Mecânica Quântica – Série 10 – Soluções

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2015/2016

(Versão de 9 de Novembro de 2015)

∗10.1

$$\psi^{+} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad \psi^{-} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\frac{\alpha}{2}\, e^{i\beta} \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{M}\psi^{+} = \frac{\hbar}{2}\psi^{+} \quad \mathcal{M}\psi^{-} = -\frac{\hbar}{2}\psi^{-} \ .$$

∗10.2 `Resposta:`

$$P(-\hbar/2) = \frac{13}{50} = 26\% \ .$$

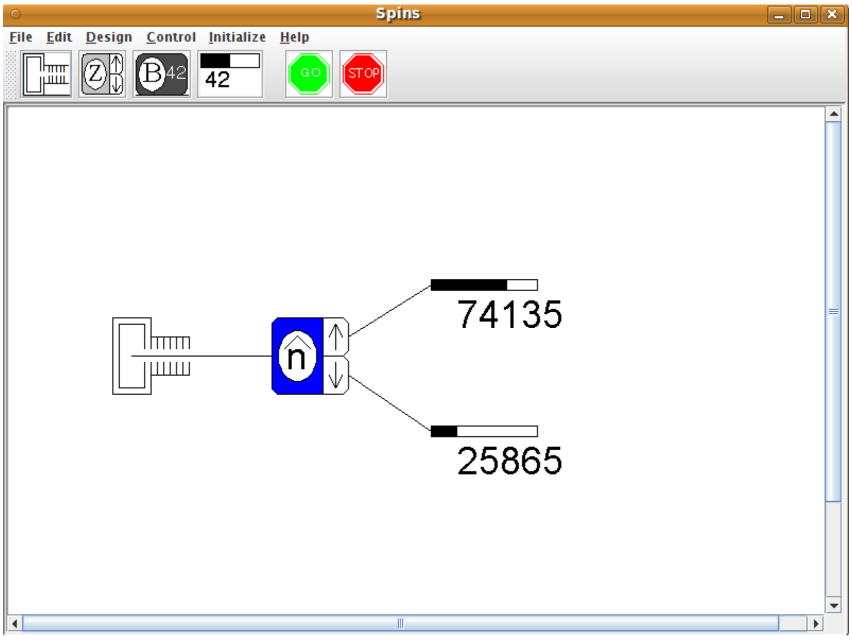


Figura 1: Montagem para resolver o problema 10.2. O feixe inicial está no estado dado no problema e a direcção $\hat{n} = 3/4\vec{e}_x + 4/5\vec{e}_y$. Para o programa isto corresponde aos ângulos de $\theta = 90°$ e $\phi = 53.13°$.

∗10.3 `Resposta:`

$$P(-\hbar/2) = \frac{1}{2} \ .$$

10.4 `Resposta no enunciado.`

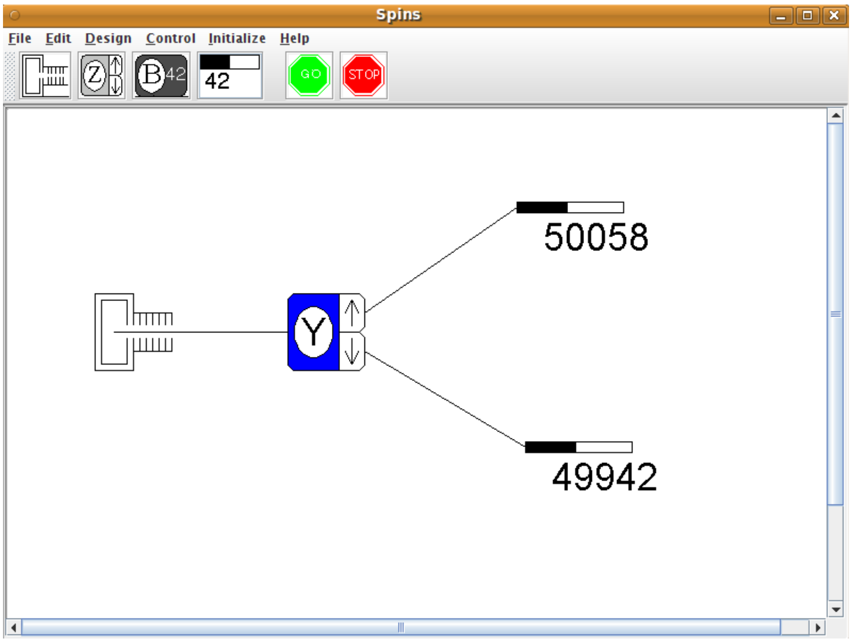


Figura 2: Montagem para resolver o problema 10.3. O feixe inicial está no estado dado no problema.

∗10.5 `Resposta:`

$$
\begin{aligned}
&P(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = 2T) = \cos^4 \omega T + \sin^4 \omega T \\
&P(S_x = -\frac{\hbar}{2}, t = 2T) = 2\cos^2 \omega T \sin^2 \omega T \\
&\omega = \frac{egB}{4m_e}
\end{aligned}
$$

`Nota:` Este problema pode resolver-se de (pelo menos) duas maneiras:

`1º Método`

Aqui usa-se a representação usual em que S_z é diagonal. Os passos são:

1. Escrever o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ nesta representação. Usar os resultados do problema 10.1.
2. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $0 < t < T$.
3. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $T < t < 2T$.
4. Escrever o estado final, $|\psi(2T)\rangle$ como combinação linear dos estados próprios de S_x, isto é,
$$|\psi(2T)\rangle = a\,|S_x = \hbar/2\rangle + b\,|S_x = -\hbar/2\rangle$$
usando novamente o problema 10.1.
5. O resultado pretendido é $|a|^2$.

`2º Método`

Aqui usa-se a representação em que S_x é diagonal. Os passos são:

1. Mostrar que as matrizes do spin nesta representação são

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

2. O estado inicial $|\psi(0)\rangle$ nesta representação é muito simples

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $0 < t < T$. Não esquecer de usar as matrizes apropriadas a esta representação.

4. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $T < t < 2T$.

5. O estado final,

$$|\psi(2T)\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

já está na representação em que S_x é diagonal. Portanto o resultado pretendido é simplesmente $|c|^2$. Para compreender os resultados é útil representar gráficamente as duas probabilidades, o que é feito na figura seguinte,

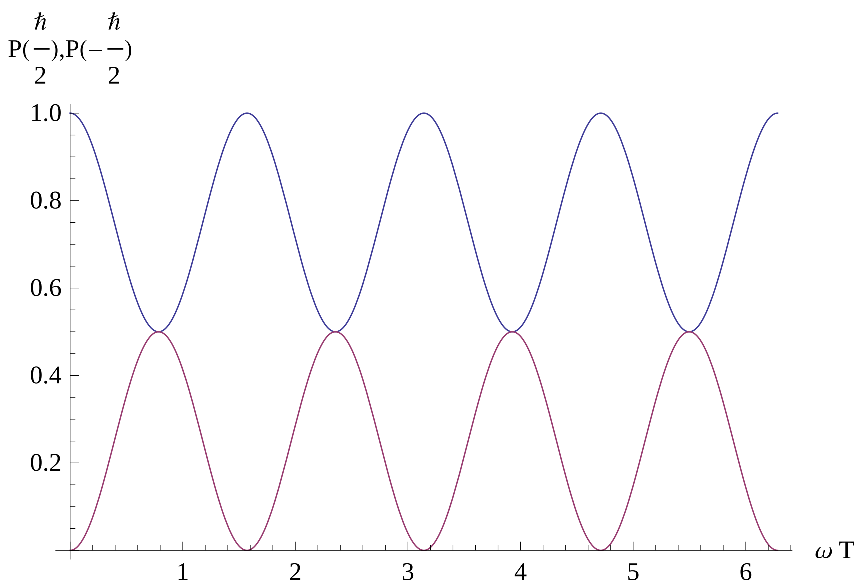
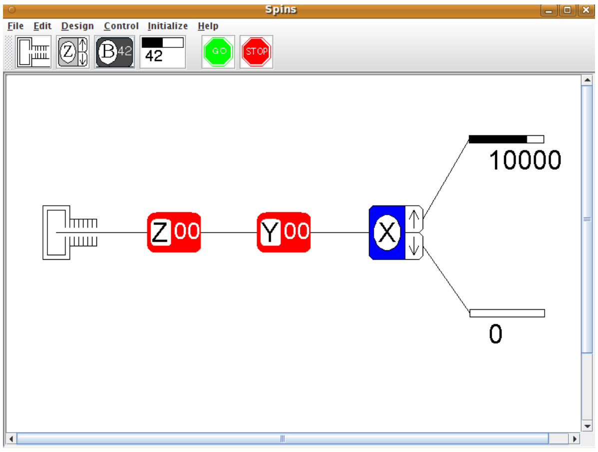
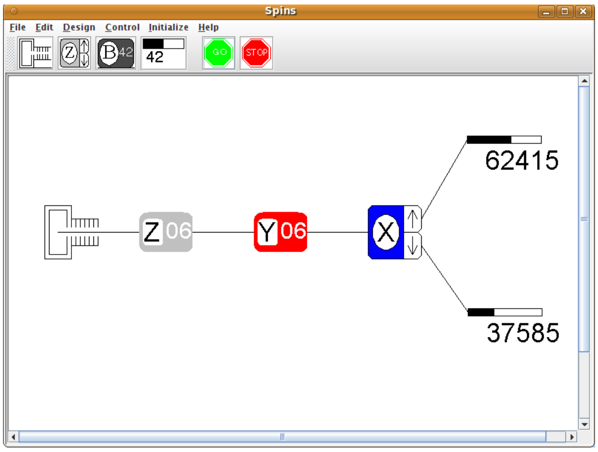
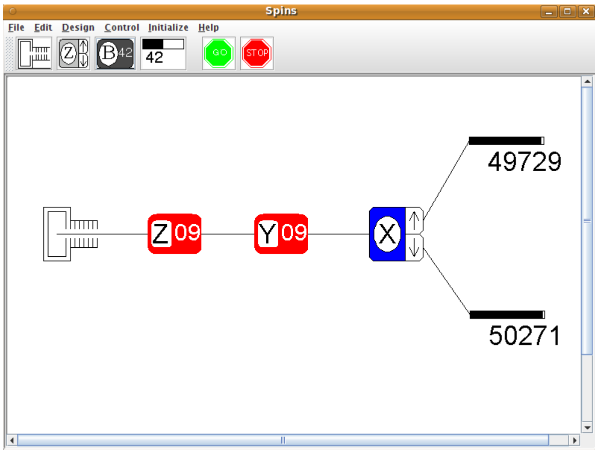


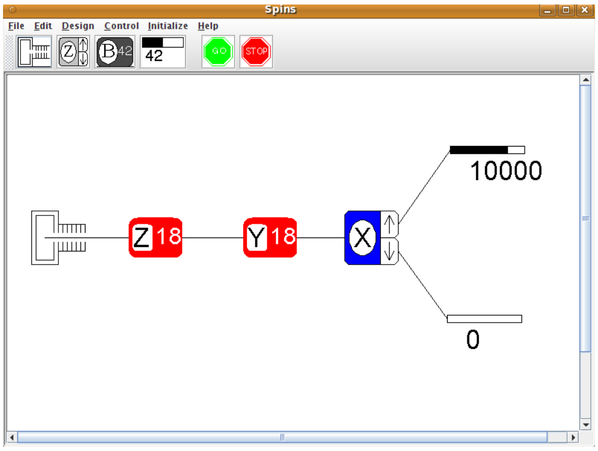
Figura 3: $P(S_x = \pm\frac{\hbar}{2})$.

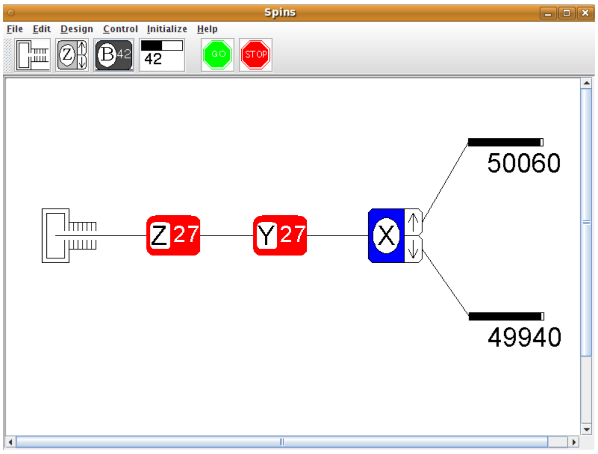
Os resultados do programa `spins` estão na figuras juntas.

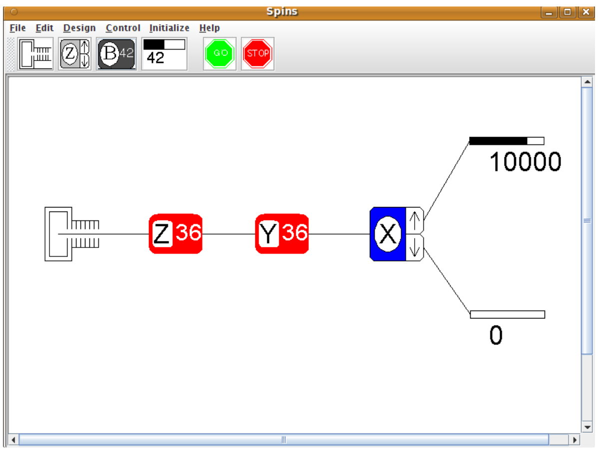












10.6 `Resposta no enunciado.`

*__10.7__ `Resposta no enunciado.`

****10.8** `Resposta:`

$$\begin{array}{lll}
\texttt{Singleto} & |0,0\rangle: & V(r) = V_1(r) - 3V_3(r) \\
 & |1,1\rangle: & V(r) = V_1(r) + 2V_2(r) + V_3(r) \\
\texttt{Tripleto} & |1,0\rangle: & V(r) = V_1(r) - 4V_2(r) + V_3(r) \\
 & |1,-1\rangle: & V(r) = V_1(r) + 2V_2(r) + V_3(r)
\end{array}$$

****10.9** `Resposta:`

a) 0, b) 50%

c)
$$\begin{aligned} P_T &= \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + \frac{1}{2}\left[\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\right. \\ &\quad \left. + 2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\beta_2-\beta_1)\right]^2 \end{aligned}$$

`Nota:` Para a alínea c) a probabilidade dos dois electrões estarem num estado singleto é

$$P_S = \frac{1}{2}\left[\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 - 2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\beta_2-\beta_1)\right]^2.$$

Pode verificar que $P_T + P_S = 1$.

****10.10** `Resposta:`

$$V(r) = \begin{cases} V_1(r) + L\,V_2(r) + L^2\,V_3(r) & (J = L+1) \\ V_1(r) - V_2(r) + V_3(r) & (J = L) \\ V_1(r) - (L+1)\,V_2(r) + (L+1)^2\,V_3(r) & (J = L-1) \end{cases}$$

10.11 `Resposta no enunciado.`

***10.12** `Respostas:`

1. As componentes do estado estão sempre definidas a menos duma fase global pois só sabemos as probabilidades. Um estado possível é

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Se escrevermos, numa notação óbvia,

$$|\psi\rangle = |{\downarrow};x\rangle = \alpha\,|{\uparrow};\vec{n}\rangle + \beta\,|{\downarrow};\vec{n}\rangle$$

onde na representação onde S_z é diagonal temos

$$|{\downarrow};x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |{\uparrow};\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |{\downarrow};\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\right), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\right),$$

e portanto

$$2|\beta|^2 - 1 = \sin\theta\cos\varphi$$

Da figura obtemos

$$2|\beta|^2 - 1 = 2\frac{85441}{100000} - 1 = 0.7088 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e portanto podemos ter $\theta = \pi/2, \varphi = \pi/4$ ou $\theta = \pi/4, \varphi = 0$, entre muitas outras possibilidades.

****10.13** `Resposta:` $\theta = \pi/2, \varphi = 7\pi/6$.

****10.14** Notando que o spin precessa com frequência $2\omega_0$, temos a situação descrita na figura seguinte