

Mecânica Quântica – Série 12

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2014/2015

(Versão de 26 de Novembro de 2014)

* 12.1 *Gasiorowicz 12.5*

Considere um oscilador harmónico em três dimensões. Se for usada a expressão relativista para a energia cinética, qual a correção (desvio) da energia do estado fundamental?

Notas:

1. O oscilador harmónico a 3D é dado pelo Hamiltoniano não perturbado

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

2. Guiados pelo problema a uma dimensão, e pelo átomo de Hidrogénio, concluímos que o estado fundamental deve ser esfericamente simétrico ($l = 0$) e sua função de onda deve ser

$$u_0(r) = N e^{-\beta r^2}$$

e que as energias devem ser

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right)$$

3. Use a equação de Schrödinger ($l = 0$)

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_0}{dr} = \frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E_0) u_0$$

para mostrar que

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega, \quad \beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

4. Use a condição de normalização para mostrar que a função de onda do estado fundamental deve ser

$$u_0(r) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/4} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2}$$

5. Mostre que

$$\langle 0|V(r)|0\rangle = \frac{3}{4}\hbar\omega, \quad \langle 0|V(r)^2|0\rangle = \frac{15}{16}\hbar^2\omega^2,$$

e a partir daí obtenha a resposta

$$E_0^{(1)} = -\frac{15}{32} \frac{(\hbar\omega)^2}{mc^2}$$

* 12.2 Compare a ordem de grandeza dos desdobramentos fino (só a parte spin-órbita, as correções relativistas são da mesma ordem de grandeza) e hiperfino no átomo de hidrogénio, com a correção ao tamanho finito do próton, Problema 11.3. Os Hamiltoniano são, respetivamente,

$$H_{\text{SO}} = \frac{a}{\hbar^2} \vec{S}_e \cdot \vec{L}, \quad H_{\text{HF}} = \frac{b}{\hbar^2} \left(3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{S}_p) - \vec{S}_p + \frac{8\pi}{3} \vec{S}_p r^3 \delta(\vec{r}) \right) \cdot (\vec{L} + 2\vec{S}_e)$$

onde m_e e m_p são, respetivamente as massas do eletrão e protão, \vec{S}_p o spin do protão, $g_p = 5.56$ o fator g para o protão, e

$$a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r^3}, \quad b = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{g_p \hbar^2}{4m_p m_e c^2} \frac{1}{r^3}$$

Notar que da maneira que estão definidas, a e b , têm as dimensões duma energia e portanto os seus valores médios dão a ordem de grandeza dos respetivos desdobramentos.

12.3 O resultado exato da equação de Dirac para a energia no átomo de hidrogénio é

$$E_{nj} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\nu_{nj}^2}}} - 1 \right), \quad \text{onde} \quad \nu_{nj} = n - \left(j + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

Faça o desenvolvimento em potências de α até à ordem α^4 , inclusive, e veja que está de acordo com a estrutura fina mais correções relativistas encontradas na aula. De fora, ficam só as correções do desdobramento hiperfino, pois a equação de Dirac continua a considerar o protão como um centro de força sem estrutura.

*** 12.4** *Adaptado de Griffiths 6.20*

No *efeito de Zeeman* há normalmente duas situações a considerar: ou o campo \vec{B} é muito menor que \vec{B}_{int} , o campo sentido pelo eletrão no seu referencial próprio, e então o efeito spin-órbita domina e as funções próprias devem ser as funções próprias de L^2, S^2, J^2 e J_z , ou quando $|\vec{B}| \gg |\vec{B}_{\text{int}}|$ então as boas funções próprias devem ser as funções de L^2, S^2, L_z e S_z .

a) Explique porque é que na presença dum campo exterior *forte* o momento angular total não é um bom número quântico.

b) Sabendo que o campo no referencial do eletrão, já incluindo a correção da *precessão de Thomas* (que corrige pelo facto do referencial do eletrão não ser um referencial de inércia), é dado por

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{e}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e c^2 r^3} \vec{L}$$

faça uma estimativa do valor do campo \vec{B} que dá origem ao efeito de Zeeman *fraco* e *forte*, também designado por *efeito de Paschen-Back*. Para fazer as contas é útil introduzir o chamado *magnetão de Bohr*

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$$

e mostrar que

$$B_{\text{int}} = \frac{1}{4} \frac{m_e c^2 \alpha^4}{\mu_B}$$

*** 12.5** *Gasiorowicz 12.3*

Considere um gás de hidrogénio no seu estado fundamental. Qual é o efeito dum campo magnético na estrutura hiperfina? Calcule o espetro para $B = 10^{-4}$ T e $B = 1$ T. **Sugestão:** Para resolver isto encontre os valores próprios e vetores próprios da interação

$$H_{\text{int}} = \frac{A}{\hbar^2} (\vec{S} \cdot \vec{I}) + \frac{a}{\hbar} S_z + \frac{b}{\hbar} I_z \quad (1)$$

onde

$$A = \frac{4g_p m_e}{3M_p} \alpha^4 m_e c^2; \quad a = \frac{e\hbar B}{m_e}; \quad b = -\frac{eg_p \hbar B}{2M_p} \quad (2)$$

Notas:

1. Neste problema $l = 0$ e portanto não há o acoplamento spin órbita.
2. Discuta o que é campo fraco e forte neste problema.
3. É conveniente escolher a base das combinações tripleto e singlete. Assim

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |1, +1\rangle = |1/2, +1/2\rangle_e |1/2, +1/2\rangle_p \\ |\psi_2\rangle &= |1, -1\rangle = |1/2, -1/2\rangle_e |1/2, -1/2\rangle_p \\ |\psi_3\rangle &= |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, +1/2\rangle_e |1/2, -1/2\rangle_p + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle_e |1/2, +1/2\rangle_p \\ |\psi_4\rangle &= |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, +1/2\rangle_e |1/2, -1/2\rangle_p - \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle_e |1/2, +1/2\rangle_p \end{aligned}$$

4. Mostre que nesta base o Hamiltoniano se escreve

$$H' = \begin{bmatrix} \frac{A}{4} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{4} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{4} & \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} - \frac{b}{2} & -\frac{3A}{4} \end{bmatrix}$$

com valores próprios $\frac{A}{4} \pm \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$ e $-\frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2}$.

5. Este é um problema para fazer exatamente. Compare com a teoria das perturbações para o caso de campo fraco e forte.

12.6 Adaptado de Griffiths 6.27

Mostre o seguinte resultado

$$\int d\Omega (\vec{a} \cdot \vec{e}_r)(\vec{b} \cdot \vec{e}_r) = \frac{4\pi}{3} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

para vetores \vec{a} e \vec{b} constantes, isto é que não dependam das coordenadas angulares. Usámos na aula este resultado para o acoplamento hiperfino.

Nota:

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

12.7 Calcule as energias dos estados $2P$ do átomo de hidrogénio num campo magnético exterior quando o campo muda dum campo fraco $B \ll B_{\text{int}}$ para um campo forte $B \gg B_{\text{int}}$. Compare com os resultados de teoria de perturbações nos limites fraco e forte que vimos na aula. Inclua as correções relativistas e o acoplamento spin-órbita.

Notas:

1. Para fazer o problema tem que diagonalizar o seguinte Hamiltoniano

$$H' = H'_{\text{rel}} + \frac{a}{\hbar^2} \vec{S} \cdot \vec{L} + \frac{\mu_B B}{\hbar} (L_z + 2S_z) \equiv H'_{\text{FS}} + \frac{\mu_B B}{\hbar} (L_z + 2S_z)$$

onde

$$a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{2m_e^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle, \quad H'_{\text{rel}} = -\frac{1}{2m_e c^2} \left(\frac{p^2}{2m_e} \right)^2$$

e H'_{FS} é o Hamiltoniano de estrutura fina, soma da correção relativista com o acoplamento spin-órbita.

2. Deve trabalhar na base de estados próprios de J^2 e J_z , pois então o H'_{FS} é diagonal, isto é, como vimos na aula,

$$H'_{\text{FS}} |j, m_j\rangle = \frac{1}{8} m_e c^2 \frac{\alpha^4}{n^4} \left[3 - \frac{4n}{j + 1/2} \right] |j, m_j\rangle$$

o que dá para os estados $2P_{3/2}$ e $2P_{1/2}$

$$H'_{\text{FS}} |3/2, m_j\rangle = -\gamma |3/2, m_j\rangle, \quad H'_{\text{FS}} |1/2, m_j\rangle = -5\gamma |1/2, m_j\rangle,$$

com

$$\gamma = \frac{1}{2} m_e c^2 \left(\frac{\alpha^2}{8} \right)^2$$

3. Construa agora a matriz Hamiltoniana na base dos estados $2P$, isto é, na base

$$|\psi_1\rangle = |3/2, +3/2\rangle = |1, +1\rangle_l |1/2, +1/2\rangle_s$$

$$|\psi_2\rangle = |3/2, -3/2\rangle = |1, -1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s$$

$$|\psi_3\rangle = |3/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle_l |1/2, +1/2\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s$$

$$|\psi_4\rangle = |1/2, +1/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle_l |1/2, +1/2\rangle_s + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s$$

$$|\psi_5\rangle = |3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1, -1\rangle_l |1/2, +1/2\rangle_s + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s$$

$$|\psi_6\rangle = |1/2, -1/2\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1\rangle_l |1/2, +1/2\rangle_s + \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s$$

e mostre que é dada por

$$H' = \begin{bmatrix} -\gamma + 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma + \frac{2}{3}\beta & -\frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3}\beta & -5\gamma + \frac{1}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma - \frac{2}{3}\beta & -\frac{\sqrt{2}}{3}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3}\beta & -5\gamma - \frac{1}{3}\beta \end{bmatrix}$$

onde $\beta = \mu_B B$.

4. Encontre os valores próprios desta matriz
5. Faça um gráfico dos níveis exatos em função de $\frac{\beta}{\gamma}$ comparando com os resultados da teoria de perturbações nos dois limites.
6. Na alínea 3) considerou-se só a base dos estados $2P$. No entanto os dois estados $2S$ também são degenerados com os estados $2P$ para o Hamiltoniano H_0 , não perturbado. Mostre que o Hamiltoniano H' é diagonal para esses estados e portanto eles não se misturam com os seis estados $2P$, justificando o procedimento anterior.

***12.8** *Adaptado de Griffiths 6.33*

Em muitos dos cálculos de teoria de perturbações no átomo de hidrogénio é necessário saber os valores médios de potências de r , isto é,

$$\langle r^k \rangle_{nl} \equiv \int_0^\infty dr r^{2+k} R_{nl}^2(r)$$

Embora estes integrais se possam sempre fazer para cada k, n, l , ter expressões gerais é útil, mas mais difícil. Aqui pode ser útil o Teorema devido a Pauli, Problema 8.4 (também designado por Teorema de Feynman-Hellmann, pois foi independentemente descoberto por estes dois físicos, no caso de Feynman no seu trabalho final de licenciatura no MIT)

O Hamiltoniano para o problema radial é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{\alpha \hbar c}{r}$$

e os valores próprios da energia podem ser expressos como

$$E_n = -\frac{1}{2} \mu c^2 \alpha^2 \frac{1}{(n_r + l + 1)^2}$$

e o referido teorema escreve-se

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle$$

onde λ é qualquer parâmetro de que o Hamiltoniano dependa.

- a) Reveja o Problema 8.4 onde calculou $\langle 1/r \rangle$. Aqui deve escolher $\lambda = \alpha$.
- b) Use $\lambda = l$ para calcular $\langle 1/r^2 \rangle$.

12.9 *Adaptado de Griffiths 6.34*

Prove a seguinte relação de recorrência entre os valores médios de potências de r no átomo de hidrogénio, conhecida por *relação de Kramers*:

$$\frac{k+1}{n^2} \langle r^k \rangle - (2k+1)a_0 \langle r^{k-1} \rangle + \frac{k}{4} [(2l+1)^2 - k^2] a_0^2 \langle r^{k-2} \rangle = 0$$

Para isso siga os passos seguintes:

1. Comece por mostrar que a equação radial se escreve, para $u_{nl}(r) = rR_{nl}(r)$, na forma seguinte (omitindo as dependências e os índices)

$$u'' = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{n^2 a_0^2} \right] u \quad (3)$$

2. Verifique que

$$\langle r^k \rangle = \int_0^\infty dr r^{2+k} R_{nl}^2(r) = \int_0^\infty dr r^k u_{nl}^2(r) \equiv \int dr ur^k u$$

omitindo índices e limites por simplicidade.

3. Use a Eq. (3) para mostrar que

$$\int dr ur^k u'' = l(l+1) \langle r^{k-2} \rangle - \frac{2}{a_0} \langle r^{k-1} \rangle + \frac{1}{n^2 a_0^2} \langle r^k \rangle \quad (4)$$

4. Mostre agora que

$$\int dr ur^k u'' = - \int dr u' r^k u' - k \int dr ur^{k-1} u' \quad (5)$$

5. Mostre agora que

$$\int dr ur^k u' = -\frac{k}{2} \langle r^{k-1} \rangle \quad (6)$$

e que

$$\begin{aligned} \int dr u' r^k u' &= -\frac{2}{k+1} \int dr u'' r^{k+1} u' \\ &= -\frac{2}{k+1} l(l+1) \int dr ur^{k-1} u' + \frac{2}{k+1} \frac{2}{a_0} \int dr ur^k u' \\ &\quad - \frac{2}{k+1} \frac{1}{n^2 a_0^2} \int dr ur^{k+1} u' \end{aligned} \quad (7)$$

6. Introduzindo as Eq. (7) e Eq. (6) na Eq. (5) e igualando à Eq. (4) obtenha finalmente a relação de Kramers.

12.10 Adaptado de Griffiths 6.35

a) Escolhendo $k = 0, 1, 2, 3$ obtenha fórmulas para $\langle r^{-1} \rangle$, $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$, $\langle r^3 \rangle$, notando que $\langle r^0 \rangle = 1$. Observe que pode continuar indefinidamente para qualquer potência positiva.

b) Verifique que no sentido das potências negativas há um impasse. De facto se escolher $k = -1$, só obtém uma relação entre $\langle r^{-2} \rangle$ e $\langle r^{-3} \rangle$

c) Mas se for possível encontrar $\langle r^{-2} \rangle$ por qualquer outro meio (ver Problema 12.7) então é possível encontrar $\langle r^{-3} \rangle$ e qualquer outra potência negativa.

d) Mostre que $\langle r^{-k} \rangle$ só existe para $l \geq k - 2$. Em particular $\langle r^{-3} \rangle$, utilizado no cálculo da estrutura fina do hidrogénio só existe para $l > 0$.

12.11 No estudo da estrutura fina do átomo de hidrogénio utilizou-se o resultado do acoplamento spin-órbita para $j = l + 1/2$

$$E_{\text{SO}}^{(1)} = \frac{1}{4} m_e c^2 \alpha^4 \frac{2l}{n^3 l(l+1)(2l+1)}$$

dizendo que o resultado, indeterminado, para $l = 0$ podia ser utilizado, simplificando l no numerador e denominador. Obtenha-se assim, para $l = 0$

$$E_{\text{SO}}^{(1)} = \frac{1}{2} m_e c^2 \frac{\alpha^4}{n^3}$$

Este resultado parece um pouco estranho, pois como é que o acoplamento spin-órbita é diferente de zero para um momento angular orbital nulo? A explicação é que, por acidente, o resultado final está certo. De facto, quando se faz o limite não relativista da equação de Dirac, percebe-se que há mais um Hamiltoniano perturbado que deve ser tomado em linha de conta, o chamado termo de Darwin

$$H'_{\text{Darwin}} = \frac{\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \nabla^2 V(r) = \frac{\pi \alpha \hbar^3}{2m_e^2 c} \delta^3(\vec{r})$$

Mostre que este termo só contribui para $l = 0$ e dá exatamente

$$E_{\text{Darwin}}^{(1)} = \frac{1}{2} m_e c^2 \frac{\alpha^4}{n^3} \delta_{l0}$$

justificando o *acidente* acima mencionado. A origem do termo de Darwin só pode ser compreendida em mecânica quântica relativista. Deve-se a correções ao potencial de Coulomb devido a flutuações quânticas a distâncias muito pequenas.

12.12 Para além da situação descrita no problema anterior, há outra questão delicada para $l = 0$. Vimos que no cálculo das correções relativistas era preciso calcular $\langle p^4 \rangle$. O método que usámos, que dá o resultado correto pois conhecemos o resultado exato da equação de Dirac, foi

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle \psi_{nlm} | p^4 | \psi_{nlm} \rangle &= -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle \psi_{nlm} | (p^2)^2 | \psi_{nlm} \rangle \\ &= -\frac{1}{8m^3 c^2} 4m^2 \langle \psi_{nlm} | (H_0 - V(r)) (H_0 - V(r)) | \psi_{nlm} \rangle \\ &= -\frac{1}{8m^3 c^2} 4m^2 \langle \psi_{nlm} | (E_n - V(r)) (E_n - V(r)) | \psi_{nlm} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} m c^2 \alpha^4 \left[\frac{2}{n^3(2l+1)} - \frac{3}{4n^4} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

onde o último passo resulta da hermiticidade de H_0 . No entanto, poderíamos pensar que também seria possível aplicar sucessivamente o operador p e calcular o resultado. Quando fazemos isso verificamos que o resultado está errado para os estados $l = 0$. Para percebermos o problema vamos ver uma série de questões relacionadas.

1. Comece por definir o operador de momento radial p_r tal que

$$p_r = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$$

Verifique que este operador satisfaz

$$[r, p_r] = i\hbar, \quad \text{e} \quad p_r^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

e que, em coordenadas esféricas se tem

$$p^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} L^2$$

2. Mostre que a condição necessária para o operador p_r ser hermitico é que a função de onda na origem tem de obedecer a

$$\lim_{r \rightarrow 0} r\psi(r) = 0 \quad (9)$$

o que é a verdadeira razão pela qual temos que excluir as chamadas soluções não regulares com comportamento

$$\psi \sim r^{-l-1}$$

Por exemplo, no caso do poço de potencial infinito a 3 dimensões a solução, para $l = 0$,

$$n_0(kr) = \frac{\cos(kr)}{r}$$

é excluída por este argumento e não pela normalização, já que

$$\int_0^a dr r^2 \int d\Omega \left| \frac{\cos(kr)}{r} \right|^2 = \text{finito}$$

Para demonstrar a Eq. (9) parta da definição de operador hermitico como aquele que tem valores médios reais, definindo

$$A = \langle \psi | p_r | \psi \rangle - \langle \psi | p_r | \psi \rangle^*$$

e mostre que

$$A = i\hbar \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left[(r\psi(r))^2 \right]$$

3. Use agora outra definição de hermiticidade

$$B = \langle f | p_r g \rangle - \langle p_r f | g \rangle$$

mostre que

$$B = i\hbar \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left[r^2 f g \right]$$

e que portanto também $B = 0$ se a Eq. (9) for satisfeita. Notar que $\langle p_r f |$ envolve o complexo conjugado.

4. Mostre que p_r^2 também é hermitico, isto é,

$$\begin{aligned} C &= \langle f | p_r^2 g \rangle - \langle p_r^2 f | g \rangle \\ &= -\hbar^2 \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left[r^2 f \frac{dg}{dr} - (f \leftrightarrow g) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

5. Mostre que o operador p_r^3 já não é hermitico. Para isso mostre que

$$\begin{aligned} D &= \langle f | p_r^3 g \rangle - \langle p_r^3 f | g \rangle \\ &= i\hbar^3 \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left[r^2 f \frac{d^2 g}{dr^2} + r^2 g \frac{d^2 f}{dr^2} - r^2 \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + r f \frac{dg}{dr} + r g \frac{df}{dr} - f g \right] \end{aligned} \quad (11)$$

e que portanto $D = 0$ se e só se pelo menos uma das funções de onda se anular na origem. Ora para os estados $l = 0$ a função de onda não é nula na origem e começamos a ter problemas.

6. Mostre que o operador p_r^4 é hermítico se usar a definição

$$\begin{aligned} E &= \langle f | p_r^4 g \rangle - \langle p_r^4 f | g \rangle \\ &= \hbar^4 \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left[r^2 f \frac{d^3 g}{dr^3} - r^2 \frac{df}{dr} \frac{d^2 g}{dr^2} + 2r f \frac{d^2 g}{dr^2} - 2f \frac{dg}{dr} - (f \leftrightarrow g) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Note que o último termo poderia causar problemas para estados $l = 0$. Contudo pode verificar usando as funções radiais $f(r) = R_{n0}(r), g = R_{m0}(r)$ que $E = 0$ para quaisquer valores de n, m o que vem dum cancelamento não trivial. Verifique que o mesmo é verdade para $f(r) = R_{nl}(r), g = R_{ml}(r)$ (o l tem de ser o mesmo pois p_r conserva o momento angular).

7. No entanto, nem tudo está bem com a hermiticidade de p_r^4 para $l = 0$. Para mostrar isso calcule

$$F = \langle p_r^2 f | p_r^2 g \rangle - \langle f | p_r^4 g \rangle$$

Se não houvesse problemas o resultado deveria ser zero. Mostre que se obtém,

$$F = \hbar^4 \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left[-r^2 f \frac{d^3 g}{dr^3} + r^2 \frac{df}{dr} \frac{d^2 g}{dr^2} - 2r f \frac{d^2 g}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + 2f \frac{dg}{dr} \right] \quad (13)$$

e o último termo é um problema pois não há cancelamento possível para $l = 0$ já que $R_{n0}(0) \neq 0$ e também $dR_{n0}(0)/dr \neq 0$ e agora não há nada para subtrair, como havia na Eq. (12).

8. Todas estas contas se podem fazer no `mathematica`. Faça um programa para resolver as alíneas deste exercício. Mostre que o resultado correto para a correção relativista (porque igual ao da equação de Dirac) de obtém para estados com $l = 0$ usando

$$\langle \psi_{n00} | H_{\text{rel}} | \psi_{n00} \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle p_r^2 \psi_{n00} | p_r^2 \psi_{n00} \rangle$$

Em particular mostre que

$$-\frac{1}{8m^3 c^2} \langle p_r^2 \psi_{100} | p_r^2 \psi_{100} \rangle = -\frac{5}{8} m c^2 \alpha^4$$

enquanto que

$$-\frac{1}{8m^3 c^2} \langle \psi_{100} | p_r^4 \psi_{100} \rangle = \frac{3}{8} m c^2 \alpha^4$$

9. Mostre que para $l \neq 0$ tanto faz como se calcula, obtém-se sempre

$$-\frac{1}{8m^3 c^2} \langle p_r^2 \psi_{nlm} | p_r^2 \psi_{nlm} \rangle = -\frac{1}{8m^3 c^2} \langle \psi_{nlm} | p_r^4 \psi_{nlm} \rangle = -\frac{1}{2} m c^2 \alpha^4 \left[\frac{2}{n^3(2l+1)} - \frac{3}{4n^4} \right]$$

isto é, exatamente o valor que obtivemos usando a hermiticidade de H_0 , Eq. (8).

10. Mostre que $[H_0, p^2] \neq 0$. Para isso considere só o caso em que $l = 0$ e obtenha ($V(r) = -\alpha \hbar c / r$),

$$[H_0, p^2] = [H_0, p_r^2] = \frac{2\alpha \hbar^3 c}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}$$