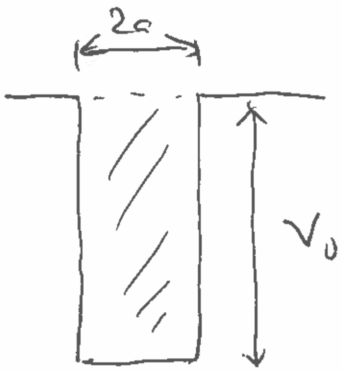
Potencial de função delta como limite do poço finito

1) Tomemos o potencial de função delta dado por

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\lambda'}{a}\,\delta(x)$$

Pode ser considerado como o limite dum poço finito de largura <u>2a</u> e profundidade V_0



$$\xrightarrow[\substack{a\to 0\\ V_0\to\infty}]{} \quad V(x)$$

A condição deve ser que as <u>áreas</u> sejam iguais, isto é

$$\text{Área} = 2a \times V_0 = +\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|V(x)| = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\lambda'}{a}$$

ou seja

$$\boxed{\frac{2mV_0 a}{\hbar^2} = \frac{\lambda'}{2a}}$$

$a \to 0$ e $V_0 \to \infty$ mas o produto $\underline{V_0 a}$ é <u>finito</u>!

2) No poço de potencial finito vimos que a natureza das soluções era dada pelo valor de

$$\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} = \underbrace{\frac{2mV_0a}{\hbar^2}}_{\text{finito}} \underset{a\to 0}{a \to 0}$$

Conclusão: Na equivalência $\lambda \ll 1$ e portanto temos só um estado ligado para as soluções pares. Isto explica porque só encontrámos um estado ligado para o potencial $V(x)$

3) Valor da energia do Estado ligado

Em geral a equação para os estados ligados (soluções pares)

$$\tan y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$$

não tem soluções analíticas. Contudo como $\lambda \ll 1$ podemos encontrar soluções aproximadas. Quadrando e rearranjando a equação temos

$$y^2 \tan^2 y + y^2 - \lambda = 0$$

Como $\lambda \ll 1$ também $y \ll 1$ e portanto $\tan y \simeq y$. Logo obtemos

$$y^4 + y^2 - \lambda = 0$$

A solução $y \ll 1$ é

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(-1 + (1 + 2\lambda)\right)$$

$$y^2 \simeq \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda - y^2 = y^4 \simeq \lambda^2 .$$

O valor da energia será então

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 = -\frac{\hbar^2 \alpha^2 a^2}{2m a^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\lambda - y^2)$$

$$\simeq -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\lambda^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}\right)^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{\lambda'}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{\hbar^2 \lambda'^2}{8ma^2}$$

Como tínhamos encontrado!