Mecânica Quântica – Série 1

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2015/2016

`Versão de 28/08/2015`

1.1 *Gasiorowicz 1.2*

Sabendo que a densidade de energia por unidade de frequência é dada pela fórmula de Planck

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

onde T é a temperatura absoluta, $k = 1.3807 \times 10^{-23}$ J/K a constante de Boltzmann e $h = 6.6261 \times 10^{-34}$ Js, determine a densidade de energia por unidade de comprimento de onda definida por

$$w(\lambda, T) d\lambda \equiv u(\nu, T) d\nu$$

Mostre que a função $w(\lambda, T)$ tem um máximo da forma $\lambda_{\max} T = b$. Determine a constante b.

1.2 Mostre que a fórmula de Planck se reduz à expressão clássica de Rayleigh para baixas frequências

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

Verifique que a constante de Planck desaparece neste limite clássico!

$\ast$ **1.3** Partindo da fórmula de Planck para a *radiância* $R(\lambda, T)$, a potência da radiação por unidade de área e por unidade de comprimento de onda do corpo negro,

$$R(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1)},$$

deduza a lei de Stefan-Boltzmann. Determine a constante de Stefan-Boltzmann σ, utilizando os valores conhecidos de k e h, e compare com o valor experimental de $\sigma = 5,6703 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$.

Sugestão: Uma mudança de variáveis é útil. O seguinte resultado pode ser utilizado:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

1.4 Uma lâmpada incandescente de 100 W contem um filamento de metal à temperatura 2500 °C. Este tipo de lâmpadas é eficiente para iluminar as nossas casas?

Para decidir esta questão, calcule a fração da potência que a lâmpada emite na parte visível do espectro (com um c.d.o. entre 400 e 700 nm) relativamente à potência total. Em que parte do espectro é emitida a maior parte da potência? Trate o filamento incandescente como um corpo negro.

Nota: Este problema não pode ser resolvido analiticamente. Utilize um método numérico (por exemplo usando o `Mathematica`) ou qualquer outra aproximação adequada para obter uma estimativa do resultado. Utilize os resultados do problema anterior. [Resposta: 5.7%]

1.5 Veja no site do livro na net www.wiley.com/college/gasiorowicz a derivação de Einstein da fórmula de Planck.

* **1.6** *Gasiorowicz 1.4*

A energia máxima dos foto-eletrões do alumínio é 2.3 eV para uma radiação com comprimento de onda de 200 nm e 0.90 eV para uma radiação de 258 nm. Com estes dados calcule a constante de Planck e a função de trabalho do alumínio.

* **1.7** *Gasiorowicz 1.6*

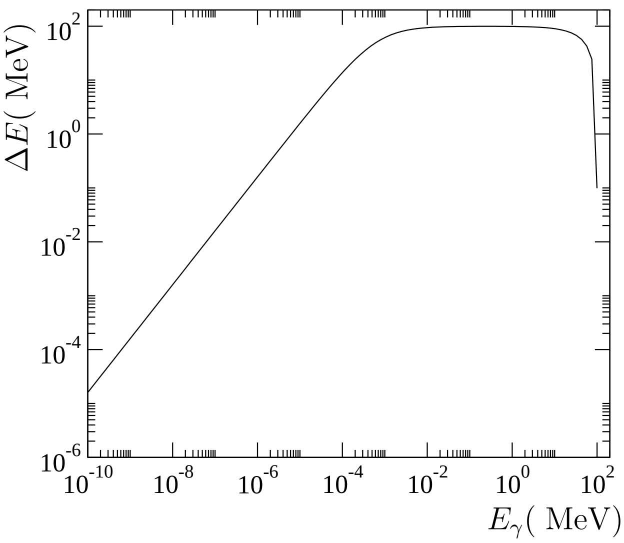
Um fotão com a energia de 100 keV colide com um eletrão em repouso e é difundido com um ângulo de 90°. Qual a energia do fotão depois da colisão? Qual é a energia cinética do eletrão em eV e qual a sua direção depois do choque?

1.8 *Gasiorowicz 1.7*

Um eletrão de energia de 100 MeV colide com um fotão com comprimento de onda de 3×10^6 nm, que corresponde à energia da radiação de fundo (2.74 K). Qual é o máximo da energia perdida?

[Resposta: $E_\gamma = 4.14 \times 10^{-4}$ eV; $\Delta E \simeq 4 \left(\frac{E_e}{m_e c^2}\right)^2 E_\gamma = 6.37 \times 10^{-5}$ MeV]

Como subproduto deste problema, reproduza o seguinte gráfico da variação da energia máxima perdida pelo eletrão, ΔE, em função da energia do fotão, para $E_e = 100$ MeV.



Mostre ainda que a energia total no centro de massa no limite em que $E_\gamma \ll m_e$ é $\sqrt{s} \simeq m_e$.

1.9 Em Física dos raios cósmicos há um efeito muito importante, o chamado *GZK cutoff*, assim designado a partir das iniciais dos seus autores, Greisen, Zatsepin e Kuzmin. No essencial, diz que os raios cósmicos que chegam até nós de fontes extra-galácticas, estão limitados na sua energia máxima. Isto ocorre porque os raios cósmicos colidem com a radiação de fundo *Cosmic Microwave Background (CMB)* (ver problema anterior) e a partir duma certa energia vão poder produzir partículas como a ressonância $\Delta(1232)$ com massa $m_\Delta = 1232\ \mathrm{MeV/c^2}$ e assim perder energia. Considere que os raios cósmicos são protões e que colidem através do processo

$$p + \gamma_{\mathrm{CMB}} \to \Delta \to N\pi$$

onde N é um nucleão (protão ou neutrão).

a) Aplique a lei do corpo negro $\lambda_{max}T = 2.898 \times 10^{-3}$ m.K para determinar o comprimento de onda e a energia dos fotões da radiação de fundo no máximo da intensidade. Compare com os valores do problema anterior.

b) Mostre que a energia do centro de massa necessária para atingir a ressonância do $\Delta(1232)$ ocorre quando a energia dos protões é

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{\left(m_\Delta^2 - m_p^2\right) c^4}{4E_\gamma}$$

Como compara este valor com o cálculo mais exato $E_{\mathrm{p}} \simeq 6 \times 10^{19}$ eV? Recorde que o corpo negro tem um espectro de comprimentos de onda e que portanto um cálculo mais exato deve incluir esse facto.

∗**1.10** Luz ultravioleta ($\lambda = 2500$ Å) incide sobre uma superfície de potássio com a intensidade 2 W/m^2. A função de trabalho de potássio é 2.21 eV.

a) Qual é a energia cinética máxima, e a velocidade correspondente, dos eletrões emitidos?

b) Admitindo que cada fotão liberta um eletrão, quantos eletrões são emitidos por unidade de área e por unidade de tempo?

∗**1.11** Um feixe de luz com a intensidade 120 W/m^2 incide perpendicularmente sobre uma área de tamanho típico de um átomo. Admita que a área tem a forma de um disco com raio 0.1 nm, e que absorve toda a energia que incide sobre ela. Calcule o tempo necessário para que esta área absorva a energia 2.3 eV. Discuta se o resultado obtido é razoável. Que conclui sobre o processo de interação da luz com a matéria?

1.12 Numa experiência de dispersão de Compton, um eletrão em repouso é atingido por um fotão de energia 0.500 MeV. Nesta colisão o eletrão ganha a energia cinética de 0.100 MeV. Determine (a) o comprimento de onda do fotão disperso (em nm), e (b) o ângulo do fotão disperso relativamente à direção de incidência.

∗**1.13** Raios γ de alta energia incidentes num material podem chegar a um detetor que se encontra um pouco à frente da superfície do material através da dispersão de Compton. Quando o ângulo da dispersão se aproxima de 180° fala-se de retro-dispersão de Compton. Mostre que um fotão retro-disperso tem uma energia de aproximadamente 0.25 MeV independentemente da energia do fotão incidente, desde que esta última seja muito maior que $m_e c^2$.

1.14 Veja no site do livro na net `www.wiley.com/college/gasiorowicz` o cálculo do tempo de vida dum átomo de Rutherford.

∗**1.15** *Gasiorowicz 1.16*

A energia clássica dum rotor plano é dada por

$$E = \frac{L^2}{2I}$$

onde L é o momento angular e I o momento de inércia. Aplique as regras de quantização de Bohr para obter os níveis de energia do rotor. Se a condição de Bohr para a frequência das transições de estados denotados por n_1 para estados n_2 for verdadeira mostre que o princípio da correspondência é verificado e que só transições com $\Delta n = \pm 1$ são permitidas.

$\ast$ **1.16** No modelo de Bohr do átomo de hidrogénio, calcule o módulo do momento linear, p_n, da órbita n e o correspondente comprimento de onda de de Broglie, λ_n. Mostre que o perímetro da órbita n é igual a n vezes λ_n.