# 1° Teste: 12 de Novembro de 2016 – 9h30

Duraçao do teste: 1h30

Nota DF: Só serão cotadas as respostas em que há trabalho mostrado.

**I (2 valores)**

Para cada uma das afirmações seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Os valores próprios de um operador Hermítico podem escrever-se na forma $\lambda = e^{i\alpha}$ com $\alpha \neq 0$ real.
2. Num poço de potencial a uma dimensão ($V = -V_0 < 0$, $|x| < a$; e $V = 0$, $|x| > a$), existe sempre pelo menos um estado ligado ímpar.
3. Para um dado potencial a uma dimensão, um estado estacionário com três nodos tem sempre uma energia superior a um estado estacionário com dois nodos.
4. O estado de uma partícula no potencial do oscilador harmónico de frequência $\omega$ pode satisfazer $\psi(x, t = 0) = \psi(-x, t = 0)$ e, ao evoluir no tempo, vir a ser observado com energia $7\hbar\omega/2$.

**II (4 valores)**

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x| < a \\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\gamma}{a}\left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right] & |x| \geq a \end{cases}$$

com $V_0 > 0$ e $\gamma > 0$, correspondente a um poço de potencial de profundidade $V_0$, largura $2a$, ladeado por funções delta em ambas as extremidades.

1. Considere $-V_0 < E < 0$. Sabendo que a função delta em $x = a$ impõe às derivadas laterais a condição
$$u'(a^+) - u'(a^-) = \frac{\gamma}{a} u(a),$$
mostre que a equação para os estados ligados pares se pode escrever
$$z = y \tan(y) - \gamma,$$
onde, como habitualmente,
$$z = \alpha a = a\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}, \quad y = qa = a\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}.$$
2. Determine $\lambda = z^2 + y^2$ e, sendo $y_0$ a solução da equação $y_0 \tan(y_0) = \gamma$ no intervalo $[0, \pi/2]$, determine o valor mínimo de $V_0$ (em função de $y_0$) para que haja estados ligados.
3. Considerando o caso particular $\gamma = \pi/4$, dê explicitamente a expressão do valor mínimo de $V_0$, em função de $\hbar$, $m$, $a$ e factores numéricos. **[Sugestão:** Tente valores simples de $y_0$ até encontrar um consistente com a definição de $y_0$.**]**

4. Considere o limite $\gamma = 0$. Qual o valor mínimo de $V_0$ para que haja estados ligados? Considere seguidamente o limite $\gamma \to \infty$. Determine a expressão da energia de *todos* os estados ligados pares e compare com a expressão apropriada do formulário. Comente.
5. Assuma agora que $\gamma = -|\gamma|$ é negativo, mas continue a considerar $-V_0 < E < 0$. Qual o valor mínimo de $V_0$ para que haja estados ligados neste intervalo de energias?

**III (4 valores)**

Considere uma partícula de massa $m$ no potencial do oscilador harmónico de frequência $\omega$. O estado fundamental deste potencial é

$$\langle x|0\rangle = u_0(x) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta x^2/2},$$

onde $\beta = m\omega/\hbar$. Em $t = 0$ a partícula está num estado diferente, dado por

$$\langle x|\psi_0\rangle = \psi(x, t=0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2},$$

onde

$$\alpha = m\omega'/\hbar = S\,\beta, \qquad (S > 1).$$

[ Isto é, numa função que corresponderia ao estado fundamental de um outro potencial, com frequência $\omega' = S\omega$ maior. Chama-se a este estado um "squeezed state".] Podemos escrever

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle,$$

onde $C_n = \langle n|\psi_0\rangle$ e $|n\rangle$ são os vectores próprios normalizados do Hamiltoneano (frequência $\omega$).

1. Calcule explicitamente em termos de $S$

$$C_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; u_0^*(x)\,\psi(x, t=0).$$

   Calcule também $C_1$.

2. Mostre que

$$0 = A|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\left[\beta\,\hat{x} + \frac{i}{\hbar}\hat{p}\right]|0\rangle$$

   calculando explicitamente

$$\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\left[\beta\,x + \frac{d}{dx}\right]u_0(x).$$

3. Considere o operador

$$B = \frac{S+1}{2\sqrt{S}}\,A + \frac{S-1}{2\sqrt{S}}\,A^\dagger.$$

   Mostre que

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left[\alpha\,\hat{x} + \frac{i}{\hbar}\hat{p}\right].$$

   Determine o resultado de $B|\psi_0\rangle$. (Pense bem antes de começar a fazer contas.) Determine $\langle\psi_0|B^\dagger$.

4. Determine $\left[B, B^\dagger\right]$. Calcule

$$\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle, \qquad \langle\psi_0|\hat{p}|\psi_0\rangle,$$
$$\langle\psi_0|\hat{x}^2|\psi_0\rangle, \qquad \langle\psi_0|\hat{p}^2|\psi_0\rangle,$$

   e

$$\langle\psi_0|\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}|\psi_0\rangle,$$

   apresentando os resultados em termos de $\hbar$ e $\alpha$. **Nota:** Lembre-se que pode escrever $\hat{x}$ e $\hat{p}$ em termos de $B$ e $B^\dagger$.

5. Foi visto nas aulas/livro que, na representação de Heisenberg, os estados ficam estacionários e os operadores para o oscilador harmónico variam no tempo de acordo com

$$\begin{aligned} \hat{x}_H(t) &= \hat{x}\cos(\omega t) + \frac{\hat{p}}{m\omega}\sin(\omega t), \\ \hat{p}_H(t) &= \hat{p}\cos(\omega t) - m\omega\hat{x}\sin(\omega t), \end{aligned}$$

onde os operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ são os operadores na representação de Schrödinger usados nas alíneas anteriores e coincidem com os operadores respectivos na representação de Heisenberg em $t = 0$. [Por exemplo, $\hat{x}_H(o) = \hat{x}$.]
Determine

$$\langle\psi(t)|\hat{x}^2|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\left(\hat{x}_H(t)\right)^2|\psi_0\rangle$$

e mostre que a variância de $x$ se pode escrever como

$$(\Delta x)^2 = K_1 + K_2\cos^2(\omega t),$$

determinando $K_1$ e $K_2$ em termos de $S$ e $\beta$. **Nota:** Isto significa que a variância de $x$ deste estado oscila no tempo. Como se o estado "respirasse".

[**Sugestão para casa:** Se quiser divertir-se em casa, assuma um sistema de unidades com $\beta = 1 = \hbar$, tome $S > 1$ e faça gráficos de $(\Delta x)^2$, $(\Delta p)^2$ e $(\Delta x \Delta p)^2$, em função do tempo.].

---

**Formulário**

- **Poço de potencial infinito**
  $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H ( i.e. da energia) são:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad , \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \,.$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
  $V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H ( i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{aligned} u_n^-(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) & E_n^- &= E_0\,(2n)^2 \\ u_n^+(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left[(2n-1)\,\frac{\pi}{a}x\right] & E_n^+ &= E_0\,(2n-1)^2 \end{aligned} \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\,.$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**

$$\int dy\, \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int dy\, \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int dy\, y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$

$$\int dy\, y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**
  As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y)\, e^{-y^2/2}$$

  onde $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12 \end{aligned}$$

  As energias são dadas por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

  Os integrais importantes são

$$\int_0^\infty dx\, x^{2\alpha-1} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

- **Oscilador harmónico: Operadores $A$ e $A^+$**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \hbar\omega \left(A^+ A + \frac{1}{2}\right)$$

  onde

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

  com

$$\left[A, A^+\right] = 1$$

  As relações inversas são

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(A + A^+\right), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(A - A^+\right)$$

  Os estados corretamente normalizados são

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(A^+\right)^n |0\rangle$$

  com $A\,|0\rangle = 0$ e

$$A\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad A^+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$