MQ - 1º Teste 2014/2015

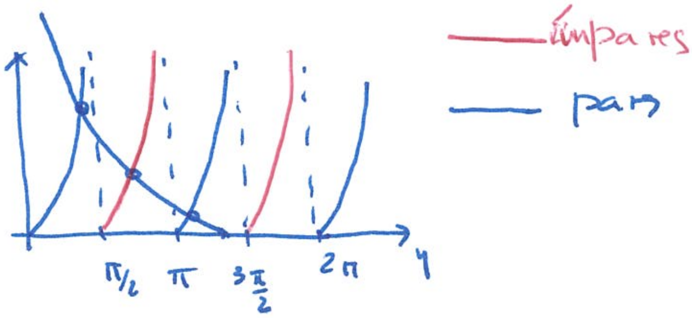
I

1) Verdadeiro : $C^+ = (ABA)^+ = A^+B^+A^+ = ABA = C$

2) Falsa : $[P,H] = [P, V(x)] = 0$ (as paredes estão localizadas)

3) Falsa : $\pi < \sqrt{10} < 3\frac{\pi}{2}$

Há 3 estados ligados



4) Verdadeiro

$$p^2 \propto \left(A^2 + (A^+)^2 - AA^+ - A^+A\right)$$

Como A desce uma unidade e A^+ sobe uma unidade no final temos

$$\langle n|n+2\rangle = 0 \quad ; \quad \langle n|n+4\rangle = 0 \quad ; \quad \langle n|n+6\rangle = 0$$

II

1) Da normalização

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|A_n^-|^2 + |A_n^+|^2\right) = 1$$

com $A_n^+ = 0 \quad \forall n$

$$A_1^- = A \quad ; \quad A_2^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad A_n^- = 0 \quad n \geq 3$$

vem

$$|A|^2 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow |A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) $$\langle E\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n^-|^2 E_n^- + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n^+|^2 E_n^+$$

$$= \frac{1}{2}E_1^- + \frac{1}{2}E_2^- = \frac{1}{2}(4+16)E_0 = 10\,E_0$$

justificação:

Método 1: Para um operador que não depende explicitamente do tempo

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle_t = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A]\rangle$$

Como $[H, H] = 0$ então

$$\frac{d}{dt}\langle H\rangle_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle H\rangle = \text{constante no tempo}$$

Método 2

$$\langle H\rangle_t = \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2}} u_1^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1^- t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^- t}\right]^* H$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} u_1^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1^- t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^- t}\right]$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2}} u_1^-(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_1^- t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2^-(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_2^- t}\right]$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} E_1^- u_1^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1^- t} - \frac{1}{\sqrt{2}} E_2^- u_2^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^- t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a/2}^{a/2} dx \Big[u_1^-(x) u_1^-(x) E_1^- + u_2^-(x) u_2^-(x) E_2^-$$

$$- u_1^-(x) u_2^-(x) E_2^- \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_1^- - E_2^-)t}$$

$$- u_2^-(x) u_1^-(x) E_1^- \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_2^- - E_1^-)t} \Big]$$

$$\langle H\rangle_t = \frac{1}{2}E_1^- + \frac{1}{2}E_2^- = 10\,E_0$$

onde se usou

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx\; u_m^-(x)\,u_n^-(x) = \delta_{mn}$$

3) $$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,u_1^-(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1^- t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,u_2^-(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^- t}$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\left|\,u_1^-(x)\,e^{-i\frac{4E_0}{\hbar}t} - u_2^-(x)\,e^{-i\frac{16E_0}{\hbar}t}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\,u_1^-(x) - u_2^-(x)\,e^{-i\frac{12E_0}{\hbar}t}\right|^2$$

$$|\psi(x,0)|^2 = |\psi(x,T)|^2 \Rightarrow \frac{12E_0 T}{\hbar} = 2\pi$$

$$\boxed{T = \frac{\pi\hbar}{6E_0}}$$

4) $\langle x\rangle$ para $t=0$.

Método 1: Sem fazer integrais.

usando $\psi(x,0) = -\psi(-x,0)$ temos que

$$g(x) = |\psi(x,0)|^2\,x$$

também é ímpar

$$g(x) = -g(x)$$

logo

$$\langle x \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx \; \psi^*(x,0) \, x \, \psi(x,0)$$

$$= \int_{a/2}^{a/2} dx \; x \, |\psi(x,0)|^2 = \int_{a/2}^{a/2} dx \; g(x) = 0$$

Método 2: Sem fazer os integrais até ao fim

$$\langle x \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx \; \psi^*(x,0) \, x \, \psi(x,0)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[u_1^-(x) - u_2^-(x) \right] x \left[u_1^-(x) - u_2^-(x) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[x \left(u_1^-(x) \right)^2 + x \left(u_2^-(x) \right)^2 - 2x \, u_1^- u_2^-(x) \right]$$

$= 0$ pois todas as funções são ímpares.

Método 3: fazer os integrais (deixo como exercício)

<ins>$\langle x \rangle$ para $t>0$</ins>

$$\langle x \rangle_t = 0$$

Justificação

$$\langle x \rangle_t = \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2}} u_1^-(x)\, e^{+\frac{i}{\hbar}E_1^- t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2^-(x)\, e^{+\frac{i}{\hbar}E_2^- t} \right]$$
$$x \left[\frac{1}{\sqrt{2}} u_1^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1^- t} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2^-(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^- t} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[x\left(u_1^-(x)\right)^2 + x\left(u_2^-(x)\right)^2 - x u_1^-(x) u_2^-(x) \left(e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2^- - E_1^-)t} + e^{\frac{i}{\hbar}(E_2^- - E_1^-)t} \right) \right]$$

$$= 0$$

pois todos os integrais em x são de funções ímpares no intervalo $[-a/2, a/2]$.

III

1) Consideremos $E < 0$. Fazemos

$$\alpha^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} \quad ; \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0 - |E|\right)$$

Nas diferentes regiões temos

I) $$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad u_I(x) = A\, e^{\alpha x}$$

para que $u_I(-\infty) = 0$.

II) $\frac{d^2u}{dx^2} + q^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{II}(x) = C \sin qx + D \cos qx$

III) $u_{III}(x) = 0$

Para satisfazer $u_{II}(a) = u_{III}(a) = 0$ tomamos

$u_{II}(x) = B \sin(q(x-a))$. Em resumo

$$\begin{cases} u_I(x) = A e^{\alpha x} & -\infty < x < 0 \\ u_{II}(x) = B \sin q(x-a) & 0 < x < a \\ u_{III}(x) = 0 & x > a \end{cases}$$

A continuidade em $x=0$ da função de onda e da sua derivada dão

$$\begin{cases} A = B \sin(-qa) = -B \sin(qa) \\ \alpha A = Bq \cos(-qa) = Bq \cos(qa) \end{cases}$$

Donde obtem

$$-\cot(qa) = \frac{\alpha}{q} = \frac{\alpha a}{qa}$$

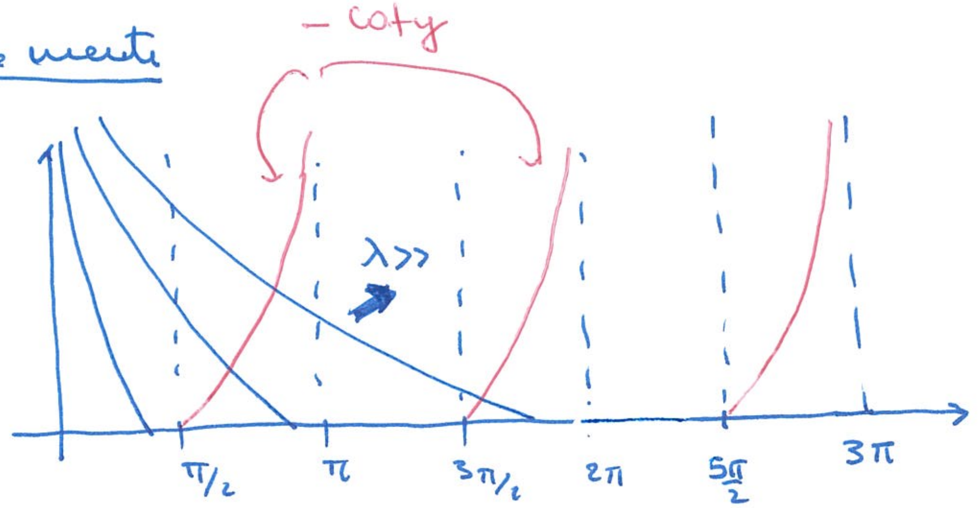
Fazendo, como no enunciado,

$$y = qa \;;\; \alpha a = \sqrt{\lambda - y^2} \;;\; \lambda = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$

obtemos finalmente

$$\boxed{-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}}$$

2) Graficamente



Para haver um estado ligado o zero de $\sqrt{\lambda - y^2}$ tem de ocorrer à direita de $y = \pi/2$. Logo

$$\lambda \geqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \geqslant \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 \geqslant \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}$$

3) Para $V_0 = \dfrac{49\hbar^2}{2ma^2}$ obtemos

$$\lambda = \frac{2ma^2}{\hbar^2}\,\frac{49\hbar^2}{2ma^2} = 49$$

Portanto o zero da raiz ocorre para

$$y = \sqrt{\lambda} = 7$$

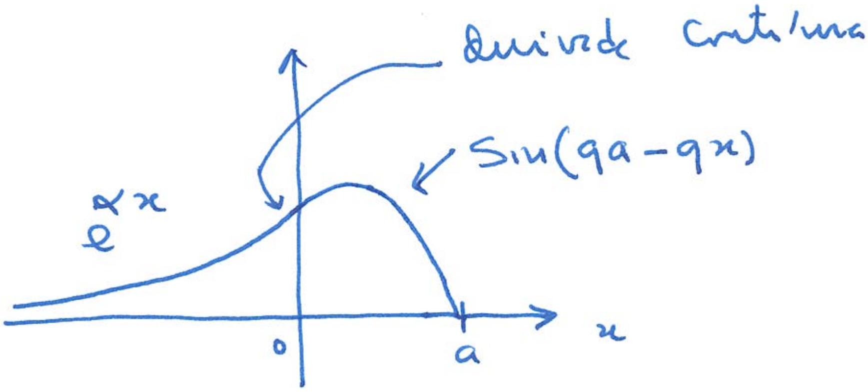
e como

$$2\pi < 7 < \frac{5\pi}{2}$$

Vê-se da figura que há dois estados ligados.

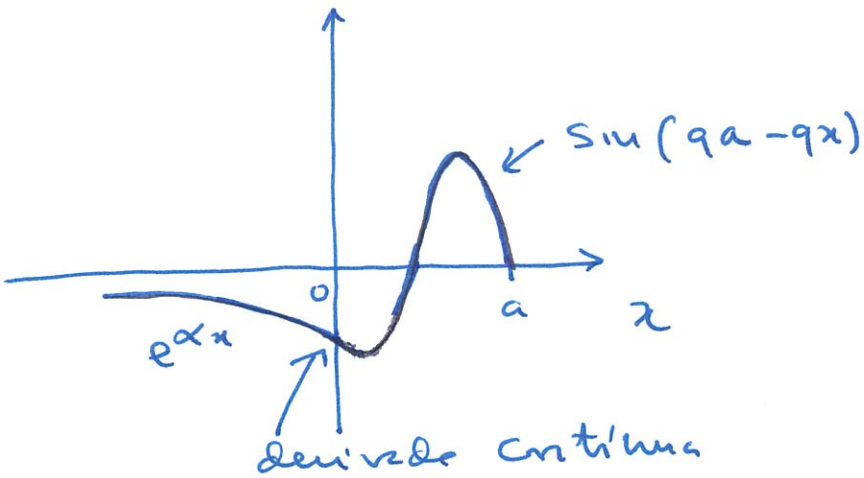
4) <u>Estado fundamental</u>

$\frac{\pi}{2} < qa < \pi$



<u>1º Estado excitado</u>

$\frac{3\pi}{2} < qa < 2\pi$



5) Agora $(E>0)$

$$\begin{cases} u_I(x) = e^{ikx} + R\, e^{-ikx} \\ u_{II}(x) = A \sin q(x-a) \end{cases} \qquad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)$$

já com a condição $u_{II}(a)=0$.

A continuidade da função de onda e da sua derivada dão para $x=0$

$$\begin{cases} 1 + R = -A \sin qa \\ ik - ikR = qA \cos qa \end{cases}$$

Donde

$$\frac{ik(1-R)}{1+R} = -q\cot(qa)$$

e portanto

$$R(q\cot(qa) - ik) = -q\cot(qa) - ik$$

$$\boxed{R = -\frac{q\cot(qa)+ik}{q\cot(qa)-ik}} = -\frac{z}{z^*} \Rightarrow |R| = 1$$

com $z = q\cot(qa) + ik$

Quando $V_0 \to 0$ $q \to k$ e portanto

$$R = -\frac{\cot ka + i}{\cot ka - i} = -\frac{\cos(ka) + i\sin ka}{\cos ka - i\sin ka}$$

$$\boxed{R = -e^{2ika}}$$

Neste caso há só região I e a função de onda é 10

$$u_I(x) = e^{ikx} - e^{2ika} e^{-ikx}$$

tal que

$$u_I(a) = 0$$

Pode-se ainda escrever

$$u_I(x) = e^{ika}\left[e^{ik(x-a)} - e^{-ik(x-a)} \right]$$

$$= 2i\, e^{ika} \sin(k(x-a))$$

$$= C \sin(k(x-a))$$

o que mostra a condição $u_I(a) = 0$