

Mecânica Quântica – Série 10

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2013/2014

(Versão de 18 de Novembro de 2013)

*10.1 Gasirowicz 10.2

Nota: Este problema é muito importante, pois permite encontrar os estados próprios de qualquer operador que seja uma combinação linear de S_i . De facto, é fácil mostrar que uma combinação linear da forma

$$\mathcal{M} = c_x S_x + c_y S_y + c_z S_y$$

com

$$|c_x|^2 + |c_y|^2 + |c_z|^2 = 1 ,$$

é equivalente a

$$\mathcal{M} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\beta} \\ \sin \alpha e^{i\beta} & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Mostre este resultado, encontrando a relação entre c_x, c_y, c_z e α e β . Assim, pode agora usar os resultados deste problema na resolução dos problemas 10.2 e 10.4.

*10.2 Gasirowicz 10.5

Considere o spinor

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Qual é a probabilidade que uma medida do operador $(3S_x + 4S_y)/5$ dê o valor $-\hbar/2$?

Nota: Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

*10.3 Gasirowicz 10.6

Considere o sistema de spin 1/2 representado pelo spinor normalizado

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Qual a probabilidade que uma medida de S_y dê o valor $-\hbar/2$?

Nota: Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

10.4 Gasirowicz 10.7

Mostre que

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (3)$$

Nota: Este problema é equivalente a mostrar que

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

***10.5** *Gasiorowicz 10.8*

Uma partícula de spin $1/2$ está num estado próprio de S_x com valor próprio $\hbar/2$ no instante $t = 0$. Naquele instante a partícula é colocada num campo magnético \vec{B} na direção do eixo dos z no qual vai precessar durante um tempo T . Naquele instante $t = T$ o campo magnético é rodado instantaneamente, de tal forma que passa a apontar segundo o eixo dos y . Depois de um outro intervalo de tempo T (isto é, para $t = 2T$) uma medida de S_x é efetuada. Qual é a probabilidade que o valor de $\hbar/2$ seja obtido?

Nota: Use o programa `spins` descrito na página alternativa da disciplina para confirmar os resultados do que obteve analiticamente. Note que para fazer esta parte do problema precisa de identificar o que significa o número no icon do campo magnético. Para isso comece por fazer o seguinte problema mais simples. Considere que no instante $t = 0$ o sistema tem spin *up* segundo o eixo dos x , isto é,

$$\psi(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Como vimos na aula teórica o estado num instante t será,

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_0 t} \end{bmatrix}$$

onde $\omega_0 = egB/(4m_e)$. Portanto as probabilidade de medir, instante t , S_x com valores $\pm\hbar/2$ são,

$$P(S_x = \frac{\hbar}{2}) = \cos^2(\omega_0 t), \quad P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \sin^2(\omega_0 t), \quad (4)$$

Utilize este resultado e a montagem da figura seguinte para mostrar que

$$\omega_0 t = \frac{\pi}{36} = 5^\circ \implies \text{Uma unidade no espectrómetro de campo B} \quad (5)$$

Pode igualmente fazer gráficos da probabilidade teórica e do valor *experimental* como indicado na Fig. 3.

10.6 *Gasiorowicz 10.10*

Mostre que para qualquer vetor \vec{a} com módulo a se tem,

$$e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}} = \cos a + i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\frac{\sin a}{a} \quad (6)$$

Nota: Este problema é equivalente a mostrar que (ver problema 10.3)

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$$

onde na última relação está subentendida a matriz identidade 2×2 no lado direito.

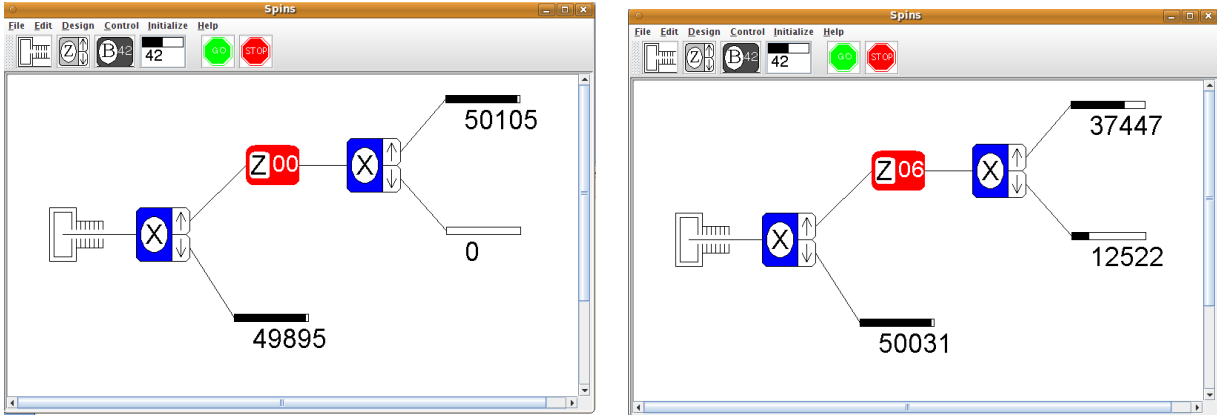


Figura 1: Montagem para reproduzir as condições enunciadas acima. O feixe inicial é aleatório (50% up e 50% down). Estão mostrados os valores no espectrómetro de 0 e 6, o que está de acordo com a Eq.(4) se 6 unidades no espectrómetro corresponderem a $\pi/6$.

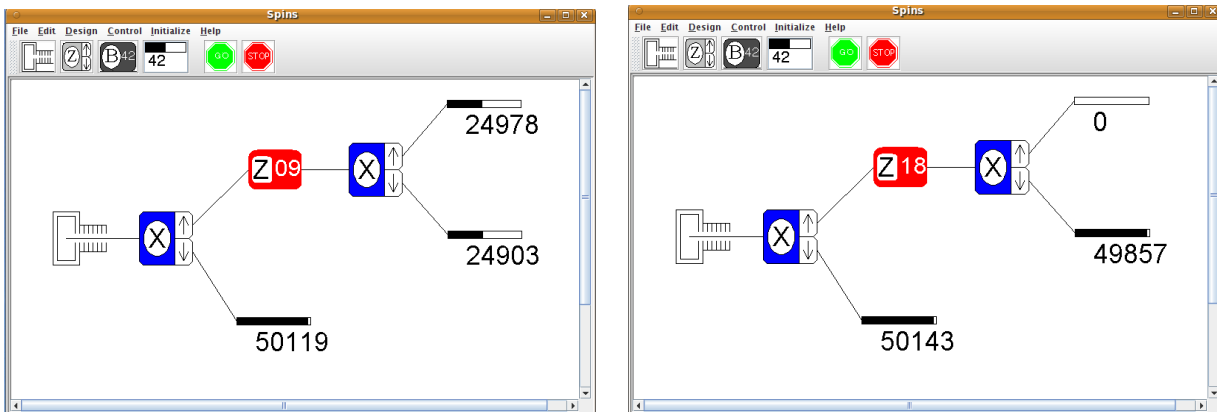


Figura 2: Mesma situação que Fig. 1 mas agora para valores no espectrómetro de 9 e 18, que correspondem, respectivamente a $\omega_0 t = \pi/4, \pi/2$.

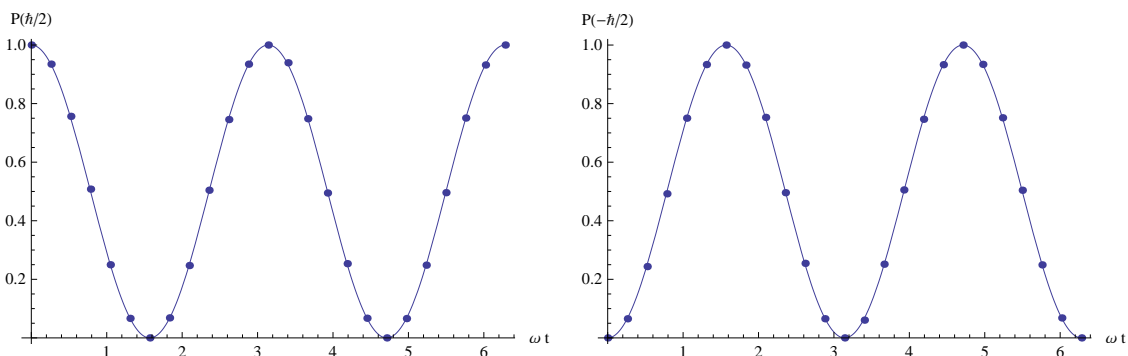


Figura 3: Gráfico da probabilidade de medir spin $S_x = \hbar/2$ (painel da esquerda) e spin $S_x = -\hbar/2$ (painel da direita). Sobrepostas estão a curva teórica, Eq. (4) e os resultados obtidos com o programa spins com a identificação da Eq. (5).

***10.7 Gasirowicz 10.11**

Considere duas partículas de spin 1/2 cujos spins são descritos pelos operadores de Pauli, $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$. Seja \vec{e} um vetor unitário ligando as duas partículas. Defina o operador

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{e}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (7)$$

Mostre que se as duas partículas estão no estado $S = 0$ (singleto) então

$$S_{12}\chi_{\text{singleto}} = 0 \quad (8)$$

Mostre que para o estado tripleto

$$(S_{12} - 2)(S_{12} + 4)\chi_{\text{tripleto}} = 0 \quad (9)$$

Sugestão: Escolha o eixo dos z segundo \vec{e} .

***10.8 Gasirowicz 10.12**

Num sistema próton-neutrão de baixa energia (que tem momento angular orbital zero) a energia potencial é dada por

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) \left(3 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right) + V_3(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (10)$$

onde \vec{r} é o vetor que liga as duas partículas. Calcule a energia potencial para o sistema:

a) No estado singleto, b) No estado tripleto.

***10.9 Gasirowicz 10.13**

Considere dois elétrons num estado singleto.

- Se uma medida do spin dum dos elétrons mostra que está num estado com $s_z = 1/2$ qual é a probabilidade que uma medida da componente do spin do outro elétron dê o valor $s_z = 1/2$?
- Se uma medida do spin de um dos elétrons mostra que está num estado com $s_y = 1/2$ qual é a probabilidade que uma medida da componente segundo x dê o valor $s_x = 1/2$ para o outro elétron?
- Se o elétron 1 está no estado descrito por $\cos \alpha_1 \chi_+ + \sin \alpha_1 e^{i\beta_1} \chi_-$ e o elétron 2 está num estado $\cos \alpha_2 \chi_+ + \sin \alpha_2 e^{i\beta_2} \chi_-$, qual é a probabilidade que o sistema de dois elétrons esteja num estado tripleto?

***10.10 Gasirowicz 10.14**

Uma partícula de spin 1 move-se num potencial central da forma,

$$V(r) = v_1(r) + \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{\hbar^2} V_2(r) + \frac{(\vec{S} \cdot \vec{L})^2}{\hbar^4} V_3(r) \quad (11)$$

Quais são os valores de $V(r)$ para os estados $j = l + 1$, $j = l$, e $j = l - 1$?

10.11 Na aula teórica apresentámos, sem demonstração, o resultado da adição de dois momentos angulares arbitrários (orbitais ou de spin). Recordamos aqui os resultados.

Seja

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

onde os valores próprios de J_i^2 são $\hbar^2 j_i(j_i + 1)$. Então temos os resultados seguintes:

1. Os valores próprios de J^2 são $\hbar^2 j(j + 1)$. Os valores possíveis para j são

$$j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$$

2. Qualquer estado $|j, m\rangle$ se pode exprimir como uma combinação linear dos produtos dos estados $|j_1, m_1\rangle$ e $|j_2, m_2\rangle$ na seguinte forma

$$|j, m\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

onde $C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2)$ são os coeficientes de Clebsch-Gordon e estão dados na Fig. 4 para os valores mais baixos de j_1 e j_2 .

- a) Consulte a tabela para verificar que no caso de spin 1/2 se obtém os resultados demonstrados na aula.

Singleto :

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

Tripleto :

$$|1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, -1\rangle = |1/2, -1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle$$

- b) Mostre que a multiplicidade total é $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ como deveria ser. Para isso considere $j_1 > j_2$ e mostre que

$$[2(j_1 + j_2) + 1] + [2(j_1 + j_2 - 1) + 1] + \dots + [2(j_1 - j_2) + 1] = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

Verifique, ver alínea a), que no caso de spin 1/2 temos 4 estados.

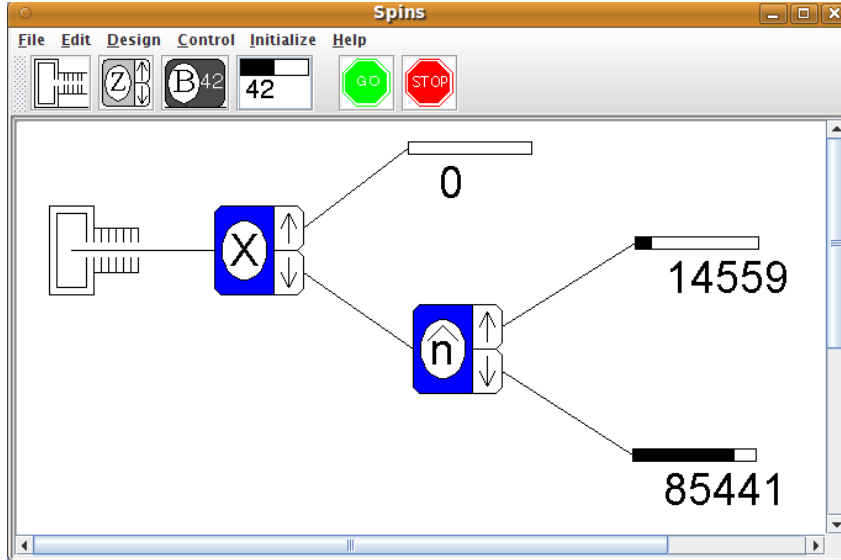
- c) Para o problema do átomo de hidrogénio com spin vamos precisar da adição do momento angular orbital L com o spin do eletrão. Os valores possíveis para $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ são $j = l \pm 1/2$ (para $l \geq 1$ claro, doutra forma para $l = 0$ temos $\vec{J} = \vec{S}$). Os resultados necessários são (Gasiorowicz, Eq. 10.82, a menos dum sinal global, na definição da segunda relação para estar de acordo com a tabela dos coeficientes Clebsch-Gordon),

$$\psi_{l+1/2, m_j} = \sqrt{\frac{l + m_j + 1/2}{2l + 1}} Y_{l, m_j - 1/2} \chi^+ + \sqrt{\frac{l + 1/2 - m_j}{2l + 1}} Y_{l, m_j + 1/2} \chi^-$$

$$\psi_{l-1/2, m_j} = -\sqrt{\frac{l + 1/2 - m_j}{2l + 1}} Y_{l, m_j - 1/2} \chi^+ + \sqrt{\frac{l + m_j + 1/2}{2l + 1}} Y_{l, m_j + 1/2} \chi^-$$

Use a tabela da Fig. 4 para verificar este resultado para $l = 1, 2$. Verifique que as multiplicidades estão corretas.

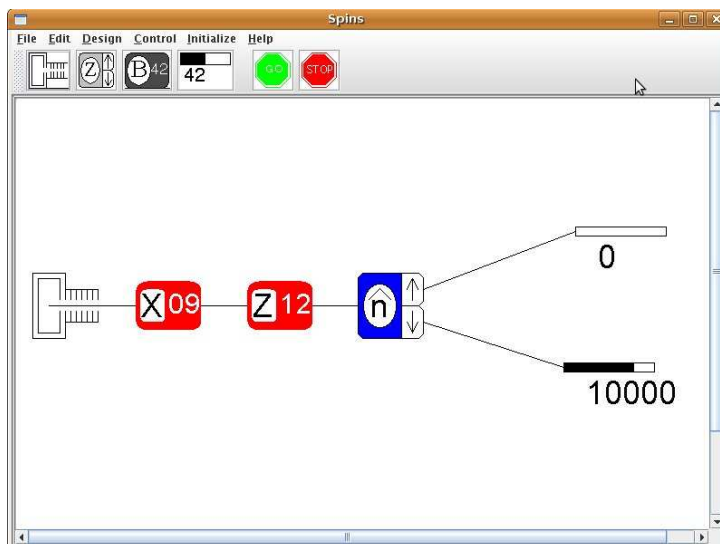
*10.12 Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de elétrons detetados depois de terem sido *disparados* 100000 elétrons preparados num certo estado inicial.

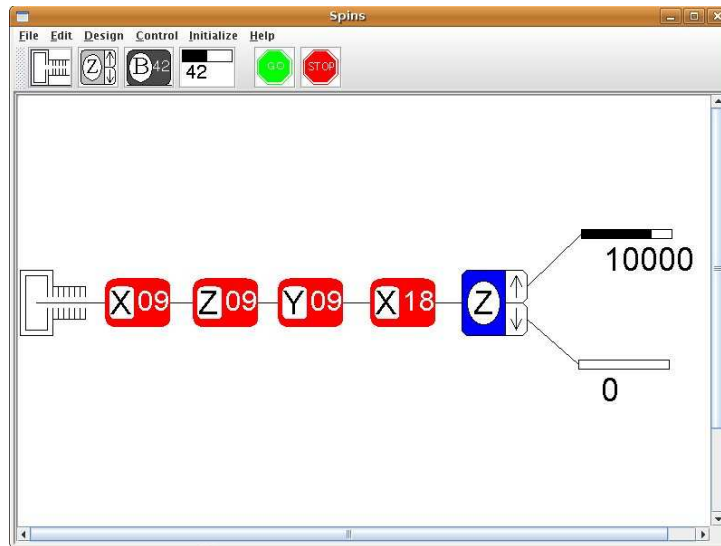
1. Determine o estado inicial na representação em que S_z é diagonal.
2. Determine a direção \vec{n} do segundo analisador de spin, sabendo que $\theta = \pi/2$. Mostre que a direção definida por $\theta = \pi/4, \varphi = 0$ conduz às mesmas contagens.

*10.13 Considere a experiência da Figura seguinte



Sabendo que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z, descubra a direção \vec{n} . Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

*10.14 Considere a experiência da Figura seguinte



Sabe-se que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z. Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$. Notation: $\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$

m_1	m_2	\dots
m_1	m_2	Coefficients
\vdots	\vdots	\vdots

$1/2 \times 1/2$

1		
+1	1	0
+1/2 +1/2	1	0
+1/2 -1/2	1/2	1/2
-1/2 +1/2	1/2	-1/2
-1/2 -1/2	1	

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$2 \times 1/2$

5/2			
+5/2	5/2	3/2	
+2 +1/2	1	+3/2 +3/2	
+2 -1/2	1/5	4/5	5/2
+1 +1/2	4/5 -1/5	+1/2	+1/2
+1 -1/2	2/5	3/5	5/2
0 +1/2	3/5 -2/5	-1/2	-1/2

$3/2 \times 1/2$

2			
+2	2	1	
+3/2 +1/2	1	+1	+1
+3/2 -1/2	1/4	3/4	2
+1/2 +1/2	3/4 -1/4	0	0
+1/2 -1/2	1/2	1/2	2
-1/2 +1/2	1/2 -1/2	-1	-1
-1/2 -1/2	1/2	1/2	2

$3/2 \times 3/2$

5/2				
+5/2	5/2	3/2		
+3/2 +1	1	+3/2 +3/2		
+3/2 0	2/5	3/5	5/2	3/2
+1/2 +1	3/5 -2/5	+1/2	+1/2	+1/2
+3/2 -1	1/10	2/5	1/2	
+1/2 0	3/5	1/15	-1/3	5/2
-1/2 +1	3/10	-8/15	1/6	-1/2
-1/2 -1	3/10	8/15	1/6	5/2
-1/2 0	3/5	-1/15	-1/3	5/2
-3/2 +1	1/10	-2/5	1/2	-3/2
-3/2 0	3/5	-1/15	-1/3	5/2
-3/2 -1	1/10	2/5	1/2	-3/2

1×1

2		
+2	2	1
+1 +1	1	+1
+1 0	1/2	1/2
0 +1	1/2	-1/2
0 0	0	0

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$

3×1

3		
+3	3	2
+2 +1	1	+2
+2 0	1/3	2/3
+1 +1	2/3 -1/3	+1
+1 0	8/15	1/6 -3/10
0 +1	2/5	-1/2
0 0	0	0

$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$3/2 \times 1/2$

3			
+3	3	2	1
+2 +1	1	+2	+2
+2 0	1/3	2/3	3
+1 +1	2/3 -1/3	+1	+1
+1 0	8/15	1/6 -3/10	3
0 +1	2/5	-1/2	1/10
0 0	0	0	0

$2 \times 3/2$

7/2				
+7/2	7/2	5/2		
+2 +3/2	1	+5/2 +5/2		
+2 +1/2	3/7	4/7	7/2	5/2
+1 +3/2	4/7 -3/7	+3/2	+3/2 +3/2	
+2 -1/2	1/7	16/35	2/5	
+1 +1/2	4/7	1/35	-2/5	7/2
0 +3/2	2/7 -18/35	1/5	+1/2	+1/2

2×2

4			
+4	4	3	
+2 +2	1	+3	+3
+2 +1	1/2	1/2	4
+1 +2	1/2 -1/2	+2	+2
+2 0	3/14	1/2	2/7
+1 +1	4/7	0	-3/7
0 +2	3/14 -1/2	2/7	+1

$3 \times 3/2$

3				
+3	3	2		
+3/2 +1/2	1	+2	+2	
+3/2 +1/2	1/2	1/2	3	2
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1	+1	+1
+3/2 -1/2	1/5	1/2	3/10	
+1/2 +1/2	3/5	0	-2/5	3
-1/2 +3/2	1/5 -1/2	3/10		

$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$

$d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$

$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$

$d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$

$d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$

$d_{1,0}^1 = \cos \theta$

$d_{1/2,1/2}^1 = \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,-1/2}^1 = -\sin \frac{\theta}{2}$

$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$

$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$

$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$

$d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$

$d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$

$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

$d_{3/2,3/2}^{3/2}$

1				
+1	1	0		
+1/2 +1/2	1	0		
+1/2 -1/2	1/2	1/2		
-1/2 +1/2	1/2	-1/2		
-1/2 -1/2	1			

$d_{3/2,1/2}^{3/2}$

5/2				
+5/2	5/2	3/2		
+2 +1/2	1	+3/2 +3/2		
+2 -1/2	1/5	4/5	5/2	3/2
+1 +1/2	4/5 -1/5	+1/2	+1/2	+1/2
+1 -1/2	2/5	3/5	5/2	3/2
0 +1/2	3/5 -2/5	-1/2	-1/2	

$d_{3/2,3/2}^{3/2}$

3				
+3	3	2		
+3/2 +1/2	1	+2	+2	
+3/2 +1/2	1/2	1/2	3	2
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1	+1	+1
+3/2 -1/2	1/5	1/2	3/10	
+1/2 +1/2	3/5	0	-2/5	3
-1/2 +3/2	1/5 -1/2	3/10		

$d_{3/2,1/2}^{3/2}$

5/2				
+5/2	5/2	3/2		
+2 +1/2	1	+3/2 +3/2		
+2 -1/2	1/5	4/5	5/2	3/2
+1 +1/2	4/5 -1/5	+1/2	+1/2	+1/2
+1 -1/2	2/5	3/5	5/2	3/2
0 +1/2	3/5 -2/5	-1/2	-1/2	

$d_{3/2,-1/2}^{3/2}$

7/2				
+7/2	7/2	5/2		
+2 +3/2	1	+5/2 +5/2		
+2 +1/2	3/7	4/7	7/2	5/2
+1 +3/2	4/7 -3/7	+3/2	+3/2 +3/2	
+2 -1/2	1/7	16/35	2/5	
+1 +1/2	4/7	1/35	-2/5	7/2
0 +3/2	2/7 -18/35	1/5	+1/2	+1/2

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figure 4: Coeficientes de Clebsch-Gordan para $j_i = 1/2, 1, 3/2, 2$. Fonte: Particle Data Group web page, <http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/clebrpp.pdf>