

(I)

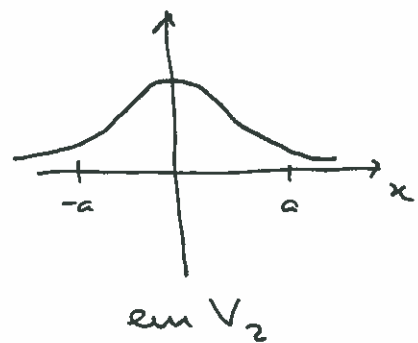
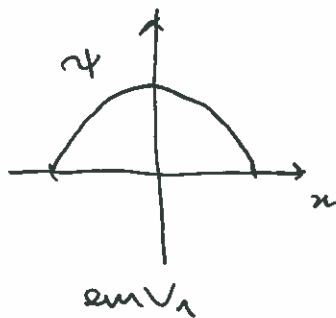
1) Verdadeira.

$$A^\dagger = (x p_y)^\dagger - (y p_x)^\dagger = p_y^\dagger x^\dagger - p_x^\dagger y^\dagger = p_y x - p_x y$$

$$= x p_y - y p_x = A \quad \text{pois } [x, p_y] = [y, p_x] = 0$$

2) Falsa

No potencial V_1 a partícula está mais confinada, a curvatura de func. de onda é maior logo a energia é maior.



3) Verdadeira.

Trata-se do 1º estado excitado e é ímpar. Como $\psi(0) = 0$ não é afectado pelo função delta. Assim

$$E = E_1^- = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2} (2)^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

4) Falsa

$$\langle n+2 | A A^\dagger | n+2 \rangle = \sqrt{n+3} \langle n+2 | A | n+3 \rangle$$

$$= (\sqrt{n+3})^2 \langle n+2 | n+2 \rangle = n+3.$$

(II)

1) $\psi(x,0) = \sum_n A_n \psi_n(x)$ com $A_1 = A, A_2 = -2A, A_n = 0 \quad n \geq 3.$

usando $\sum_n |A_n|^2 = 1 \Rightarrow A^2 + 4A^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$P(E = E_2) = |A_2|^2 = 4A^2 = \frac{4}{5}$$

$$2) \quad \langle H \rangle = \sum_n |A_n|^2 E_n = \frac{1}{5} E_1 + \frac{4}{5} E_2 = \frac{1}{5} (1 + 16) E_1$$

$$= \frac{17}{5} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$$3) \quad \langle x \rangle = \int_0^a dx \psi(x,0) x \psi(x,0)$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^a dx x u_1^2(x) + \frac{4}{5} \int_0^a dx x u_2^2(x)$$

$$- \frac{4}{5} \int_0^a dx x u_1(x) u_2(x)$$

Fazendo os integrais:

$$I_1 = \int_0^a dx x u_1^2(x) = \frac{2}{a} \int_0^a dx x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad ; \quad \frac{\pi x}{a} = y$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi dy y \sin^2 y = \frac{2a}{\pi^2} \left[\frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2y)}{4} - \frac{\cos 2y}{8} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2a}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} = \frac{a}{2}$$

$$I_2 = \int_0^a dx x u_2^2(x) = \frac{2}{a} \int_0^a dx x \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad ; \quad \frac{2\pi x}{a} = y$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} dy y \sin^2 y = \frac{a}{2\pi^2} \left[\frac{y^2}{4} - \frac{\sin 2y}{4} - \frac{\cos 2y}{8} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a}{2\pi^2} \frac{4\pi^2}{4} = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= \int_0^a dx x u_1(x) u_2(x) = \frac{2}{a} \int_0^a dx x \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad (3) \\
 &= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\pi} dy y \sin y \sin 2y \\
 &= \frac{2a}{\pi^2} \frac{1}{2} \left[\cos y - \frac{\cos 3y}{9} + y \sin y - y \frac{\sin 3y}{3} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{a}{\pi^2} \left[-1 + \frac{1}{9} - 1 + \frac{1}{9} \right] = -\frac{16a}{9\pi^2}
 \end{aligned}$$

Poddo tudo junto:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{5} \frac{a}{2} + \frac{4}{5} \frac{a}{2} - \frac{4}{5} \left(-\frac{16a}{9\pi^2} \right) = \frac{a}{2} + \frac{64}{45\pi^2} a$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} u_1(x) e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} - \frac{2}{\sqrt{5}} u_2(x) e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \\
 &= e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} u_1(x) - \frac{2}{\sqrt{5}} u_2(x) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} \right]
 \end{aligned}$$

$$|\psi(x,T)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} u_1(x) - \frac{2}{\sqrt{5}} u_2(x) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)T} \right|^2$$

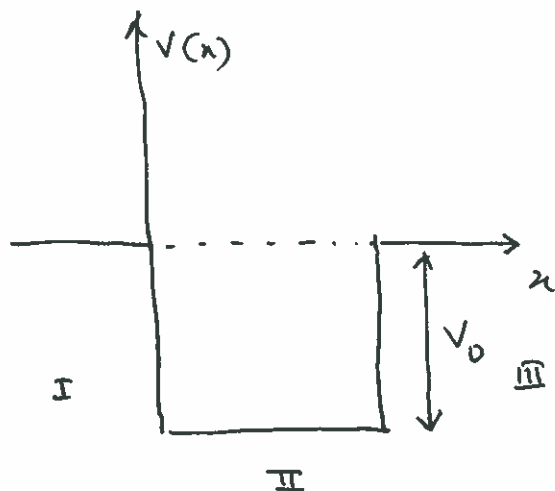
$$|\psi(x,T)|^2 = |\psi(x,0)|^2 \quad \approx$$

$$\frac{E_2 - E_1}{\hbar} T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1} = \frac{2\pi\hbar}{\frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

Logo

$$\boxed{T = \frac{4}{3} \frac{ma^2}{\pi\hbar}}$$

1) O Potencial tem o gráfico seguinte ($V_1=0$)



Nas regiões I e III, para $E = -|E| < 0$ temos a Eq. Schrödinger

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) u = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2m|E|}{\hbar^2} u = 0$$

ou $\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0}$ com $\alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$

Na região II

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) u = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - |E|) u = 0$$

ou $\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} + q^2 u = 0}$ com $q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - |E|)$

Tendo em conta que as soluções devem ir para zero quando $x \rightarrow \pm \infty$, temos as soluções seguintes:

$$\begin{cases}
 u_{\text{I}}(x) = A e^{\alpha x} & x < 0 \\
 u_{\text{II}}(x) = B \sin qx + C \cos qx & 0 < x < 2a \\
 u_{\text{III}}(x) = D e^{-\alpha x} & x > 2a
 \end{cases}$$

Em $x=0$

$$\alpha = \frac{Bq}{C} \Rightarrow \frac{B}{C} = \frac{\alpha}{q} = \frac{\alpha a}{qa} = \frac{\alpha a}{\gamma}$$

Em $x=2a$

$$\begin{aligned}
 -\alpha &= \frac{Bq \cos 2qa - Cq \sin 2qa}{B \sin 2qa + C \cos 2qa} \\
 &= \frac{\frac{B}{C} q - q \tan 2qa}{\frac{B}{C} \tan 2qa + 1}
 \end{aligned}$$

Nota:
 $(\alpha a)^2 = \lambda - \gamma^2$

Portanto

$$\frac{\frac{B}{C} \gamma - \gamma \tan 2\gamma}{\frac{B}{C} \tan 2\gamma + 1} = -\alpha a$$

$$\begin{aligned}
 \tan 2\gamma &= \frac{-\alpha a - \frac{B}{C} \gamma}{-\gamma + \alpha a \frac{B}{C}} = \frac{\alpha a + \alpha a}{\gamma - \frac{(\alpha a)^2}{\gamma}} = \frac{2(\alpha a)\gamma}{\gamma^2 - (\alpha a)^2} \\
 &= \frac{2\gamma \sqrt{\lambda - \gamma^2}}{\gamma^2 - (\lambda - \gamma^2)} = \frac{2\gamma \sqrt{\lambda - \gamma^2}}{2\gamma^2 - \lambda}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\tan 2y = \frac{2y\sqrt{\lambda - y^2}}{2y^2 - \lambda}} \quad (1)$$

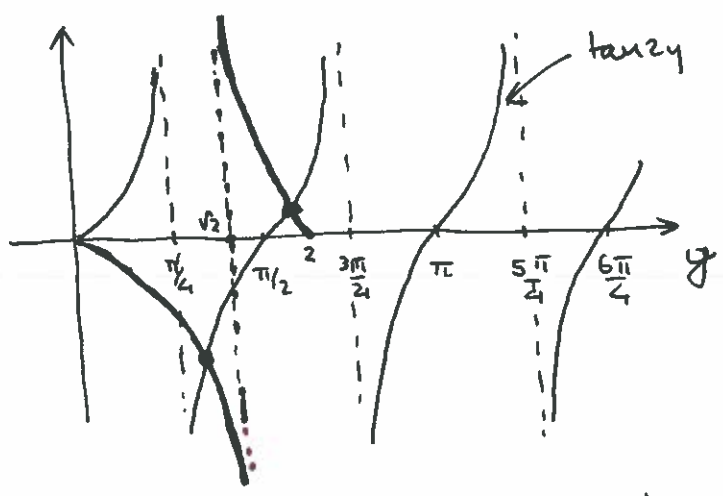
2) Sim existem. Podemos dar duas justificativas:

i) Resposta rápida

Facilmente este potencial não pode deixar de ser zero de potencial também obtido entre $-a < x < a$.
 Assim, sempre haverá soluções (com par) e portanto o mesmo deve acontecer aqui

ii) Resposta analítica (requerida)

traçamos primeiro o gráfico de $\tan 2y$

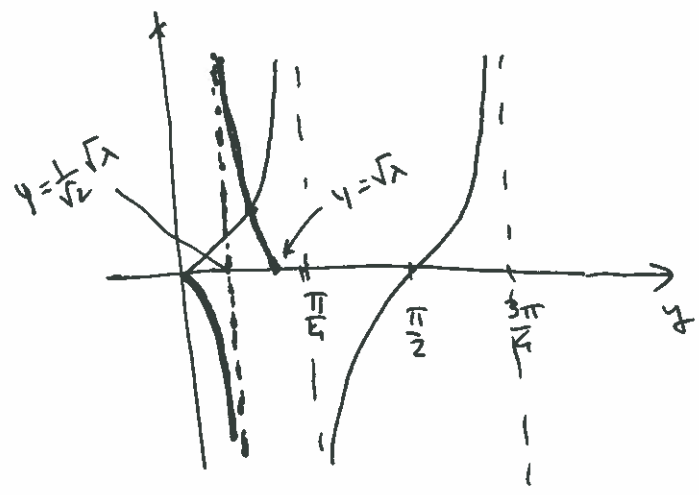


Nota: os valores de λ e os pontos Ligran representados dizem respeito à alínea 3)

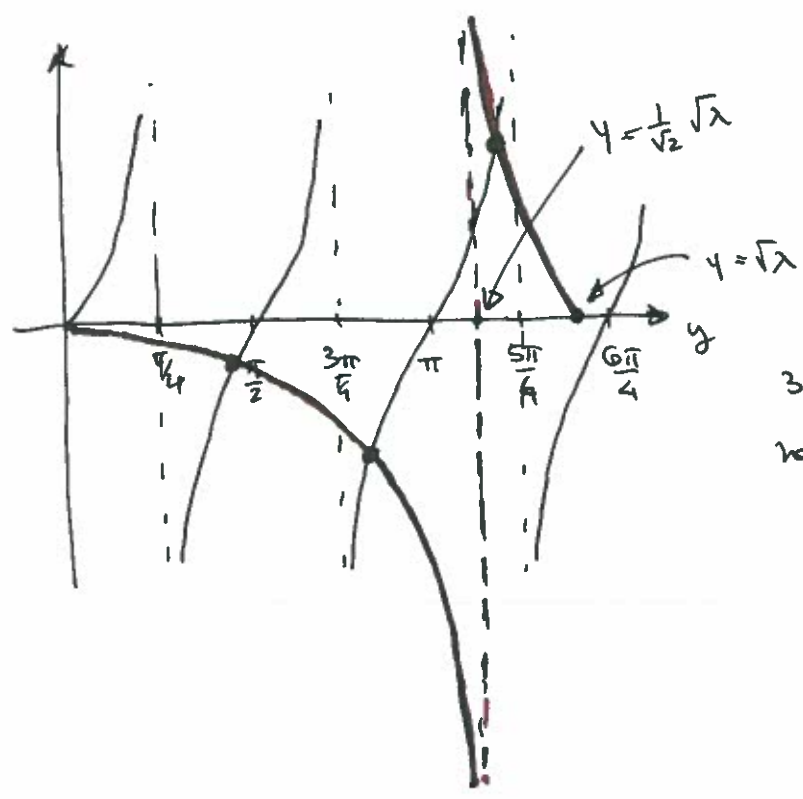
olhamos agora para o lado direito da Equação (1). Para valores pequenos de y é negativo. Tem uma assíntota vertical para

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda} < \sqrt{\lambda}$$

Portanto, mesmo para valores pequenos de λ , sempre



Para valores grandes de λ também não haverá problema



3 Estados ligados nesta Figura.

$$3) \quad \lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{\max} = \sqrt{\lambda} = 2 \\ y_{\text{assimptot}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} \end{cases}$$

As dois estados ligados. Ver Fig na pg 6

4) Da segunda figura se sabe que o resultado que quando $\lambda \gg a$
 Temos $\gamma \simeq \frac{\pi}{2}$ para o estado fundamental. Assim

$$\frac{2ma^2}{\hbar^2} (V_0 - |E|) \simeq \frac{\pi^2}{4}$$

daí se resulta

$$E_1 = -|E| = -V_0 + \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

Este valor é de esperar pois neste caso aproximamos os de poço de potencial infinito que tem a energia do estado fundamental

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \text{ acima do mínimo do potencial (zero no caso usual)}$$

No outro caso o mínimo do potencial é $-V_0$ e portanto justifica-se o resultado obtido

5) Agora $V_1 = \infty \Rightarrow u_{III} = 0$ e $u_{II}(2a) = 0$. Para $E > 0$ todas as equações são de tipo trigonométrico. Temos

$$\begin{cases} u_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx} \\ u_{II}(x) = A \sin(q(x-2a)) \end{cases} \text{ em } \begin{cases} k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + E) \end{cases}$$

e onde já escolhemos a condição $u_{II}(2a) = 0$. Em $x=0$ obtemos

$$\begin{cases} 1 + R = -A \sin(q2a) \\ ik(1 - R) = qA \cos(2qa) \end{cases}$$

$$\frac{i k (1-R)}{1+R} = -q \cot(2qa)$$

onde

$$R = - \frac{q \cot(2qa) + i k}{q \cot(2qa) - i k} = e^{i\pi} \frac{e^{i\beta}}{e^{-i\beta}} = e^{i(\pi + 2\beta)}$$

$$\delta = \pi + 2\beta \quad \text{cm} \quad \beta = \arctan\left(\frac{k}{q \cot(2qa)}\right)$$

quando $V_0 \rightarrow q \rightarrow k$ e portanto

$$R = - \frac{\cot(2ka) + i}{\cot(2ka) - i} = - \frac{\cos(2k) + i \sin(2ka)}{\cos(2ka) - i \sin(2ka)} = - \frac{e^{i2ka}}{e^{-2ika}}$$

Logo

$$R = - e^{i4ka}$$

Este é claro pois se $V_0 = 0$ a única condição é

$$u_{II}(2a) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = e^{2ika} + R e^{-2ika}$$

onde

$$R = - e^{4ika}$$

1) Falsa: Depois de 1ª Medida o estado colapsa no estado $|1,1\rangle$ e portanto a probabilidade de L_z dar \hbar é 1.

2) Verdadeira: Temos $j_1 = 2$ e $j_2 = \frac{1}{2}$. Olhando no table para $2 \times \frac{1}{2}$ vemos que os coeficientes estão certos.

3) Falsa: Os resultados da medida de S_z em $\frac{1}{2}$ em qualquer direção qual quer são sempre $\pm \frac{\hbar}{2}$.

4) Verdadeira: Do formulário temos $\psi(S_n = -\frac{\hbar}{2}) = \begin{bmatrix} \sin \theta/2 \\ -e^{i\phi} \cos \theta/2 \end{bmatrix}$
e para $\theta = 120$, $\phi = 180$ obtemos

$$\psi(S_n = -\frac{\hbar}{2}) = \begin{bmatrix} \sin 60 \\ -e^{i\pi} \cos 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad H &= \frac{1}{2I_1} (L_x^2 + L_y^2) + \frac{L_z^2}{2I_3} \\ &= \frac{1}{2I_1} (L^2 - L_z^2) + \frac{L_z^2}{2I_3} \\ &= \frac{1}{2I_1} L^2 + L_z^2 \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1} \right) \end{aligned}$$

usando $[L_z, L_z] = 0$ e $[L_z, L^2] = 0$ obtemos

$$[H, L_z] = 0$$

As funções próprias de H são portanto as harmónicas ⁽¹¹⁾ esféricas, isto é os estados $|l, m\rangle$ com

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

os valores próprios são

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2I_1} l(l+1) + \hbar^2 m^2 \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1} \right)$$

$$= 2\hbar\omega l(l+1) + \hbar^2 m^2 \left(\frac{\omega}{\hbar} - \frac{2\omega}{\hbar} \right)$$

$$= \hbar\omega [2l(l+1) - m^2]$$

$$2) \quad |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle e^{-i \frac{E_{00}}{\hbar} t} + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle e^{-i \frac{E_{11}}{\hbar} t}$$

com $E_{00} = 0$ e $E_{11} = \hbar\omega [4 - 1] = 3\hbar\omega$

viri

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle e^{-i 3\omega t}$$

(VII)

1) Tem a dimensão dum energia. De facto $r g(r)$ tem a dimensão dum energia, e n intepai

$$\int d\tau r^2 R_{nl} R_{n'l'}$$

não tem dimensão.

2) O estado fundamental é $|100\rangle$. Como a perturbação é ímpar devemos ter

$$E_1^{(1)} = \langle 100 | H_1 | 100 \rangle = 0$$

pois $|\psi_{100}|^2$ é par.

3) O estado $n=2$ é um estado degenerado com $2^2=4$ estados com a mesma energia. Para encontrar o efeito da perturbação temos de começar por encontrar os elementos da matriz de H_1 neste base. As harmônicas esféricas Y_{lm} satisfazem

$$Y_{lm}(-\hat{r}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{r}) \quad ; \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

isto é, são pares ou ímpares conforme l for par ou ímpar.

Como a perturbação é ímpar (par)

$$x = r \sin\theta \cos\varphi = r \frac{1}{2} \sin\theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) =$$

$$= r \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (-Y_{11} + Y_{1,-1})$$

e portanto tem $l=1$) nos elementos da matriz

$$\langle 2l m | H_1 | 2l', m' \rangle$$

Se vão ser não nulos aqueles em que $l = l' \pm 1$. Isto quer dizer que só será diferente de zero n caso

$$l=0, l'=1$$

$$l=1, l'=0$$

Calculemos otros elementos de matriz. Obtenemos

$$\begin{aligned} \langle 21m | H_1 | 200 \rangle &= \int_0^\infty dr r^3 R_{21} R_{20} g(r) \int d\Omega Y_{1m}^* \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (-Y_{11} + Y_{1,-1}) Y_{00} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\sqrt{6} B} \hspace{1em} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\Omega Y_{1m}^* (-Y_{11} + Y_{1,-1}) \end{aligned}$$

Usamos aquí la ortogonalización de los armónicos esféricos

$$\int d\Omega Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

para obtener

$$\langle 210 | H_1 | 200 \rangle = 0$$

$$\langle 211 | H_1 | 200 \rangle = -B = X \text{ (real)}$$

$$\langle 21-1 | H_1 | 200 \rangle = B = Y \text{ (real)}$$

Para los otros elementos usamos

$$\langle 200 | H_1 | 210 \rangle = \langle 210 | H_1 | 200 \rangle^* = 0$$

$$\langle 200 | H_1 | 211 \rangle = \langle 211 | H_1 | 200 \rangle^* = -B$$

$$\langle 200 | H_1 | 21,-1 \rangle = \langle 21,-1 | H_1 | 200 \rangle^* = B$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & Y \\ 0 & 0 & Y & 0 \end{pmatrix}$$

Cum

$$X = -B$$

$$Y = B$$

4) Trebuie de diagonaliza matricea H_1

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & -B & 0 & B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix}$$

A este problema caracteristica e'

$$(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -B & 0 \\ -B & -\lambda & B \\ 0 & B & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) [(-\lambda)(\lambda^2 - B^2) + B^2\lambda]$$

$$= \lambda^2 [\lambda^2 - B^2 - B^2] = 0$$

Cum n valori proprii

$$\lambda = 0, 0, -\sqrt{2}B, +\sqrt{2}B$$



A degenerarea si
parcialmente levantata.

o vector próprio correspondente a $\Delta E_2 = \sqrt{2} B$ e'

(15)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & -B & 0 & B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \sqrt{2} B \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} B a & \Rightarrow a = 0 \\ -Bc = \sqrt{2} B b \\ -Bb + Bd = c \sqrt{2} B \\ Bc = d \sqrt{2} B \end{cases}$$

$$\begin{cases} -c = \sqrt{2} b \\ c = \sqrt{2} d & \Rightarrow b = -d \\ -b + d = \sqrt{2} c & \Rightarrow 2d = \sqrt{2} c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -b \\ c = -\sqrt{2} b \end{cases}$$

o estado não normalizado será

$$|E_2^+\rangle = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow N^2 (1+2+1) = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{2}$$

e por tanto normalizado será

$$|E_2^+\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} |2,1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |2,0,0\rangle - \frac{1}{2} |2,1,-1\rangle$$

(VII)

(16)

1) Como vimos no aula com dois spins $\frac{1}{2}$ podemos ter spin 1 (triplete) e spin 0 (singlete). \Rightarrow estes são próprios de

$$|S, M\rangle \text{ com } S^2 |S, M\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, M\rangle$$

$$S_z |S, M\rangle = \hbar M |S, M\rangle$$

e $S=1$ (Triplete)

$$\left\{ \begin{array}{l} |1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_e |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_p \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_e |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_p + \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_e |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_p \\ |1, -1\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_e |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_p \end{array} \right.$$

e $S=0$ (Singlete)

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_e |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_p - \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_e |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_p$$

2) Usando

$$S^2 = (\vec{S}_e + \vec{S}_p)^2 = S_e^2 + S_p^2 + 2 \vec{S}_e \cdot \vec{S}_p$$

obtemos

$$H_0 = A \frac{1}{\hbar^2} (S^2 - S_e^2 - S_p^2) = A \frac{1}{\hbar^2} \left[\hbar^2 S(S+1) - \hbar^2 \frac{3}{4} - \hbar^2 \frac{3}{4} \right]$$

ou

$$H_0 = A \left[S(S+1) - \frac{3}{2} \right]$$

temos portanto

(17)

$$H_0 |1M\rangle = \frac{1}{2} A |1M\rangle \quad (\text{triplete}, \forall M)$$

$$H_0 |00\rangle = -\frac{3}{2} A |00\rangle$$

3) Temos de escrever a matriz do Hamiltoniano na base singleto, tripleto. Notando que

$$(S_{z,e} - S_{z,p}) |11\rangle = \hbar \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) |11\rangle = 0$$

$$(S_{z,e} - S_{z,p}) |1,-1\rangle = \hbar \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) |1,-1\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} (S_{z,e} - S_{z,p}) |1,0\rangle &= S_{z,e} |10\rangle - S_{z,p} |10\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} |00\rangle - \left(-\frac{\hbar}{2}\right) |00\rangle = \hbar |00\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S_{z,e} - S_{z,p}) |00\rangle &= S_{z,e} |00\rangle - S_{z,p} |00\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} |10\rangle - \left(-\frac{\hbar}{2}\right) |10\rangle = \hbar |10\rangle \end{aligned}$$

e' conveniente ordenar os estados na forma

$$|11\rangle, |1,-1\rangle, |1,0\rangle, |00\rangle$$

Então a matriz de H e'

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}A & \mu_B B_0 \\ 0 & 0 & \mu_B B_0 & -\frac{3}{2}A \end{bmatrix}$$

os valores próprios de sub-matris 2×2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & \mu_B B_0 \\ \mu_B B_0 & -\frac{3}{2}A \end{pmatrix}$$

Sol

$$\left(\frac{1}{2}A - \lambda\right)\left(-\frac{3}{2}A - \lambda\right) - (\mu_B B_0)^2 = 0$$

com soluções

$$\lambda = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{A^2 + (\mu_B B_0)^2}$$

os 4 valores próprios são

$$E_i = \frac{1}{2}A, \frac{1}{2}A, -\frac{A}{2} + \sqrt{A^2 + (\mu_B B_0)^2}, -\frac{A}{2} - \sqrt{A^2 + (\mu_B B_0)^2}$$