Nota sobre o campo magnético criado por um dipolo magnético

J. C. Romão*
Departamento de Física & CFTP, Instituto Superior Técnico
Avenida Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

I. INTRODUÇÃO

Na aula teórica usámos o resultado que o campo $\vec{B}$ criado por um dipolo magnético $\vec{m}$ colocado na origem é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}\, r^2}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\ \vec{m}\ \delta^3(\vec{r})\right] \tag{1}$$

A primeira parte da expressão deve ser familiar dum curso elementar de electromagnetismo [1], mas a segunda parte que envolve a função δ de Dirac não aparece normalmente pois estamos usualmente interessados no campo $\vec{B}$ a grande distância do dipolo, ou do anel de corrente que lhe deu origem. Ver, no entanto a Ref.[2].

Vamos aqui rever a dedução da Eq. (1), aproveitando para mostrar o uso da notação tensorial de que falámos na aula. Como preliminar, um vector $\vec{A}$ será representado por

$$\vec{A} = A_i \vec{e}_i \tag{2}$$

onde estamos a somar sobre os índices repetidos (convenção de Einstein). Nesta notação de componentes temos também

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i, \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i \equiv \partial_i \vec{e}_i \tag{3}$$

e para o produto externo

$$\vec{A}\times\vec{B} = \epsilon_{ijk} A_j B_k \vec{e}_i \tag{4}$$

Recordamos agora do electromagnetismo que

$$B_i = \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j A_k \tag{5}$$

e que para um dipolo magnético $\vec{m}$ o potencial vector é

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{6}$$

ou seja na nova notação

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\epsilon_{ijk}\, m_j \frac{x_k}{r^3} \tag{7}$$

*Electronic address: `jorge.romao@ist.utl.pt`

II. CASO $r > 0$

Usando as Eq. (5) e Eq. (7) obtemos, para $r > 0$,

$$\begin{aligned}
B_i &= \epsilon_{ijk}\,\partial_j A_k = \epsilon_{ijk}\,\partial_j \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\epsilon_{kln}\frac{m_l x_n}{r^3}\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{kln} m_l \partial_j \left(\frac{x_n}{r^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,m_l \epsilon_{kij}\epsilon_{kln}\frac{\delta_{nj} r^2 - 3x_n x_j}{r^5} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\,m_l\left(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}\right)\frac{\delta_{nj} r^2 - 3x_n x_j}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3r^2 m_i - 3r^2 m_i - m_i r^2 + 3(\vec{m}\cdot\vec{r})x_i}{r^5} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})x_i - m_i r^2}{r^5}
\end{aligned} \tag{8}$$

e portanto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}\,r^2}{r^5} \tag{9}$$

III. CASO $r < R$ QUANDO $R \to 0$

Para ver o que se passa quando $r \to 0$ vamos considerar o seguinte integral

$$I_i = \int_{r<R} B_i dV = \epsilon_{ijk}\int_{r<R}\partial_j A_k dV \tag{10}$$

Usando o teorema da divergência obtemos

$$\begin{aligned}
I_i &= \epsilon_{ijk}\int_{S_R}\frac{x_j}{r}A_k dS \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\epsilon_{ijk}\int_{S_R}\frac{x_j}{r}\epsilon_{kln}\,\frac{m_l x_n}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,m_l\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{kln}\int_{S_R}\frac{x_j x_n}{r^4}dS \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\,m_l\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{kln}\int d\Omega\frac{x_j x_n}{r^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Mas agora usando coordenadas esféricas é fácil mostrar que

$$\int d\Omega\frac{x_i x_j}{r^2} = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij} \tag{12}$$

pelo que obtemos ($\epsilon_{kij}\epsilon_{klj} = 2\delta_{il}$),

$$I_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{4\pi}{3}\epsilon_{kij}\epsilon_{klj}\;m_l = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\left[\frac{8\pi}{3}m_i\right] \tag{13}$$

Como esta expressão é válida independentemente de $r \to 0$ deve haver uma singularidade na origem para assegurar este valor constante. Obtemos assim a expressão, correcta para todos os valores de r,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}\,r^2}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\;\vec{m}\;\delta^3(\vec{r})\right] \tag{14}$$

---

[1] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, 2006).
[2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1975).