Mestrado em Eng. Física Tecnológica (MEFT)
Mecânica Quântica
1° semestre de 2016-17

Prof. João Paulo Silva (Responsável)
Prof. Jorge Crispim Romão

2° Teste: 19 de Dezembro de 2016 – 18h

Duraçao do teste: 1h30

Nota DF: Só serão cotadas as respostas em que há trabalho mostrado.

I (2 valores)

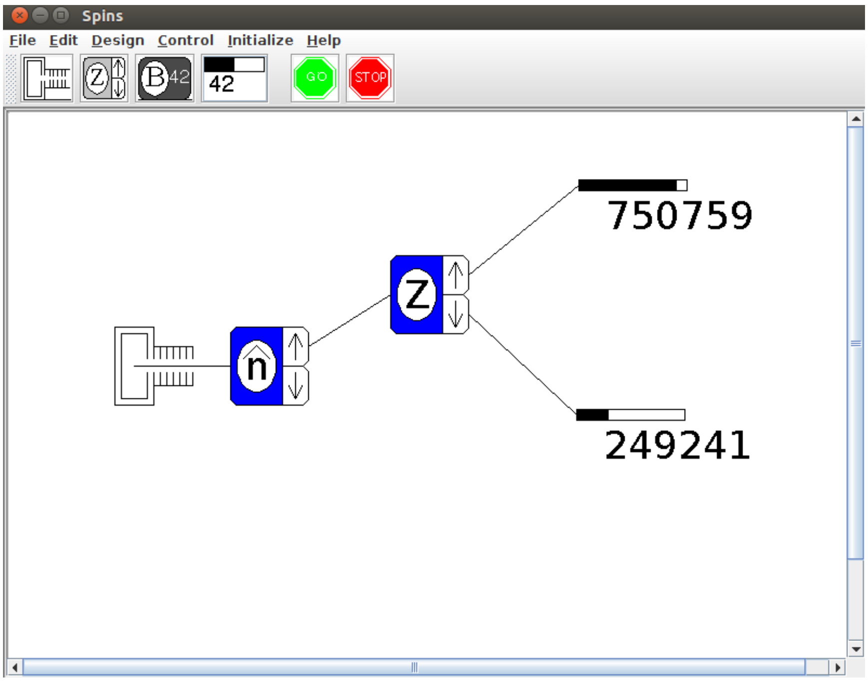
Para cada uma das afirmações seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Considere um eletrão no estado $|\psi_{210}\rangle$ do átomo de Hidrogénio. Então
$$\langle\psi_{210}|z|\psi_{210}\rangle = 0$$

2. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão
$$\psi(r,\theta,\varphi) = f(r)\ \cos^2(\theta)$$
A probabilidade duma medida de L_z dar $L_z = 0$ é igual a $\frac{45}{16\pi}$.

3. Considere a soma de dois momentos angulares $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ com $j_1 = 2$ e $j_2 = \frac{1}{2}$. Então o estado com $j = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2}$ escreve-se, em função dos estados próprios dos dois momentos angulares,
$$\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\ |2,0\rangle\left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\ |2,-1\rangle\left|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

4. Considere a experiência descrita na Figura seguinte:



Nesta experiência são disparados eletrões dum estado inicial aleatório. Esses eletrões passam primeiro por um analisador de spin segundo a direção $\vec{n}$, onde se selecionaram 10^6 eletrões com **spin up** nessa direção. Esses eletrões passam de seguida por um analisador de spin segundo o eixo dos z, obtendo-se as contagens indicadas para spin **up** e **down**. Então a direção $\vec{n}$ pode corresponder a $\theta = 60°, \phi = 0$.

II (2 valores)

Considere que o estado dum eletrão no átomo de hidrogénio pode ser descrito pela função de onda

$$\psi(\vec{r}) = a\,\psi_{2,1,1}(r,\theta,\phi) + b\,\psi_{2,1,-1}(r,\theta,\phi)$$

com a, b reais e $a, b > 0$. As funções de onda $\psi_{nlm}(r,\theta\,\phi)$ são as funções próprias de H, L^2, L_Z no átomo de hidrogénio.

1. Qual o valor médio da energia neste estado? Determine a, b para que o valor médio de L_z neste estado, seja $\frac{1}{2}\hbar$.
2. Determine o valor médio de r, neste estado, isto é

$$\langle r \rangle_\psi \equiv \langle \psi(\vec{r})|\, r\, |\psi(\vec{r})\rangle$$

Se não resolveu a alínea anterior expresse o resultado em termos de a e b.

III (3 valores)

Considere um sistema quântico com dois estados, com um Hamiltoniano H_0 que numa base ortonormalizada, $|I\rangle$ e $|II\rangle$, tem a seguinte representação matricial

$$H_0 = \begin{bmatrix} E & E \\ E & E \end{bmatrix}$$

com $E > 0$.

1. Determine os valores próprios, E_1 e E_2 e os estados próprios $|1\rangle$ e $|2\rangle$ do Hamiltoniano não perturbado, H_0. Identifique $|1\rangle$ com o estado fundamental.
2. Considere agora que é aplicada ao sistema uma perturbação, agora descrita na base, $|1\rangle, |2\rangle$ por

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\Delta > 0$ e $\Delta \ll E$. Calcule as correções de primeira ordem aos níveis de energia do sistema não perturbado.

3. Calcule as correções de 2ª ordem aos dois níveis, usando teoria de perturbações.
4. Resolva o problema exatamente para o Hamiltoniano $H = H_0 + H_1$ e compare com os resultados da alínea anterior, no limite em que $\Delta \ll E$. **Nota:** a matriz de representação dum operador depende da base.

IV (3 valores)

Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin $\frac{1}{2}$ fixa no espaço. Descrevemos o sistema na base em que S_z é diagonal. A partícula está sujeita num campo magnético $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_y$. O Hamiltoniano do sistema é então

$$H = -\vec{M}\cdot\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}\cdot\vec{B} \equiv \hbar\omega_0\sigma_y$$

onde $\omega_0 = \frac{eB_0}{2m}$. Sabe-se que no instante $t = 0$, o sistema está no estado *up* segundo $\vec{e}_z$, isto é,

$$|\psi(0)\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Qual a probabilidade duma medida de S_x dar o valor $\hbar/2$ em $t = 0$?

2. Determine a probabilidade duma medida de S_x dar $\hbar/2$ em função do tempo, $P_{S_x=\frac{\hbar}{2}}(t)$. Determine o tempo mínimo, T, ao fim do qual $P_{S_x=\frac{\hbar}{2}}(T) = 1$.

3. No instante $t = T$, o campo magnético é rodado instantaneamente para a direção do eixo dos z, isto é, $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ para $t > T$. Ao fim de outro intervalo de tempo T (isto é, para um tempo total $\Delta t = 2T$), faz-se uma medida de S_y. Determine a probabilidade dessa medida dar o valor $\hbar/2$, isto é $P_{S_y=\frac{\hbar}{2}}(2T)$. Comente o resultado.

Fim do Teste

Formulário

- **Momento Angular e Harmónicas Esféricas**

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \quad L_\pm = L_x \pm iL_y, \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z, \quad [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$$

$$L^2 |l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l,m\rangle, \quad L_z |l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle, \quad L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)} |l, m\pm1\rangle$$

As primeiras harmónicas esféricas são:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{i2\varphi} \sin^2\theta$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta\cos\theta \qquad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

com

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y^*_{lm} \qquad \text{e} \qquad \int d\Omega\, |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2 = 1$$

- **Equação Radial**

Para um potencial esfericamente simétrico a equação radial é

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)\right] R(r) = 0$$

Fazendo a mudança de variável $u(r) = r\,R(r)$ temos

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)\right] u(r) = 0$$

- **Átomo de Hidrogénio e Funções Radiais**

A solução geral é

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad \text{com energias} \quad E_n = -\frac{1}{2}mc^2\alpha^2\frac{1}{n^2}, \quad \alpha^{-1} = 137.036$$

As primeiras funções radiais são

$$R_{10} = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0} \qquad R_{20} = 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \qquad R_{30} = 2\left(\frac{1}{3a_0}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$$

$$R_{31} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{a_0}\left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-r/3a_0} \qquad R_{32} = \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\left(\frac{1}{3a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}$$

Os valores médios de algumas potências de r

$$
\begin{aligned}
\left\langle r^k \right\rangle &\equiv \int_0^\infty dr\, r^{2+k} R_{nl}^2(r) & \langle r \rangle &= \frac{a_0}{2}\left[3n^2 - l(l+1)\right] \\
\langle r^2 \rangle &= \frac{a_0^2 n^2}{2}\left[5n^2+1-3l(l+1)\right] & \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle &= \frac{1}{a_0 n^2} & a_0 &= \frac{\hbar}{mc\alpha} \\
\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle &= \frac{2}{a_0^2 n^3 (2l+1)} & \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= \frac{2}{a_0^3 n^3 l(2l+1)(l+1)}
\end{aligned}
$$

- **Átomos Hidrogenóides**

  Para os átomos com Z protões e um eletrão, basta fazer

$$
\alpha \rightarrow Z\alpha, \quad \text{e portanto} \quad a_0 \rightarrow \frac{1}{Z} a_0,\ E_n = -\frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{1}{n^2}
$$

- **Integrais Oscilador Harmónico e Átomo Hidrogénio**

$$
\int_0^\infty dx\, x^{\alpha-1} e^{-x} = \Gamma(\alpha),\ \int_0^\infty dx\, x^{2\alpha-1} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\Gamma(\alpha),\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}
$$

- **Spin 1/2**

  1. Os sectores próprios do operador $S_n = \vec{S} \cdot \vec{n}$, onde, $\vec{n} = \sin\theta\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z$, são

$$
\psi(S_n = +\hbar/2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \psi(S_n = -\hbar/2) = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}
$$

  2. As matrizes de Pauli são

$$
\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

- **Adição de Momento Angular**

$$
\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2, \quad J_i^2 \left| j_i, m_i \right\rangle = \hbar^2 j_i(j_i+1) \left| j_i, m_i \right\rangle, \quad J^2 \left| j, m_j \right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left| j, m_j \right\rangle, \quad J_z \left| j, m_j \right\rangle = \hbar m_j \left| j, m_j \right\rangle
$$

  1. Os valores possíveis para j são

$$
j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|
$$

  2. Qualquer estado $\left| j, m_j \right\rangle$ se pode exprimir como uma combinação linear dos produtos dos estados $\left| j_1, m_1 \right\rangle$ e $\left| j_2, m_2 \right\rangle$ na seguinte forma

$$
\left| j, m_j \right\rangle = \sum_{m_j = m_1 + m_2} C(j, m_j; j_1, m_1, j_2, m_2) \left| j_1, m_1 \right\rangle \left| j_2, m_2 \right\rangle
$$

     onde $C(j, m_j; j_1, m_1, j_2, m_2)$ são os coeficientes de Clebsch-Gordon e estão dados na Fig. 1 para os valores mais baixos de j_1 e j_2.

  3. A relação inversa é (os coeficientes de Clebsch-Gordon são reais)

$$
\left| j_1, m_1 \right\rangle \left| j_2, m_2 \right\rangle = \sum_j C(j, m_j; j_1, m_1, j_2, m_2) \left| j, m_j \right\rangle
$$

4. Para o átomo de Hidrogénio ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$)

$$\psi_{l+1/2,m_j} = \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l,m_j-1/2}\,\chi^+ + \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{l,m_j+1/2}\,\chi^-$$

$$\psi_{l-1/2,m_j} = -\sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{l,m_j-1/2}\,\chi^+ + \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l,m_j+1/2}\,\chi^-$$

- **Teoria de Perturbações**

  No caso não degenerado, para uma perturbação com Hamiltoniano H_1,

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle \phi_n | H_1 | \phi_n \rangle\,, \quad \Delta E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \phi_n | H_1 | \phi_k \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \quad |\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle \phi_k | H_1 | \phi_n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |\phi_k\rangle$$

- **Constantes Físicas**

  $\hbar = 1.05457266(63) \times 10^{-34}$ Js

  $e = 1.60217733(49) \times 10^{-19}$ C

  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2.99792458 \times 10^8$ m/s

  $\mu_0 = 4\pi \times 10^7$ H/m

  $m_e = 9.1093897(54) \times 10^{-31}$ kg $= 0.510998918(44)$ MeV

  $m_p = 1.6726231(10) \times 10^{-27}$ kg $= 938.272029(80)$ MeV

  $m_n = 1.6749286(1) \times 10^{-27}$ kg $= 939.565360(81)$ MeV

  $hc = 1240$ nm.eV, $\hbar c = 197.35$ nm.eV

  $a_0 = 0.5291772108(18) \times 10^{-10}$ m

  $\alpha^{-1} = 137.03599911(46)$

  $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \times 10^{-5}$ eV/T

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

	J	J ...
	M	M ...
m_1	m_2	
m_1	m_2	Coefficients
.	.	

1/2×1/2

m_1	m_2	1, +1
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	1, 0	0, 0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	1, −1
−1/2	−1/2	1

2×1/2

m_1	m_2	5/2, +5/2
+2	+1/2	1

m_1	m_2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	5/2, +1/2	3/2, +1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2, −1/2	3/2, −1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	5/2, −5/2
−2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	3/2, +3/2
+1	+1/2	1

m_1	m_2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	3/2, −3/2
−1	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	2, +2
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	2, +1	1, +1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	2, 0	1, 0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, −1	1, −1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	2, −2
−3/2	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	3, +3
+2	+1	1

m_1	m_2	3, +2	2, +2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	3, +1	2, +1	1, +1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	3, 0	2, 0	1, 0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, −1	2, −1	1, −1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	3, −2	2, −2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	3, −3
−2	−1	1

3/2×1

m_1	m_2	5/2, +5/2
+3/2	+1	1

m_1	m_2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2, +1/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	5/2, −1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2, −5/2
−3/2	−1	1

1×1

m_1	m_2	2, +2
+1	+1	1

m_1	m_2	2, +1	1, +1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, 0	1, 0	0, 0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	2, −1	1, −1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, −2
−1	−1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

3/2×3/2

m_1	m_2	3, +3
+3/2	+3/2	1

m_1	m_2	3, +2	2, +2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3, +1	2, +1	1, +1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, 0	2, 0	1, 0	0, 0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1	m_2	3, −1	2, −1	1, −1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, −2	2, −2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3, −3
−3/2	−3/2	1

$$d^1_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

2×3/2

m_1	m_2	7/2, +7/2
+2	+3/2	1

m_1	m_2	7/2, +5/2	5/2, +5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m_1	m_2	7/2, +3/2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1	m_2	7/2, +1/2	5/2, +1/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1	m_2	7/2, −1/2	5/2, −1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1	m_2	7/2, −3/2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1	m_2	7/2, −5/2	5/2, −5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m_1	m_2	7/2, −7/2
−2	−3/2	1

2×2

m_1	m_2	4, +4
+2	+2	1

m_1	m_2	4, +3	3, +3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m_1	m_2	4, +2	3, +2	2, +2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4, +1	3, +1	2, +1	1, +1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4, 0	3, 0	2, 0	1, 0	0, 0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1	m_2	4, −1	3, −1	2, −1	1, −1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4, −2	3, −2	2, −2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4, −3	3, −3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m_1	m_2	4, −4
−2	−2	1

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^2_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^2_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^2_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figura 1: Coeficientes de Clebsch-Gordon para $j_i = 1/2, 1, 3/2, 2$. Fonte: Particle Data Group web page, `http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/clebrpp.pdf`