Mestrado em Eng. Física Tecnológica (MEFT)
Mecânica Quântica
1° semestre de 2014-15

Prof. Jorge C. Romão (Responsável)

2° Teste/1° Exame: 12 Janeiro de 2015 – 11h30

Duração do Teste: 1h30; Duração do Exame: 3h00

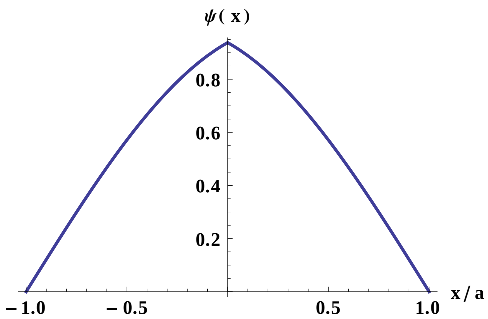
1. Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.
2. Para quem já fez o 1º teste e quiser fazer só o 2º teste, terá que responder às perguntas IV, V, VI e VII, que valerão o dobro para esse caso e a duração será de 1h30m.

I (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

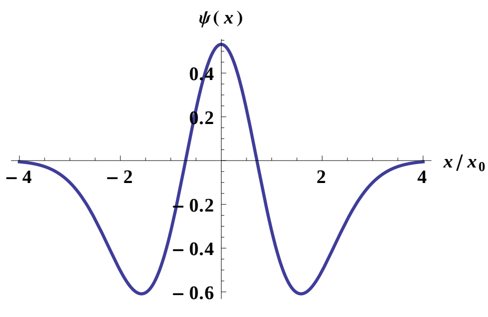
1. Considere os operadores lineares $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{L}$. Sabe-se que $\boldsymbol{A}$ é hermítico. Então o operador $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^\dagger$ é um operador hermítico.

2. Considere uma partícula numa caixa de largura $2a$ centrada em $x = 0$ ($V = 0, |x| < a$, $V = \infty, |x| > a$). É adicionado um potencial de função delta na forma $V_\delta = -V_0 a \delta(x)$ com $V_0 > 0$. Sabe-se que a função de onda representada na figura



corresponde ao estado fundamental neste potencial. Então a energia desse estado é $E_0 < 0$.

3. Considere a função de onda representada na figura



Esta função de onda corresponde a um estado estacionário do oscilador harmónico a uma dimensão. Então a energia desse estado é $\frac{5}{2}\hbar\omega$.

4. Considere num oscilador harmónico a uma dimensão o estado $|\psi\rangle$ tal que

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3}|0\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3}|3\rangle$$

onde $|n\rangle$ são os estados próprios de energia do oscilador. Então tem-se $\langle\psi|x^2|\psi\rangle = 0$.

II (4 valores)

Uma partícula encontra-se no potencial dum oscilador harmónico uni-dimensional com frequência angular clássica ω. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi_1(x,0) = Au_0(x) - Bu_1(x)$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, com a energia $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e A e B são constantes reais e positivas.

1. Determine as constantes A e B, sabendo que a probabilidade de numa medição obter a energia E_1 é $\frac{1}{3}$.
2. Calcule o valor médio da energia da partícula neste estado (em múltiplos de $\hbar\omega$).
3. Calcule o valor médio de x para o estado $\Psi_1(x,0)$, $\langle x\rangle$. **Nota:** Este problema é mais facilmente resolvido em termos dos operadores A e $A^\dagger$. Se fizer com as funções de onda e pensar bem só tem de fazer um integral.
4. Considere agora o estado
$$\Psi_2(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}u_0(x) + \sqrt{\frac{2}{3}}u_4(x)$$
Escreva a expressão para $\Psi_2(x,t)$ em função de $u_0(x)$, $u_4(x)$, da frequência de oscilação ω e do tempo t. Qual o período de oscilação da probabilidade neste estado, isto é, o intervalo de tempo mínimo, T, tal que $|\Psi_2(x,T)|^2 = |\Psi_2(x,0)|^2$.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\beta}{a}\delta(x+2a) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\beta}{a}\delta(x-2a) + V_\infty$$

onde

$$V_\infty = \begin{cases} \infty & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

com $\beta > 0$ e adimensional.

1. Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$), neste potencial se escreve
$$\tanh y = \frac{y}{\beta - y}$$
onde, $y = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}|E|}$, é adimensional.
2. Qual o valor mínimo de β para que haja estados ligados?
3. Quantos estados ligados existem para $\beta = 3$?

4. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x < -2a$ a função de onda é dada por
$$u_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$
onde $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Mostre que $R = e^{i\,\delta}$. Determine δ em função dos parâmetros do problema.

5. Calcule R no limite em que $\beta \to 0$. Podia ter encontrado este valor sem ter feito os cálculos da alínea anterior? Justifique a resposta.

IV (2 valores)

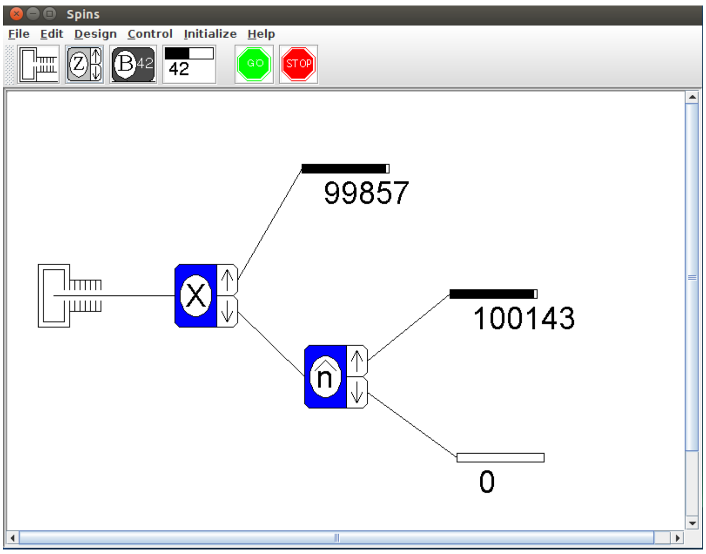
Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Para a harmónica esférica $Y_{00}(\theta, \phi)$ tem-se o resultado,
$$\int d\Omega \; Y_{00}(\theta, \phi) = 1$$

2. Considere a soma de dois momentos angulares $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ onde $J_1^2 = 6\hbar^2$ e $J_2^2 = 2\hbar^2$. Então o estado do spin total $\vec{J}$, com $j = 1, m_j = 0$ escreve-se, em função dos estados próprios dos dois momentos angulares,
$$|1,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}\,|2,+1\rangle\,|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\,|2,0\rangle\,|1,0\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\,|2,-1\rangle\,|1,1\rangle$$

3. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão
$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r)\;\sin^2(\theta)\;\sin(2\varphi)$$
A probabilidade duma medida de L_z dar $L_z = 2\hbar$ é $1/2$.

4. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de eletrões detetados depois de terem sido *disparados* 200000 eletrões num estado inicial aleatório e após terem passado por um analisador de spin segundo o eixo dos x. Então a direcção $\vec{n}$ corresponde a $\theta = 90°$ e $\phi = 180°$.

V (2 valores)

Um eletrão no potencial de Coulomb do átomo de hidrogénio encontra-se no estado seguinte

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2} R_{10}(r) Y_{00}(\theta,\varphi) + a\, R_{20}(r) Y_{00}(\theta,\varphi) + b\, R_{21} Y_{11}(\theta,\varphi)$$

com as constantes a e b reais e positivas.

1. Qual o valor médio da energia neste estado?
2. Determine as constantes a e b sabendo que $\langle L_z \rangle = \frac{1}{2}\hbar$.

VI (3 valores)

Considere o problema do *rotor plano* com o Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\varphi}$$

1. Mostre que as funções próprias normalizadas deste problema são

   $$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

   Determine as energias E_m.

2. Considere agora uma perturbação deste sistema da forma

   $$H_1 = 4\, V_0 \sin\varphi \cos\varphi$$

   Determine a correcção de 1ª ordem ao estado fundamental.

3. Determine a correcção de 1ª ordem ao primeiro estado excitado. Faça um diagrama das energias antes e depois de aplicar a correcção.
4. Determine a correcção de 2ª ordem ao estado fundamental.

VII (3 valores)

O Hamiltoniano para um eletrão num campo $\vec{B}$ é dado por

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} = \mu_B\, \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

onde $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m}$ é o magnetão de Bohr. Considere que o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

onde B_0 e ω são constantes.

1. No instante $t = 0$ o spin do eletrão tem projeção $+\hbar/2$ segundo o eixo dos x, isto é,

   $$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Resolva a equação de Schrödinger dependente do tempo para encontrar $|\psi(t)\rangle$. Para simplificar as expressões use $\omega_0 \equiv \mu_B B_0/\hbar$. (**Nota:** Não confundir ω com ω_0).

2. Qual a probabilidade duma medida de S_x dar $-\hbar/2$ ao fim do tempo t?
3. Determine o valor mínimo de B_0 para que possa haver uma inversão completa do spin (*spin flip*) segundo o eixo dos x, isto é, para que num dado instante de tempo se possa ter

   $$P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = 1$$