

# Mecânica Quântica – Série 10

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2015/2016

(Versão de 9 de Novembro de 2015)

## \*10.1 Gasirowicz 10.2

Encontre os valores próprios e os vetores próprios normalizados da matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\beta} \\ \sin \alpha e^{i\beta} & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

**Nota:** Este problema é muito importante, pois permite encontrar os estados próprios de qualquer operador que seja uma combinação linear de  $S_i$ . De facto, é fácil mostrar que uma combinação linear da forma

$$\mathcal{M} = c_x S_x + c_y S_y + c_z S_z$$

com

$$|c_x|^2 + |c_y|^2 + |c_z|^2 = 1,$$

é equivalente a

$$\mathcal{M} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\beta} \\ \sin \alpha e^{i\beta} & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Mostre este resultado, encontrando a relação entre  $c_x, c_y, c_z$  e  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim, pode agora usar os resultados deste problema na resolução dos problemas 10.2 e 10.4.

## \*10.2 Gasirowicz 10.5

Considere o spinor

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Qual é a probabilidade que uma medida do operador  $(3S_x + 4S_y)/5$  dê o valor  $-\hbar/2$ ?

**Nota:** Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

## \*10.3 Gasirowicz 10.6

Considere o sistema de spin 1/2 representado pelo spinor normalizado

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Qual a probabilidade que uma medida de  $S_y$  dê o valor  $-\hbar/2$ ?

**Nota:** Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

## 10.4 Gasirowicz 10.7

Mostre que

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (3)$$

Nota: Este problema é equivalente a mostrar que

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

**\*10.5** *Gasiorowicz 10.8*

Uma partícula de spin  $1/2$  está num estado próprio de  $S_x$  com valor próprio  $\hbar/2$  no instante  $t = 0$ . Naquele instante a partícula é colocada num campo magnético  $\vec{B}$  na direção do eixo dos  $z$  no qual vai precessar durante um tempo  $T$ . Naquele instante  $t = T$  o campo magnético é rodado instantaneamente, de tal forma que passa a apontar segundo o eixo dos  $y$ . Depois de um outro intervalo de tempo  $T$  (isto é, para  $t = 2T$ ) uma medida de  $S_x$  é efetuada. Qual é a probabilidade que o valor de  $\hbar/2$  seja obtido?

Nota: Use o programa **spins** descrito na página alternativa da disciplina para confirmar os resultados do que obteve analiticamente. Note que para fazer esta parte do problema precisa de identificar o que significa o número no icon do campo magnético. Para isso comece por fazer o seguinte problema mais simples. Considere que no instante  $t = 0$  o sistema tem spin *up* segundo o eixo dos  $x$ , isto é,

$$\psi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Como vimos na aula teórica o estado num instante  $t$  será,

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_0 t} \end{bmatrix}$$

onde  $\omega_0 = egB/(4m_e)$ . Portanto as probabilidade de medir, instante  $t$ ,  $S_x$  com valores  $\pm\hbar/2$  são,

$$P(S_x = \frac{\hbar}{2}) = \cos^2(\omega_0 t), \quad P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \sin^2(\omega_0 t), \quad (4)$$

Utilize este resultado e a montagem da figura seguinte para mostrar que

$$\omega_0 t = \frac{\pi}{36} = 5^\circ \implies \text{Uma unidade no espectrómetro de campo B} \quad (5)$$

Pode igualmente fazer gráficos da probabilidade teórica e do valor *experimental* como indicado na Fig. 3.

**10.6** *Gasiorowicz 10.10*

Mostre que para qualquer vetor  $\vec{a}$  com módulo  $a$  se tem,

$$e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}} = \cos a + i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\frac{\sin a}{a} \quad (6)$$

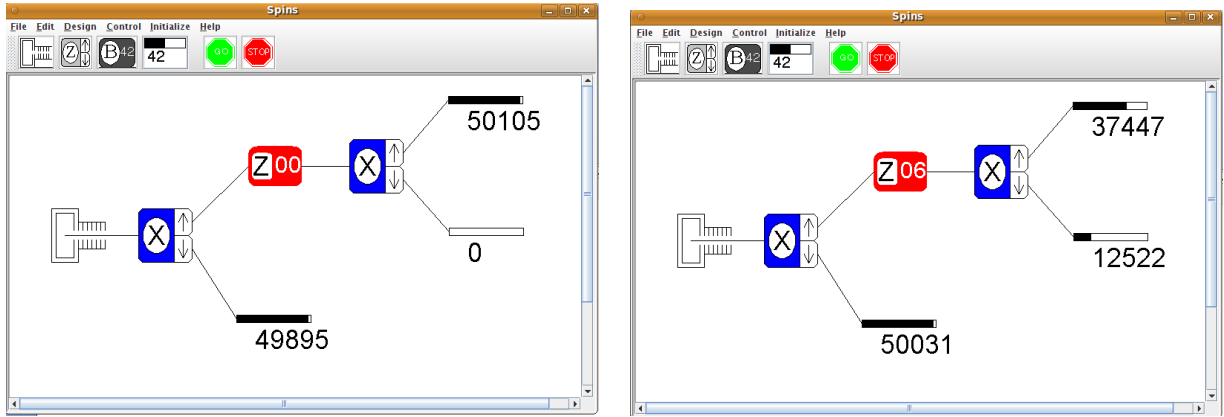


Figura 1: Montagem para reproduzir as condições enunciadas acima. O feixe inicial é aleatório (50% up e 50% down). Estão mostrados os valores no espectrómetro de 0 e 6, o que está de acordo com a Eq.(4) se 6 unidades no espectrómetro corresponderem a  $\pi/6$ .

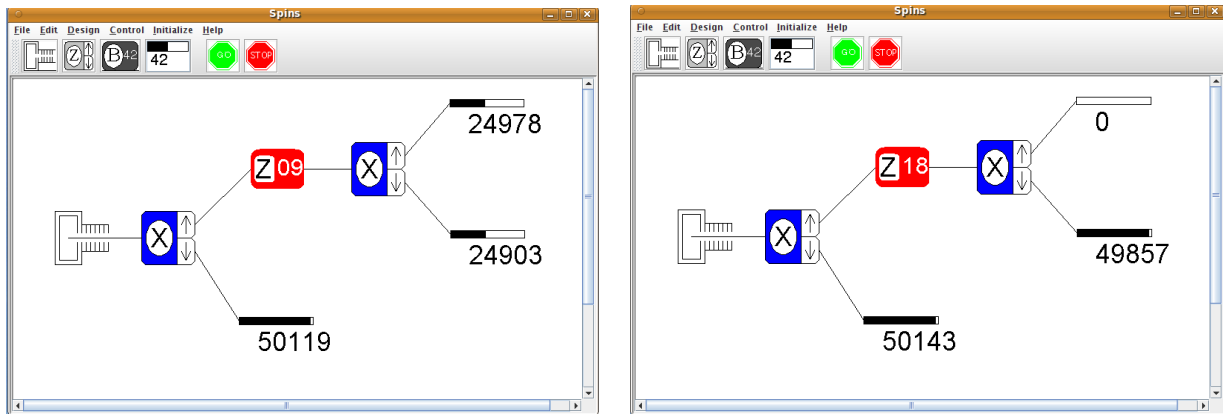


Figura 2: Mesma situação que Fig. 1 mas agora para valores no espectrómetro de 9 e 18, que correspondem, respetivamente a  $\omega_0 t = \pi/4, \pi/2$ .

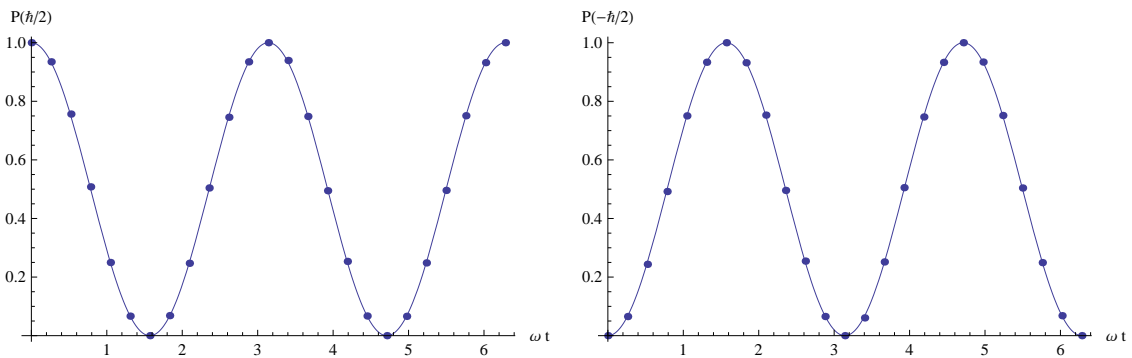


Figura 3: Gráfico da probabilidade de medir spin  $S_x = \hbar/2$  (painel da esquerda) e spin  $S_x = -\hbar/2$  (painel da direita). Sobrepostas estão a curva teórica, Eq. (4) e os resultados obtidos com o programa spins com a identificação da Eq. (5).

Nota: Este problema é equivalente a mostrar que (ver problema 10.3)

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

onde na última relação está subentendida a matriz identidade  $2 \times 2$  no lado direito.

**\*10.7** *Gasiorowicz 10.11*

Considere duas partículas de spin  $1/2$  cujos spins são descritos pelos operadores de Pauli,  $\vec{\sigma}_1$  e  $\vec{\sigma}_2$ . Seja  $\vec{e}$  um vetor unitário ligando as duas partículas. Defina o operador

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{e}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (7)$$

Mostre que se as duas partículas estão no estado  $S = 0$  (singleto) então

$$S_{12}\chi_{\text{singleto}} = 0 \quad (8)$$

Mostre que para o estado tripleto

$$(S_{12} - 2)(S_{12} + 4)\chi_{\text{tripleto}} = 0 \quad (9)$$

Sugestão: Escolha o eixo dos  $z$  segundo  $\vec{e}$ .

**\*\*10.8** *Gasiorowicz 10.12*

Num sistema próton-neutrão de baixa energia (que tem momento angular orbital zero) a energia potencial é dada por

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) \left( 3 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right) + V_3(r)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (10)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor que liga as duas partículas. Calcule a energia potencial para o sistema:  
a) No estado singleto, b) No estado tripleto.

**\*\*10.9** *Gasiorowicz 10.13*

Considere dois elétrons num estado singleto.

- Se uma medida do spin dum dos elétrons mostra que está num estado com  $s_z = 1/2$  qual é a probabilidade que uma medida da componente do spin do outro elétron dê o valor  $s_z = 1/2$ ?
- Se uma medida do spin de um dos elétrons mostra que está num estado com  $s_y = 1/2$  qual é a probabilidade que uma medida da componente segundo  $x$  dê o valor  $s_x = 1/2$  para o outro elétron?
- Se o elétron 1 está no estado descrito por  $\cos \alpha_1 \chi_+ + \sin \alpha_1 e^{i\beta_1} \chi_-$  e o elétron 2 está num estado  $\cos \alpha_2 \chi_+ + \sin \alpha_2 e^{i\beta_2} \chi_-$ , qual é a probabilidade que o sistema de dois elétrons esteja num estado tripleto?

**\*\*10.10** *Gasiorowicz 10.14*

Uma partícula de spin 1 move-se num potencial central da forma,

$$V(r) = v_1(r) + \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{\hbar^2} V_2(r) + \frac{(\vec{S} \cdot \vec{L})^2}{\hbar^4} V_3(r) \quad (11)$$

Quais são os valores de  $V(r)$  para os estados  $j = l + 1$ ,  $j = l$ , e  $j = l - 1$ ?

**10.11** Na aula teórica apresentámos, sem demonstração, o resultado da adição de dois momentos angulares arbitrários (orbitais ou de spin). Recordamos aqui os resultados.

Seja

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

onde os valores próprios de  $J_i^2$  são  $\hbar^2 j_i(j_i + 1)$ . Então temos os resultados seguintes:

1. Os valores próprios de  $J^2$  são  $\hbar^2 j(j + 1)$ . Os valores possíveis para  $j$  são

$$j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$$

2. Qualquer estado  $|j, m\rangle$  se pode exprimir como uma combinação linear dos produtos dos estados  $|j_1, m_1\rangle$  e  $|j_2, m_2\rangle$  na seguinte forma

$$|j, m\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

onde  $C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2)$  são os coeficientes de Clebsch-Gordon e estão dados na Fig. 4 para os valores mais baixos de  $j_1$  e  $j_2$ .

- a) Consulte a tabela para verificar que no caso de spin  $1/2$  se obtém os resultados demonstrados na aula.

**Singleto :**

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

**Tripleto :**

$$|1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, -1\rangle = |1/2, -1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle$$

- b) Mostre que a multiplicidade total é  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  como deveria ser. Para isso considere  $j_1 > j_2$  e mostre que

$$[2(j_1 + j_2) + 1] + [2(j_1 + j_2 - 1) + 1] + \dots + [2(j_1 - j_2) + 1] = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

Verifique, ver alínea a), que no caso de spin  $1/2$  temos 4 estados.

- c) Para o problema do átomo de hidrogénio com spin vamos precisar da adição do momento angular orbital  $L$  com o spin do eletrão. Os valores possíveis para  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  são  $j = l \pm 1/2$  (para  $l \geq 1$  claro, doutra forma para  $l = 0$  temos  $\vec{J} = \vec{S}$ ). Os resultados necessários são

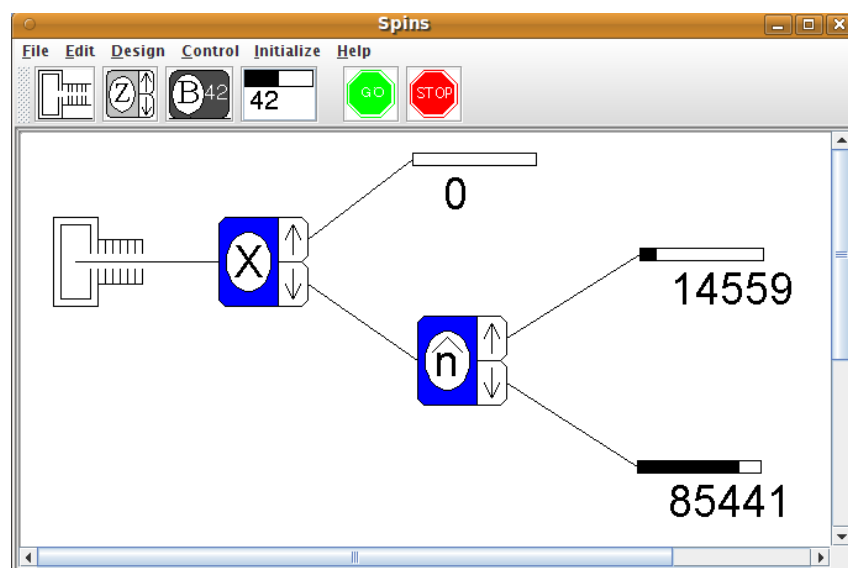
(Gasiorowicz, Eq. 10.82, a menos dum sinal global, na definição da segunda relação para estar de acordo com a tabela dos coeficientes Clebsch-Gordon),

$$\psi_{l+1/2,m_j} = \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l,m_j-1/2} \chi^+ + \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{l,m_j+1/2} \chi^-$$

$$\psi_{l-1/2,m_j} = -\sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{l,m_j-1/2} \chi^+ + \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}} Y_{l,m_j+1/2} \chi^-$$

Use a tabela da Fig. 4 para verificar este resultado para  $l = 1, 2$ . Verifique que as multiplicidades estão corretas.

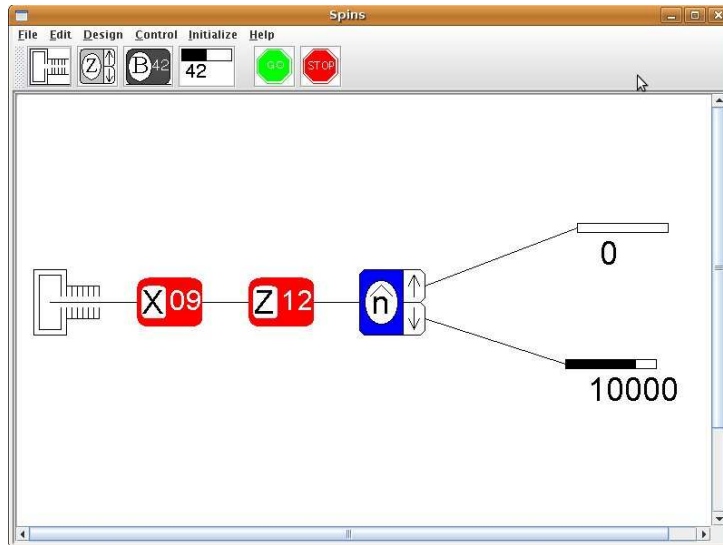
**\*10.12** Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de elétrons detetados depois de terem sido *disparados* 100000 elétrons preparados num certo estado inicial.

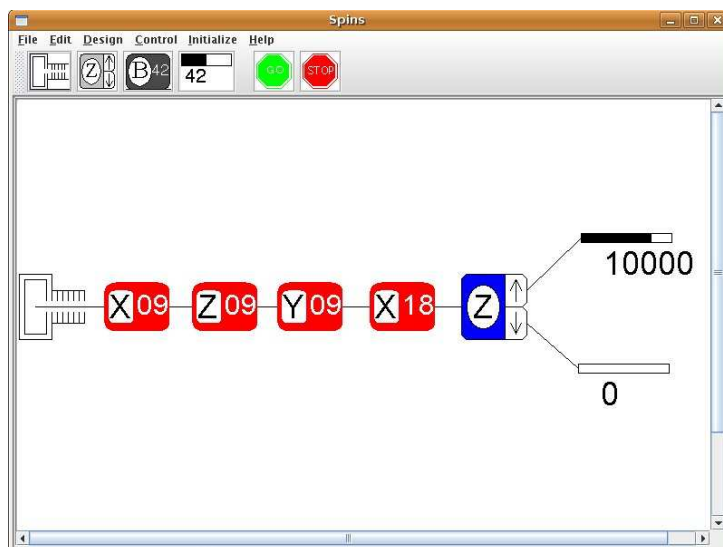
1. Determine o estado inicial na representação em que  $S_z$  é diagonal.
2. Determine a direção  $\vec{n}$  do segundo analisador de spin, sabendo que  $\theta = \pi/2$ . Mostre que a direção definida por  $\theta = \pi/4, \varphi = 0$  conduz às mesmas contagens.

**\*\*10.13** Considere a experiência da Figura seguinte



Sabendo que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z, descubra a direção  $\vec{n}$ . Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

**\*\*10.14** Considere a experiência da Figura seguinte



Sabe-se que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z. Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

### 35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

Notation:

$J$	$J$	$\dots$
$M$	$M$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$

Coefficients

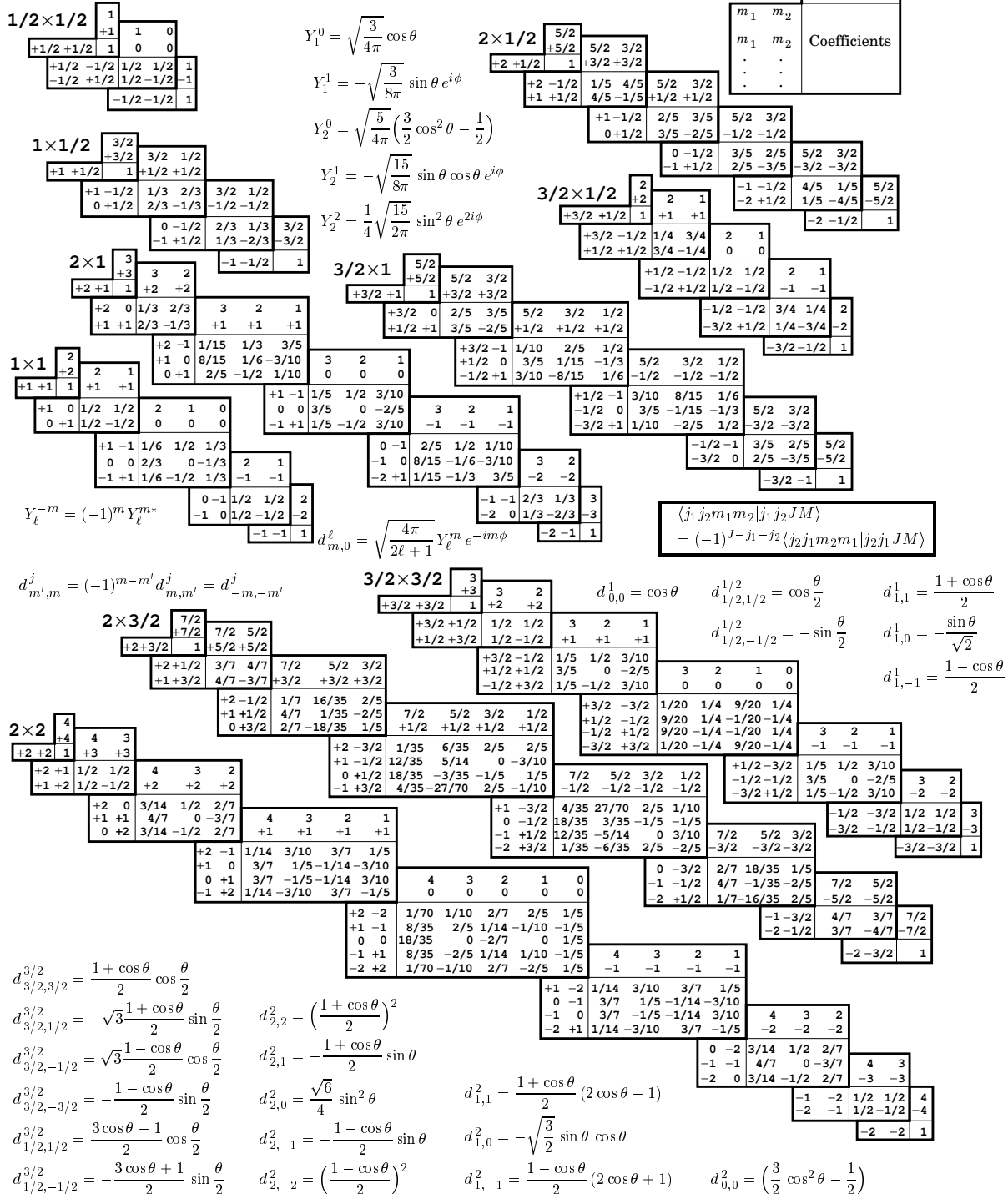


Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figura 4: Coeficientes de Clebsch-Gordan para  $j_i = 1/2, 1, 3/2, 2$ . Fonte: Particle Data Group web page, <http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/clebrpp.pdf>