Mecânica Quântica – Série 10

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2014/2015

`(Versão de 26 de Novembro de 2014)`

∗10.1 *Gasiorowicz 10.2*

Encontre os valores próprios e os vetores próprios normalizados da matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\ e^{-i\beta} \\ \sin\alpha\ e^{i\beta} & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

`Nota:` Este problema é muito importante, pois permite encontrar os estados próprios de qualquer operador que seja uma combinação linear de S_i. De facto, é fácil mostrar que uma combinação linear da forma

$$\mathcal{M} = c_x S_x + c_y S_y + c_y S_y$$

com

$$|c_x|^2 + |c_y|^2 + |c_z|^2 = 1 \ ,$$

é equivalente a

$$\mathcal{M} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\ e^{-i\beta} \\ \sin\alpha\ e^{i\beta} & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Mostre este resultado, encontrando a relação entre c_x, c_y, c_z e α e β. Assim, pode agora usar os resultados deste problema na resolução dos problemas 10.2 e 10.4.

∗10.2 *Gasiorowicz 10.5*

Considere o spinor

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Qual é a probabilidade que uma medida do operador $(3S_x + 4S_y)/5$ dê o valor $-\hbar/2$?

`Nota:` Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

∗10.3 *Gasiorowicz 10.6*

Considere o sistema de spin 1/2 representado pelo spinor normalizado

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Qual a probabilidade que uma medida de S_y dê o valor $-\hbar/2$?

`Nota:` Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

10.4 *Gasiorowicz 10.7*

Mostre que

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\,\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{3}$$

`Nota:` Este problema é equivalente a mostrar que

$$\sigma_i\,\sigma_j = \delta_{ij} + i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$$

∗ 10.5 *Gasiorowicz 10.8*
Uma partícula de spin 1/2 está num estado próprio de S_x com valor próprio $\hbar/2$ no instante $t=0$. Naquele instante a partícula é colocada num campo magnético $\vec{B}$ na direção do eixo dos z no qual vai precessar durante um tempo T. Naquele instante $t=T$ o campo magnético é rodado instantaneamente, de tal forma que passa a apontar segundo o eixo dos y. Depois de um outro intervalo de tempo T (isto é, para $t=2T$) uma medida de S_x é efetuada. Qual é a probabilidade que o valor de $\hbar/2$ seja obtido?

`Nota:` Use o programa `spins` descrito na página alternativa da disciplina para confirmar os resultados do que obteve analiticamente. Note que para fazer esta parte do problema precisa de identificar o que significa o número no icon do campo magnético. Para isso comece por fazer o seguinte problema mais simples. Considere que no instante $t=0$ o sistema tem spin *up* segundo o eixo dos x, isto é,

$$\psi(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Como vimos na aula teórica o estado num instante t será,

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ e^{-i\omega_0 t} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ e^{i\omega_0 t} \end{bmatrix}$$

onde $\omega_0 = egB/(4m_e)$. Portanto as probabilidade de medir, instante t, S_x com valores $\pm\hbar/2$ são,

$$P(S_x = \frac{\hbar}{2}) = \cos^2(\omega_0 t), \quad P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \sin^2(\omega_0 t), \tag{4}$$

Utilize este resultado e a montagem da figura seguinte para mostrar que

$$\omega_o t = \frac{\pi}{36} = 5^\circ \Longrightarrow \textbf{Uma unidade no espectrómetro de campo B} \tag{5}$$

Pode igualmente fazer gráficos da probabilidade teórica e do valor *experimental* como indicado na Fig. 3.

10.6 *Gasiorowicz 10.10*
Mostre que para qualquer vetor $\vec{a}$ com módulo a se tem,

$$e^{i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{a}} = \cos a + i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\frac{\sin a}{a} \tag{6}$$

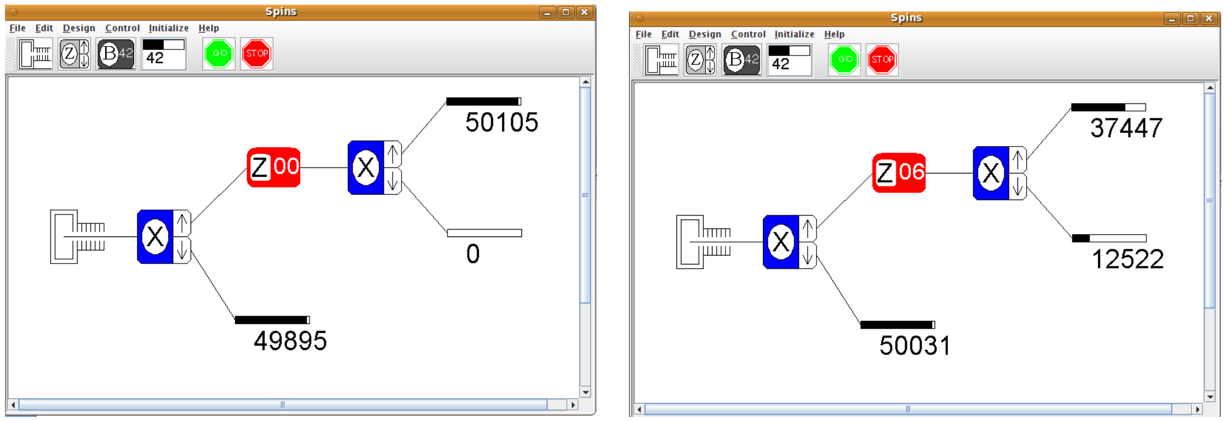


Figura 1: Montagem para reproduzir as condições enunciadas acima. O feixe inicial é aleatório (50% up e 50% down). Estão mostrados os valores no espectrómetro de 0 e 6, o que está de acordo com a Eq.(4) se 6 unidades no espectrómetro corresponderem a $\pi/6$.

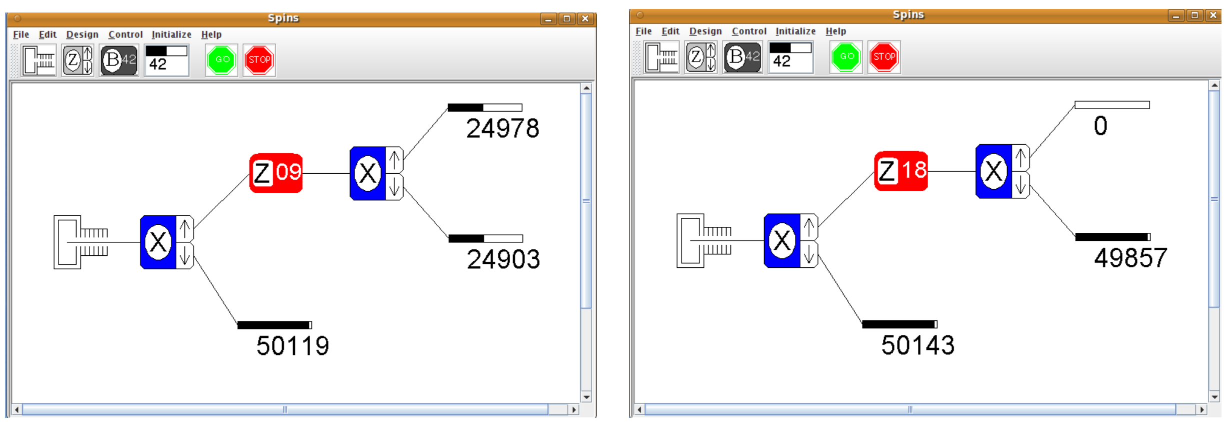


Figura 2: Mesma situação que Fig. 1 mas agora para valores no espectrómetro de 9 e 18, que correspondem, respetivamente a $\omega_0 t = \pi/4, \pi/2$.

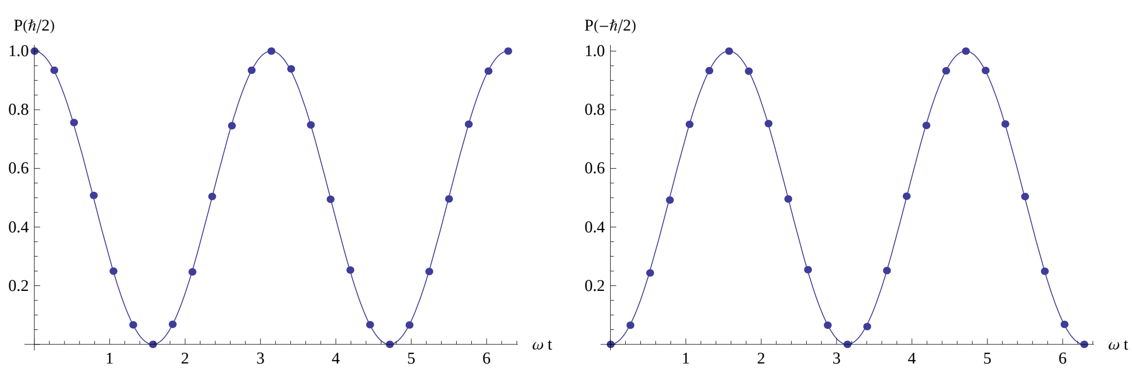


Figura 3: Gráfico da probabilidade de medir spin $S_x = \hbar/2$ (painel da esquerda) e spin $S_x = -\hbar/2$ (painel da direita). Sobrepostas estão a curva teórica, Eq. (4) e os resultados obtidos com o programa `spins` com a identificação da Eq. (5).

`Nota:` Este problema é equivalente a mostrar que (ver problema 10.3)

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$$

onde na última relação está subentendida a matriz identidade 2×2 no lado direito.

$\ast$ **10.7** *Gasiorowicz 10.11*
Considere duas partículas de spin 1/2 cujos spins são descritos pelos operadores de Pauli, $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$. Seja $\vec{e}$ um vetor unitário ligando as duas partículas. Defina o operador

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{e})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{e}) - \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2 \tag{7}$$

Mostre que se as duas partículas estão no estado $S=0$ (singleto) então

$$S_{12}\chi_{\text{singleto}} = 0 \tag{8}$$

Mostre que para o estado tripleto

$$(S_{12}-2)(S_{12}+4)\chi_{\text{tripleto}} = 0 \tag{9}$$

`Sugestão:` Escolha o eixo dos z segundo $\vec{e}$.

$\ast$ **10.8** *Gasiorowicz 10.12*
Num sistema protão-neutrão de baixa energia (que tem momento angular orbital zero) a energia potencial é dada por

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\left(3\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\right) + V_3(r)\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2 \tag{10}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor que liga as duas partículas. Calcule a energia potencial para o sistema: a) No estado singleto, b) No estado tripleto.

$\ast$ **10.9** *Gasiorowicz 10.13*
Considere dois eletrões num estado singleto.

a) Se uma medida do spin dum dos eletrões mostra que está num estado com $s_z = 1/2$ qual é a probabilidade que uma medida da componente do spin do outro eletrão dê o valor $s_z = 1/2$?

b) Se uma medida do spin de um dos eletrões mostra que está num estado com $s_y = 1/2$ qual é a probabilidade que uma medida da componente segundo x dê o valor $s_x = 1/2$ para o outro eletrão?

c) Se o eletrão 1 está no estado descrito por $\cos\alpha_1\chi_+ + \sin\alpha_1 e^{i\beta_1}\chi_-$ e o eletrão 2 está num estado $\cos\alpha_2\chi_+ + \sin\alpha_2 e^{i\beta_2}\chi_-$, qual é a probabilidade que o sistema de dois eletrões esteja num estado tripleto?

$\ast$ **10.10** *Gasiorowicz 10.14*
Uma partícula de spin 1 move-se num potencial central da forma,

$$V(r) = v_1(r) + \frac{\vec{S}\cdot\vec{L}}{\hbar^2}V_2(r) + \frac{(\vec{S}\cdot\vec{L})^2}{\hbar^4}V_3(r) \tag{11}$$

Quais são os valores de $V(r)$ para os estados $j = l + 1$, $j = l$, e $j = l - 1$?

10.11 Na aula teórica apresentámos, sem demonstração, o resultado da adição de dois momentos angulares arbitrários (orbitais ou de spin). Recordamos aqui os resultados. Seja

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

onde os valores próprios de J_i^2 são $\hbar^2 j_i(j_i + 1)$. Então temos os resultados seguintes:

1. Os valores próprios de J^2 são $\hbar^2 j(j + 1)$. Os valores possíveis para j são

$$j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$$

2. Qualquer estado $|j, m\rangle$ se pode exprimir como uma combinação linear dos produtos dos estados $|j_1, m_1\rangle$ e $|j_2, m_2\rangle$ na seguinte forma

$$|j, m\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2) \, |j_1, m_1\rangle \, |j_2, m_2\rangle$$

onde $C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2)$ são os coeficientes de Clebsch-Gordon e estão dados na Fig. 4 para os valores mais baixos de j_1 e j_2.

a) Consulte a tabela para verificar que no caso de spin 1/2 se obtém os resultados demonstrados na aula.

$$\texttt{Singleto}:$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

$$\texttt{Tripleto}:$$

$$|1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle \, |1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle \, |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, -1\rangle = |1/2, -1/2\rangle \, |1/2, -1/2\rangle$$

b) Mostre que a multiplicidade total é $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ como deveria ser. Para isso considere $j_1 > j_2$ e mostre que

$$[2(j_1 + j_2) + 1] + [2(j_1 + j_2 - 1) + 1] + \cdots + [2(j_1 - j_2) + 1] = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

Verifique, ver alínea a), que no caso de spin 1/2 temos 4 estados.

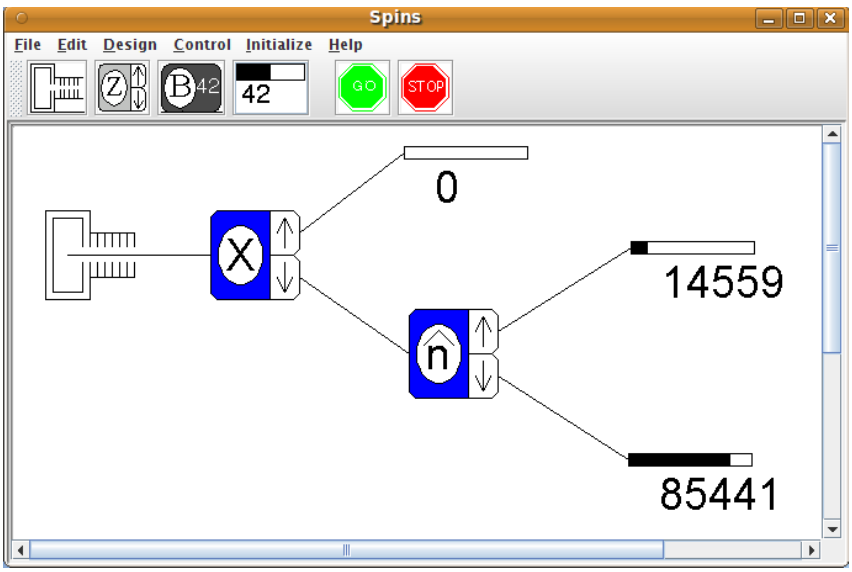
c) Para o problema do átomo de hidrogénio com spin vamos precisar da adição do momento angular orbital L com o spin do eletrão. Os valores possíveis para $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ são $j = l \pm 1/2$ (para $l \geq 1$ claro, doutra forma para $l = 0$ temos $\vec{J} = \vec{S}$). Os resultados necessários são

(Gasiorowicz, Eq. 10.82, a menos dum sinal global, na definição da segunda relação para estar de acordo com a tabela dos coeficientes Clebsch-Gordon),

$$\begin{aligned}\psi_{l+1/2,m_j} &= \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}Y_{l,m_j-1/2}\,\chi^+ + \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}}Y_{l,m_j+1/2}\,\chi^- \\ \psi_{l-1/2,m_j} &= -\sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}}Y_{l,m_j-1/2}\,\chi^+ + \sqrt{\frac{l+m_j+1/2}{2l+1}}Y_{l,m_j+1/2}\,\chi^-\end{aligned}$$

Use a tabela da Fig. 4 para verificar este resultado para $l = 1, 2$. Verifique que as multiplicidades estão corretas.

$*$ **10.12** Considere a experiência da Figura seguinte

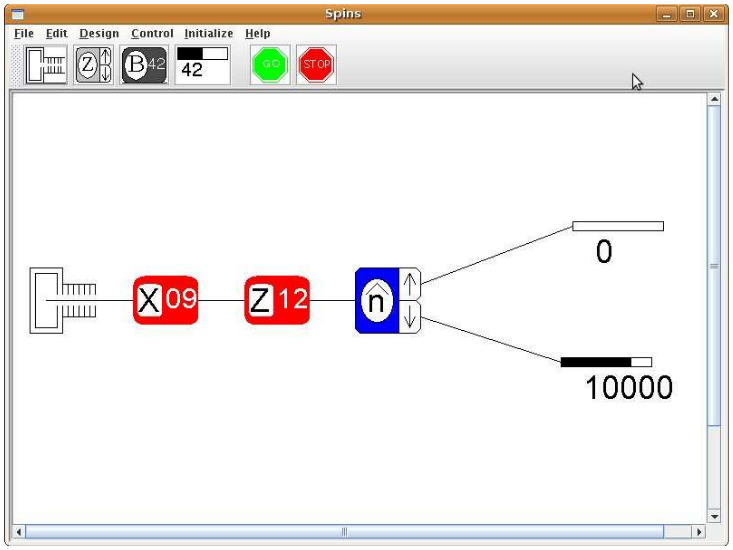


onde os números nos contadores indicam o número de eletrões detetados depois de terem sido *disparados* 100000 eletrões preparados num certo estado inicial.

1. Determine o estado inicial na representação em que S_z é diagonal.

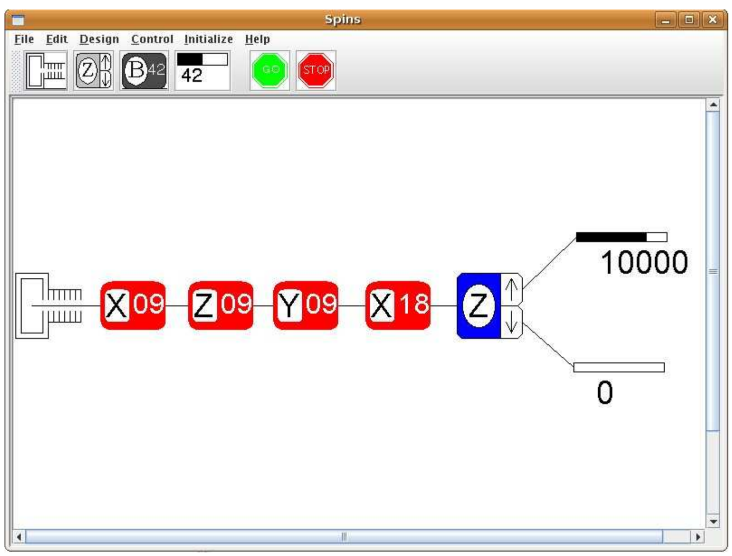
2. Determine a direção $\vec{n}$ do segundo analisador de spin, sabendo que $\theta = \pi/2$. Mostre que a direção definida por $\theta = \pi/4, \varphi = 0$ conduz às mesmas contagens.

$*$ **10.13** Considere a experiência da Figura seguinte



Sabendo que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z, descubra a direção $\vec{n}$. Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

∗10.14 Considere a experiência da Figura seguinte



Sabe-se que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z. Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	…
		M	M	…
m_1	m_2			
m_1	m_2	Coefficients		
⋮	⋮			

1/2×1/2

		1
		+1
+1/2	+1/2	1

		1	0
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		1
		−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

		3/2
		+3/2
+1	+1/2	1

		3/2	1/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

		3/2	1/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

		3/2
		−3/2
−1	−1/2	1

2×1

		3
		+3
+2	+1	1

		3	2
		+2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

		3	2	1
		+1	+1	+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

		3	2	1
		0	0	0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1
		−1	−1	−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

		3	2
		−2	−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

		3
		−3
−2	−1	1

1×1

		2
		+2
+1	+1	1

		2	1
		+1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

		2	1	0
		0	0	0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

		2	1
		−1	−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

		2
		−2
−1	−1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

2×1/2

		5/2
		+5/2
+2	+1/2	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

		5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

		5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

		5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

		2
		+2
+3/2	+1/2	1

		2	1
		+1	+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

		2	1
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		2	1
		−1	−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

		2
		−2
−3/2	−1/2	1

3/2×1

		5/2
		+5/2
+3/2	+1	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

		5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

		5/2
		−5/2
−3/2	−1	1

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

3/2×3/2

		3
		+3
+3/2	+3/2	1

		3	2
		+2	+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

		3	2	1
		+1	+1	+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1	0
		0	0	0	0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

		3	2	1
		−1	−1	−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2
		−2	−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

		3
		−3
−3/2	−3/2	1

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

2×3/2

		7/2
		+7/2
+2	+3/2	1

		7/2	5/2
		+5/2	+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

		7/2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

		7/2	5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2	+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

		7/2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

		7/2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2	−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

		7/2	5/2
		−5/2	−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

		7/2
		−7/2
−2	−3/2	1

2×2

		4
		+4
+2	+2	1

		4	3
		+3	+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

		4	3	2
		+2	+2	+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

		4	3	2	1
		+1	+1	+1	+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2	1	0
		0	0	0	0	0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

		4	3	2	1
		−1	−1	−1	−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2
		−2	−2	−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

		4	3
		−3	−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

		4
		−4
−2	−2	1

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\,\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\,\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,2}_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{\,2}_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figura 4: Coeficientes de Clebsch-Gordon para $j_i = 1/2, 1, 3/2, 2$. Fonte: Particle Data Group web page, `http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/clebrpp.pdf`