2º EXAME MQ 2015/2016 (1/2/2016)

I

1) Verdadeira. A primeira medida projecta o estado no estado $|\psi_1\rangle$ e depois a probabilidade de obter b_2 é $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{9}{13}$

2) Falsa $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$

3) Verdadeira $\left.\frac{du}{dx}\right|_{\varepsilon} - \left.\frac{du}{dx}\right|_{-\varepsilon} = \frac{2m}{\hbar}\beta u(0) > 0$. Como $u(0)<0 \Rightarrow \beta<0$

4) Falsa $\langle n|A^2|n+2\rangle = \sqrt{n+2}\sqrt{n+1} \neq 0$

5) Verdadeira $\sin^2\theta \cos 2\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\theta\left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(Y_{22} + Y_{2,-2}\right)$

Portanto $P(L_z=0)=0$

6) Verdadeira $\cos^2\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{9}}\, Y^*_{00} + \sqrt{\frac{16\pi}{45}}\, Y^*_{20}$ e

$$\int d\Omega\, Y^*_{\ell m} Y_{\ell' m'} = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

7) Falsa $|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,+1\rangle|1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle|1,1\rangle$

8) Verdadeira $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\uparrow S_z\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow S_z\rangle$. Logo

$$P(\uparrow S_z) = \frac{3}{4} \;;\; P(\downarrow S_z) = \frac{1}{4}$$

II

1) $\sum_n |A_n|^2 = 1$ com $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = 0$ $n \geq 3$. Logo

$$1 = A^2 + B^2 \Rightarrow B = \sqrt{1-A^2} \quad (B>0)$$

2) $\langle H\rangle = \sum_n E_n|A_n|^2 = E_1 A^2 + E_2 B^2 = E_1 A^2 + E_2(1-A^2)$

$= E_1(A^2 + 4 - 4A^2) = E_1(4-3A^2)$ pois $E_2 = 4E_1$; $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

3) ②

$$P(0 \leq x \leq a/2) = \int_0^{a/2} dx \, |\psi(x,0)|^2$$

$$= A^2 \int_0^{a/2} dx \, u_1^2(x) + B^2 \int_0^{a/2} dx \, u_2^2(x) + 2AB \int_0^{a/2} dx \, u_1(x) u_2(x)$$

obtemos:

$$\int_0^{a/2} dx \, u_1^2(x) = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} dx \, \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a} \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi/2} dy \sin^2 y$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \sin 2y \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{a/2} dx \, u_2^2(x) = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} dx \, \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a} \frac{a}{2\pi} \int_0^{\pi} dy \, \sin^2 y$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \sin 2y \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{a/2} dx \, u_1(x) u_2(x) = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} dx \, \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \frac{2}{a} \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi/2} dy \sin y \sin 2y$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin y - \frac{1}{6} \sin 3y \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3\pi}$$

Portanto:

$$P(0 \leq x \leq a/2) = A^2 \frac{1}{2} + B^2 \frac{1}{2} + 2AB \frac{4}{3\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{8A}{3\pi} \sqrt{1 - A^2}$$

o Ponto de estacionaridade ocorre para

$$\frac{dP}{dx} = \frac{8}{3\pi}\left[\sqrt{1-A^2} - \frac{A^2}{\sqrt{1-A^2}}\right] = 0$$

$$= \frac{8}{3\pi}\,\frac{1-2A^2}{\sqrt{1-A^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

É claro que a probabilidade é mínima para $\boxed{A = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Então

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}} \;;\quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \;;\quad P(0 \le x \le a/2) = \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi}$$

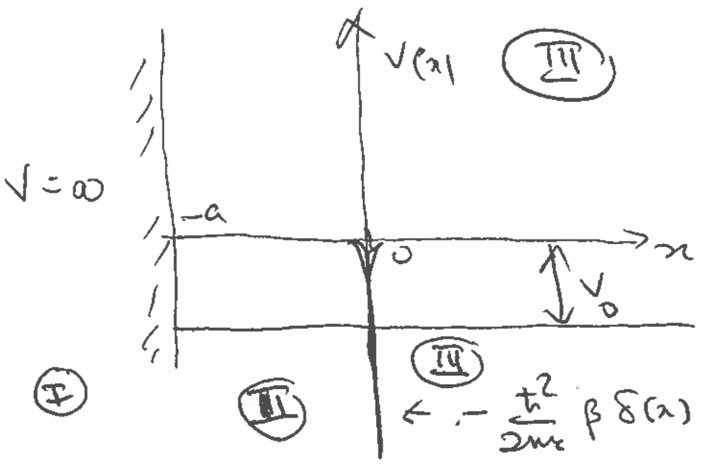
4) $$\psi(x,t) = A\,u_1(x)\,e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \sqrt{1-A^2}\;e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$$

com $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$; $E_2 = 4E_1$.

o valor médio da energia é constante no tempo,

por isso (o Hamiltoniano não depende do tempo $\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle H\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,H]\rangle = 0$)

$$\langle H\rangle_{t=\frac{ma^2}{\hbar^2}} = \langle H\rangle_{t=0} = E_1(4-3A^2)$$



1) Na região I $u_I(x) = 0$ o que implica $u_I(-a) = u_{II}(-a) = 0$

Na região II e III a equação de Schrödinger é

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)u = 0$$

ou seja

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left(-V_0 + |E|\right)u = 0$$

ou ainda

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 u(x) = 0 \qquad \boxed{\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(|E| - V_0\right)}$$

As soluções com as condições $u_{II}(-a) = 0$ e $u_{III}(\infty) = 0$ são

$$\begin{cases} u_{II}(x) = A\sinh(\alpha(x+a)) \\ u_{III}(x) = B\,e^{-\alpha x} \end{cases}$$

Continuidade em $x = 0$

$$A\sinh(\alpha a) = B \qquad (1)$$

Discontinuidade em $x = 0$

$$-\alpha B - A\alpha\cosh(\alpha a) = -\frac{\beta}{a}\underbrace{B}_{u_{III}(0)} \qquad (2)$$

De (1) e (2) resulta:

$$-\alpha B - \alpha B \coth(\alpha a) = -\frac{\beta}{a} B$$

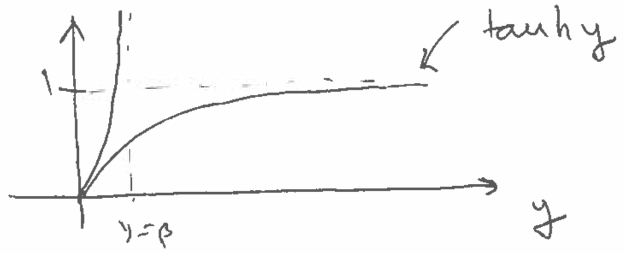
ou

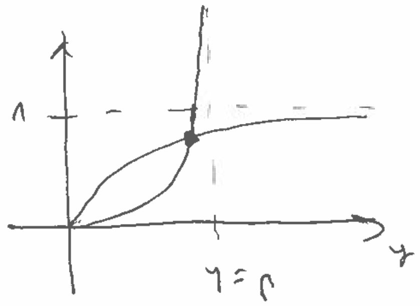
$$\coth(\alpha a) = \frac{\beta - (\alpha a)}{\alpha a}$$

e finalmente com $y = \alpha a$,

$$\boxed{\tanh y = \frac{y}{\beta - y}}$$

2)





Não há

Há 1 estado ligado.

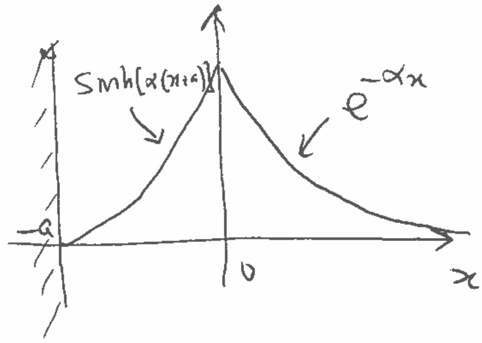
Condição:

$$(\tanh y)'_{y=0} > \left(\frac{y}{\beta - y}\right)'_{y=0}$$

$$1 > \frac{1}{\beta} \Rightarrow \boxed{\beta > 1}$$

Para $\beta = 2$ há um estado ligado.

3)



$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{\varepsilon} - \left.\frac{du}{dx}\right|_{-\varepsilon} = -\frac{\beta}{a}u(0) < 0$$

4) Agora a equação de Schrödinger é

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)u(x) = 0$$

ou

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0 + E\right)u(x) = 0$$

ou ainda

$$\frac{d^2u}{dx^2} + q^2 u(x) = 0 \qquad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E) > 0$$

Assim na região I (notar que mudamos aqui a designação de II → I para estar de acordo com o enunciado)

$$\begin{cases} u_I(x) = A\sin[q(x+a)] & \text{com } u_I(-a) = 0 \\ \text{e} \quad u_{II}(x) = e^{-iqx} + R\,e^{iqx} \end{cases}$$

<u>Continuidade em x=0</u>

$$A\sin(qa) = 1 + R$$

descontinuidade da derivada

$$-iq(1-R) - qA\cos(qa) = -\frac{\beta}{a}(1+R)$$

obtemos

$$-iq(1-R) - q\cot(qa)(1+R) = -\frac{\beta}{a}(1+R)$$

ou ainda

$$R\left(iqa - qa\cot(qa) + \beta\right) = iqa + qa\cot(qa) - \beta$$

$$R = -\frac{\beta - qa\cot(qa) - iqa}{\beta - qa\cot(qa) + iqa} = e^{i(\pi - 2\varphi)}$$

onde

$$\varphi = \arctan\left(\frac{qa}{\beta - qa\cot(qa)}\right)$$

e portanto

$$\boxed{\delta = \pi - 2\varphi = \pi - 2\arctan\left(\frac{qa}{\beta - qa\cot(qa)}\right)}$$

Quando $\beta \to \infty$ temos $R \to -1$. Neste limite a função delta atua como uma parede infinita em $x=0$ e dovremo ter

$$u_{II}(0) = 1 + R = 0 \Rightarrow R = -1$$

IV

1) E' conveniente usare harmonics sferiche. Fermo

$$\frac{x}{r} = \sin\theta \cos\varphi = \frac{1}{2} \sin\theta \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(-Y_{11} + Y_{1,-1} \right) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left(-Y_{11} + Y_{1,-1} \right)$$

e Pertanto

$$\psi(r, \theta, \varphi) = C \sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{-\frac{r}{2a}} \left(-Y_{11} + Y_{1,-1} \right)$$

A normalizzazione da'

$$1 = \int d^3r \, |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 = C^2 \left(\frac{2\pi}{3} \right) \int_0^\infty dr \, r^2 e^{-\frac{r}{a}} +$$

$$+ \underbrace{\int d\Omega \left(-Y_{11}^* + Y_{1,-1}^* \right) \left(-Y_{11} + Y_{1,-1} \right)}_{=2}$$

$$1 = C^2 \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dr \, r^2 e^{-\frac{r}{a}} = C^2 \frac{4\pi}{3} a^3 \underbrace{\int_0^\infty dy \, y^2 e^{-y}}_{=2}$$

Logo

$$1 = C^2 \frac{8\pi}{3} a^3 \Rightarrow \boxed{|C| = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, a^{-3/2}}$$

2) Como

$$\psi(r,\theta,\varphi) = C\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, e^{-\frac{r}{2a}}\left(-Y_{11} + Y_{1,-1}\right)$$

devemos ter

- $P(L^2 = \hbar^2) = 0$ (o valor de L^2 é $\hbar^2 1(1+1) = 2\hbar^2$)
- $P(L_z = \pm\hbar) = \frac{1}{2}$
- $P(L_z = 0) = 0$

V

1) $H_0 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}$

A equação característica é

$$(-\lambda)(-\lambda) - E^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm E, \text{ isto é}$$

$E_1 = -E$ (estado fundamental pois $E>0$) e $E_2 = E$

os estados próprios são: para E_1

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -E\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E\beta = -E\alpha \\ E\alpha = -E\beta \end{cases}$$

$\alpha = -\beta$. Da normalização $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. obtemos portanto

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Para E_2

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta \quad \text{e portanto}$$

$$|2\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Nota: $\langle 1|2\rangle = 0$ como devia ser $(E_1 \neq E_2)$

2) $$E_1^{(1)} = \langle 1|H_1|1\rangle = \eta \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \eta \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0$$

$$E_2^{(1)} = \langle 2|H_1|2\rangle = \eta \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \eta \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \\ -\frac{A}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0$$

As correções de 1ª ordem são nulas.

3) Como os estados não são degenerados podemos usar teoria de perturbações de 2ª ordem.

$$E_1^{(2)} = \frac{|\langle 1|H_1|2\rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \quad ; \quad E_2^{(2)} = \frac{|\langle 1|H_1|2\rangle|^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}$$

(nota que $|\langle 1|H_1|2\rangle| = |\langle 2|H_1|1\rangle|$ pelo que basta calcular um deles)

$$\langle 1|H_1|2\rangle = \eta \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \eta \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \\ -\frac{A}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \eta A$$

logo

$$E_1^{(2)} = \frac{|\eta A|^2}{-E-E} = -\frac{\eta^2 A^2}{2E}$$

$$E_2^{(2)} = \frac{(\eta A)^2}{E-(-E)} = \frac{\eta^2 A^2}{2E}$$

4) $$H = \begin{bmatrix} \eta A & E \\ E & -\eta A \end{bmatrix}$$

A equação característica é

$$(\eta A - \lambda)(-\eta A - \lambda) - E^2 = 0$$

ou

$$\lambda^2 - (\eta A)^2 - E^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{E^2 + (\eta A)^2}$$

$$E_1 = -\sqrt{E^2 + (\eta A)^2} \qquad E_2 = \sqrt{E^2 + (\eta A)^2}$$

$$E_1 = -E\sqrt{1 + \left(\frac{\eta A}{E}\right)^2} \simeq -E\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\eta A)^2}{E^2}\right) \simeq -E - \frac{\eta^2 A^2}{2E}$$

$$E_2 = E\sqrt{1 + \left(\frac{\eta A}{E}\right)^2} \simeq E\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\eta^2 A^2}{E^2}\right) \simeq E + \frac{\eta^2 A^2}{2E}$$

em acordo com os resultados da teoria de perturbações.

1) $|\psi(0)\rangle = |\uparrow, S_x\rangle = \alpha\, |\uparrow, S_y\rangle + \beta\, |\downarrow, S_y\rangle$

Com
$$|\uparrow, S_y\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ; |\downarrow, S_y\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ; |\uparrow S_x\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

obtemos
$$\alpha = \langle \uparrow S_y | \uparrow S_x\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \frac{1}{2}(1-i)$$

$$P(\uparrow, S_y, t=0) = |\alpha|^2 = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

2) Os estados $|\uparrow S_z\rangle$ e $|\downarrow S_z\rangle$ são os estados próprios de H com os valores próprios $+\hbar\omega$ e $-\hbar\omega$ respectivamente

$$H \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hbar\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \hbar\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\hbar\omega \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como
$$|\psi(0)\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow S_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow S_z\rangle$$

Devemos ter

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow S_z\rangle e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow S_z\rangle e^{i\omega t}$$

3) Expandimos $|\psi(t)\rangle$ na base $|\uparrow S_y\rangle, |\downarrow S_y\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\uparrow S_y\rangle + \beta(t)\,|\downarrow S_y\rangle$$

$$\alpha(t) = \langle \uparrow S_y|\psi(t)\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\omega t} - \frac{i}{2} e^{i\omega t}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\omega t}\left[1 - i e^{2i\omega t}\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\omega t}\left[1 + \sin 2\omega t - i\cos 2\omega t\right]$$

A probabilidade é

$$P(\uparrow S_y, t) = |\alpha(t)|^2 = \frac{1}{4}\left[(1+\sin 2\omega t)^2 + \cos^2 2\omega t\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sin 2\omega t)$$

4) o tempo mínimo ocorre quando

$$\sin 2\omega T = 1 \Rightarrow 2\omega T = \pi/2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{4\omega}}$$

o spin precessa com frequência 2ω em torno do eixo dos z. Quando $2\omega T = \pi/2$ o spin move-se do eixo dos xx para o eixo dos yy