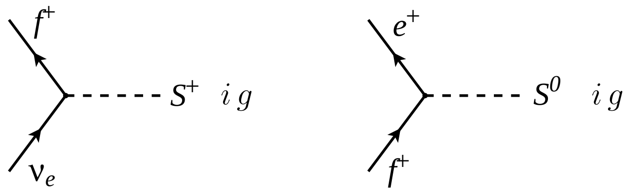
c) Mostre que a amplitude é invariante de gauge, isto é, se $\mathcal{M} \equiv \epsilon^\mu(k)\mathcal{M}_\mu$ onde k é o 4-momento do fotão, então temos $k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$.

III

Considere o processo

$$\nu_e + e^+ \to S^+ + S^0$$

numa teoria onde existem os seguintes vértices,



onde S^+, S^0 são escalares (spin 0), e f^+ é um fermião (spin 1/2) com massa m_f. ν_e e e^+ são, respectivamente, o neutrino do electrão e o positrão.

a) Desenhe o(s) diagrama(s) que contribuem para o processo em ordem mais baixa.

b) Escreva a amplitude para o processo.

c) Calcule no referencial do centro de massa a secção eficaz diferencial, $d\sigma/d\Omega$, no limite em que se pode desprezar a massa de todas as partículas no estado inicial e final. Ω corresponde ao ângulo sólido do S^+ em relação à direcção do ν_e.

d) Calcule o termo dominante da secção eficaz total, $\sigma(s)$, quando $\sqrt{s} \gg m_f$. Cresce ou decresce com $\sqrt{s}$?
Sugestão: use os seguintes resultados,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx \frac{1}{(1+2\varepsilon - x)^2} &= \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
\int_{-1}^{1} dx \frac{x}{(1+2\varepsilon - x)^2} &= \frac{1}{2\varepsilon} + \left(\ln\varepsilon + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
\int_{-1}^{1} dx \frac{x^2}{(1+2\varepsilon - x)^2} &= \frac{1}{2\varepsilon} + \left(\ln\varepsilon + \frac{7}{2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon \ll 1$.

Informação útil

1. Na representação de Dirac temos

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

2.

$$\Big[A, BC\Big] = \Big[A, B\Big]C + B\Big[A, C\Big]$$