

Mecânica Quântica – Série 6

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2014/2015

(Versão de 20/10/2014)

* 6.1 Gasiorowicz 6.1

- a) Mostre que os valores próprios dum operador hermítico $A = A^\dagger$ são reais
- b) Mostre que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. **Sugestão:** Mostre que $\langle \psi | (AB)^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | B^\dagger A^\dagger | \psi \rangle$.

* 6.2 Gasiorowicz 6.3

Considere o oscilador harmónico. Mostre que se tem

$$A |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

6.3 Gasiorowicz 6.4

Mostre que se $f(A^\dagger)$ é um polinómio em A^\dagger então

$$A f(A^\dagger) |0\rangle = \frac{df(A^\dagger)}{dA^\dagger} |0\rangle$$

Sugestão: Use o resultado

$$A(A^\dagger)^n |0\rangle = n(A^\dagger)^{n-1} |0\rangle$$

* 6.4 Gasiorowicz 6.5

Para o oscilador harmónico calcule $\langle m|x|n\rangle$ e mostre que é nulo exceto para $n = m \pm 1$.

* 6.5 Gasiorowicz 6.11

Use a definição $(\Delta x)^2 = \langle n|x^2|n\rangle - \langle n|x|n\rangle^2$ e de modo semelhante para $(\Delta p)^2$ para calcular $\Delta x \Delta p$ para o estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico.

6.6 Gasiorowicz 6.12

Um estado $|\alpha\rangle$ que obedece à equação $A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ onde A é o operador de aniquilação do oscilador harmónico, designa-se por *estado coerente*.

- a) Mostre que o estado $|\alpha\rangle$ pode ser escrito na forma

$$|\alpha\rangle = C e^{\alpha A^\dagger} |0\rangle$$

- b) Use o resultado do problema 6.3 para encontrar C .
- c) Expanda o estado $|\alpha\rangle$ nos estado próprios do operador *número* $N = A^\dagger A$, isto é $|n\rangle$. Use isto para calcular a probabilidade que um estado coerente contém n partículas. Esta distribuição é conhecida em estatística por distribuição de Poisson.

d) Calcule $\langle \alpha | N \alpha \rangle$, isto é o número médio de partículas num estado coerente.

6.7 Adaptado de Griffiths 3.35

Considere os estados coerentes do problema anterior.

a) Calcule, para estes estados, $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ e mostre que $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$, isto é a incerteza é mínima, tal como para estados gaussianos.

b) Introduza a dependência temporal

$$|n\rangle \rightarrow |n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

e mostre que o estado $|\alpha(t)\rangle$ continua a ser um estado coerente, isto é,

$$A |\alpha(t)\rangle = \alpha(t) |\alpha(t)\rangle$$

onde

$$\alpha(t) = e^{-i\omega t} \alpha$$

*6.8 Gasirowicz 6.14

Considere um Hamiltoniano que descreve uma partícula carregada num potencial dum oscilador harmónico a uma dimensão num campo eléctrico exterior

$$H = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t) - r \mathcal{E} x(t) \quad (1)$$

a) Calcule a equação de movimento para os operadores $p(t)$ e $x(t)$. Mostre que as equações de movimento são as equações clássicas.

b) Encontre $p(t)$ e $x(t)$ em termos de $p(0)$ e $x(0)$.

c) Mostre que para $t_1 \neq t_2$ se tem

$$[x(t_1), x(t_2)] \neq 0 \quad (2)$$

6.9 Adaptado de Griffiths 3.39

a) Para uma função $f(x)$ que possa ser expandida em série de Taylor, mostre que

$$f(x + x_0) = e^{\frac{i}{\hbar} x_0 p_{\text{op}}} f(x)$$

onde x_0 é qualquer distância constante e $p_{\text{op}} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ é o operador momento. Por esta razão se diz que p_{op}/\hbar é o **gerador das translações no espaço**.

b) Se $\psi(x, t)$ satisfizer a equação de Schrödinger, mostre que

$$\psi(x, t + t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} t_0 H} \psi(x, t)$$

onde t_0 é um tempo constante. Por isso se diz que $-H/\hbar$ é o **gerador das translações no tempo**.

6.10 Considere um problema a uma dimensão com

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

1. Mostre que

$$\sum_n (E_n - E_m) |\langle n | x | m \rangle|^2 = C$$

onde C é uma constante e m é qualquer estado diferente de n . Mostre que $C = \hbar^2/2m$ e é portanto independente do potencial $V(x)$. Este resultado é conhecido pela *regra de soma de Thomas-Reiche-Kuhn*. **Sugestão:** Comece por mostrar que

$$[[H, x], x] = -\frac{\hbar^2}{m}$$

e depois calcule $\langle m | [[H, x], x] | m \rangle$ usando a expressão anterior e usando $[[H, x], x] = Hx^2 - 2xHx + x^2H$.

Embora esta regra seja válida para qualquer valor m , vamos nas alíneas seguintes considerar o caso de $m = 0$.

2. Verifique para o caso do oscilador harmónico,

3. Verifique para o caso da partícula no poço de potencial infinito. Para mostrar este resultado deve usar

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{(4m^2 - 1)^3} = \frac{\pi^2}{256}$$

4. Verifique para o caso do *meio* oscilador harmónico do Problema 4.12. Para mostrar este resultado terá que mostrar sucessivamente:

- As funções de onda ($x \geq 0$ com $u_n(0) = 0$) e as energias são:

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{4^n (2n+1)!}} e^{-y^2/2} H_{2n+1}(y), \quad y = \frac{m\omega}{\hbar} x$$

$$E_n = \hbar\omega \left(2n + \frac{3}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- O valor de $\langle n | x | 0 \rangle$ é dado por (use o `mathematica`)

$$\langle n | x | 0 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\sqrt{4^n}}{\sqrt{(1+2n)!} \Gamma(3/2 - n)}$$

- Use o `mathematica` para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 4^{n+1}}{(1+2n)! \Gamma(3/2 - n)^2} = 1$$

e assim mostrar o pretendido.

5. Verifique o teorema para o caso do potencial linear do Problema 4.17.

6. Considere agora o caso do potencial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2m a} \delta(x) + \begin{cases} \infty & x < -L \\ 0 & -L < x < L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

isto é, um poço de potencial infinito com uma função delta na origem. Verifique o teorema da alínea 1). Este problema é particularmente interessante pois para L suficientemente grande, existe sempre um estado ligado (verifique que há um estado ligado se $\lambda > 2a/L$, ver abaixo) e estamos numa situação em que temos estados ligados com $E < 0$ e estados com $E > 0$. Se o teorema for verificado para qualquer valor de L , então quando $L \rightarrow \infty$, verificamos o teorema para estados ligados e estados de difusão, que para evitar problemas de normalização estamos a normalizar numa caixa de largura $2L$. Como o resultado não depende de L no final podemos fazer as paredes ir para infinito.

Os passos para fazer este problema são:

- Defina, como habitualmente, para o estado de energia negativa,

$$E_0 = -\alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m}, \quad y = \alpha a$$

- Para trabalhar com grandezas adimensionais introduza a variável

$$\eta = \frac{L}{a}$$

Com estas definições verifique que a condição para os estados ligados de energia negativa é

$$\tanh(y \eta) = \frac{2y}{\lambda} \quad (3)$$

que tem sempre solução se $\lambda > 2/\eta$.

- Verifique que as soluções pares para $E > 0$ têm energias que são soluções da equação

$$\tan(y \eta) = \frac{2y}{\lambda}$$

enquanto que as soluções ímpares são que as soluções ímpares para um caixa entre $-L < x < L$ (porquê?). Então as energias das soluções ímpares são

$$E_n^- = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL^2} (2n)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 (2n)^2}{4\eta^2 a^2}$$

- Verifique que para as soluções pares se tem

$$\langle n; \text{even} | x | 0 \rangle = 0$$

enquanto que para as soluções ímpares temos ($x = a\xi$)

$$\langle n; \text{odd} | x | 0 \rangle = a \int_{-\eta}^{\eta} d\xi u_n^-(\xi) \xi u_0(\xi) \neq 0$$

onde

$$u_n^-(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\eta}} \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\eta}\right), \quad \int_{-\eta}^{\eta} d\xi (u_n^-(\xi))^2 = 1$$

e

$$u_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2y_0}{\sinh(2\eta y_0) - 2\eta y_0}} \sinh[y_0(\xi + \eta)] & , \quad -\eta < \xi < 0 \\ \sqrt{\frac{2y_0}{\sinh(2\eta y_0) - 2\eta y_0}} \sinh[y_0(\eta - \xi)] & , \quad 0 < \xi < \eta \end{cases}$$

onde y_0 é a solução da Eq.(3) e $u_0(\xi)$ satisfaz,

$$\int_{-\eta}^{\eta} d\xi [u_0(\xi)]^2 = 1$$

- Agora temos todas as peças para resolver o problema. Obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_n (E_n^- - E_0) |\langle n; \text{odd} | x | 0 \rangle|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_n \left(\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2 a^2} - \frac{y_0^2}{a^2} \right) a^2 |\langle n; \text{odd} | \xi | 0 \rangle|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} g(\eta) \end{aligned} \quad (4)$$

onde

$$g(\eta) = \sum_n \left(\frac{\pi^2(2n)^2}{4\eta^2} - y_0^2 \right) \left[\int_{-\eta}^{\eta} d\xi u_n^-(\xi) \xi u_0(\xi) \right]^2 \quad (5)$$

A verificação é agora que devemos ter $g(\eta) = 1$ para todos os valores de η .

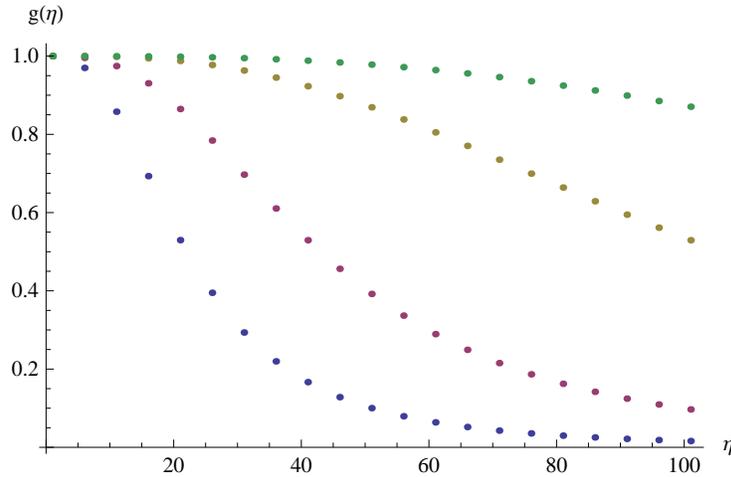


Figure 1: Gráfico da função $g(\eta)$ em função de η para vários valores do número de termos que se consideram na série da Eq.(5): $n_{max} = 10, 20, 50$ e 100 , respetivamente de baixo para cima.

Isto tem de ser feito numericamente e está indicado na figura anterior. É claro

que quando se somam um número suficientemente grande de termos na Eq.(5) se obtém $g(\eta) = 1$ para qualquer valor de η .