

Mecânica Quântica – Série 2

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2013/2014

Versão de 21/08/2013

2.1 Em muitos dos problemas seguintes aparecem integrais gaussianos. Seja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

a) Utilize o *Mathematica* para verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 1$$

b) Considere agora a função

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Utilizando mudanças de variáveis apropriadas mostre que está normalizada e que

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2$$

onde

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n g(x)$$

2.2 *Gasiorowicz 2.1*

Dada a distribuição nos espaço dos momentos $A(k) = N/(k^2 + \alpha^2)$ determine $\psi(x)$. Faça um gráfico de $A(k)$ e $\psi(x)$ e mostre que $\Delta k \Delta x \geq 1$ independente de α .

Sugestões/Soluções:

1. O integral

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{N}}{k^2 + \alpha^2} e^{ikx} dk$$

faz-se utilizando o teorema dos resíduos. O resultado é

$$\psi(x) = \mathcal{N} \frac{\pi}{\alpha} [e^{-\alpha x} \theta(x) + e^{\alpha x} \theta(-x)]$$

Pode verificar este resultado com o *Mathematica* pois $\psi(x)$ está relacionado com a Transformada de Fourier de $A(k)$ através de

$$\psi(x) = \sqrt{2\pi} \text{FourierTransform}[\mathcal{N}/(k^2 + \alpha^2), k, x]$$

2. Utilize o *Mathematica* para fazer os integrais e obter:

$$\begin{aligned} \Delta k &= \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} = \alpha \\ \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \end{aligned}$$

2.3 Gasiorowicz 2.2

Num guia de ondas a relação entre o comprimento de onda e a frequência é dada por

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}} .$$

Determine a velocidade de grupo.

2.4 Para os dois problema seguintes deve usar o resultado da Eq. 2.13 do livro

$$|\psi(x, t)|^2 = \mathcal{N}^2 \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}} e^{-\frac{\alpha(x - v_g t)^2}{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}}$$

onde

$$v_g = \left(\frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right)_{k=k_0}, \quad \beta = \left(\frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2} \right)_{k=k_0},$$

a) Mostre que para $t = 0$ a largura deste pacote de ondas gaussiano é $\sigma_0 = \sqrt{\alpha/2}$, onde, como habitualmente, $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. Note que esta definição de largura difere ligeiramente da dada no livro. Utilize o **Mathematica** para fazer os integrais.

b) Mostre que $\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{4\beta^2 t^2}{\alpha^2}}$.

c) A constante \mathcal{N} destina-se a normalizar a função de onda. Mostre que $\mathcal{N} = (\alpha/4\pi^3)^{1/4}$ e que não depende do tempo.

* 2.5 Gasiorowicz 2.6

Um feixe de elétrons percorre uma distância de 10^4 km. Se a dispersão do grupo de ondas inicial é 10^{-3} m qual é a dispersão do grupo de ondas no final do percurso se a sua energia cinética for: a) 13.6 eV; b) 100 MeV?

Nota: Para partículas relativistas a relação entre a energia e o momento linear é $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.

2.6 Gasiorowicz 2.7

Considere um grupo de ondas de neutrinos. É uma boa aproximação desprezar a sua massa, portanto $E = pc$. Mostre que um grupo de ondas nestas condições não se dispersa.

* 2.7 Uma das relações de Heisenberg relaciona a incerteza da energia dum sistema, ΔE , com a incerteza do tempo, Δt , da determinação da mesma: $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Determine a incerteza mínima da energia do estado dum átomo se o elétron permanece neste estado durante 10^{-8} s. Exprima o resultado em eV.

* 2.8 a) O mesão π^+ tem a energia de repouso 140 MeV e o tempo de vida 26 ns. Determine a incerteza da energia em MeV, e como fração da energia de repouso.

b) Repita para o mesão π^0 que tem a energia de repouso 135 MeV e o tempo de vida 8.3×10^{-17} s.

c) Repita para o mesão ρ que tem a energia de repouso 765 MeV e o tempo de vida 4.4×10^{-24} s.

2.9 Gasirowicz 2.11

Considere uma função de onda da forma

$$\psi(x) = Ae^{-\mu|x|}$$

Determine A para que a função de onda seja normalizada.

***2.10 Gasirowicz 2.15**

Considere a função de onda

$$\psi(x) = \frac{2N \sin kx}{x}$$

Determine N para que a função de onda seja normalizada.

Sugestão: O integral seguinte é útil

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \pi$$

***2.11 Gasirowicz 2.16**

Considere a função de onda

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$$

Calcule $\langle x^n \rangle$ para $n=1,2$. Sem fazer contas qual é o resultado de $\langle x^{17} \rangle$?

2.12 Gasirowicz 2.17

Calcule $\phi(p)$ para a função de onda do problema 2.11. Calcule $\langle p^n \rangle$ para $n=1,2$.

Comentários/Soluções:

1. Obtemos para $\psi(p)$:

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(\alpha\pi)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{2\alpha\hbar^2}}$$

2. Verifique que $\psi(x)$ e $\psi(p)$ estão normalizadas.

3. A igualdade em

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

só ocorre para funções de onda gaussianas.

***2.13 Gasirowicz 2.18**

Use as definições $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ e $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ e os resultados dos problemas 2.11 e 2.12 para mostrar que

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

***2.14** Em $t = 0$, o estado duma partícula é representado pela função de onda

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ A \frac{(b-x)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{outros } x, \end{cases}$$

onde A , a e b são constantes, reais e positivas.

- Normalize Ψ , *i.e.*, determine A em termos de a e b .
- Faça um esboço de $\Psi(x, 0)$ como função de x .
- Onde é que a partícula mais provavelmente será encontrada (em $t = 0$)?
- Qual é a probabilidade de encontrar a partícula à esquerda de a ? Verifique a validade do seu resultado nos casos limites $b = a$ e $b = 2a$.
- Determine o valor esperado (médio) de x , $\langle x \rangle$.

***2.15** Uma partícula é representada, no instante $t = 0$, pela função de onda

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2), & -a \leq x \leq a, \\ 0, & \text{outros } x. \end{cases}$$

onde A é uma constante real e positiva.

- Determine a constante de normalização A .
- Calcule o valor médio de x (em $t = 0$).
- Calcule o valor médio de p (em $t = 0$) usando a função de onda em termos das coordenadas, $\Psi(x, 0)$.
- Determine a função de onda no espaço dos momentos $\phi(p)$. Faça um esboço dessa função. Calcule agora o valor médio de p (em $t = 0$) usando a função de onda $\phi(p)$.

***2.16** Para a função de onda do problema anterior determine:

- O valor médio de x^2 .
- O valor médio de p^2 .
- A incerteza em x , σ_x .
- a incerteza em p , σ_p .
- Verifique que os resultados são compatíveis com o princípio de incerteza de Heisenberg.

2.17 Adaptado de Griffiths 1.18

Em geral, a mecânica quântica é relevante quando o comprimento de onda de de Broglie, $\lambda = h/p$, é maior que o tamanho característico do sistema, d . Em equilíbrio térmico à temperatura absoluta T , a energia cinética média é

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T$$

onde $k_B = 1.380 \times 10^{-23}$ J/K = 8.617×10^{-5} eV/K é a constante de Boltzmann.

a) Mostre que o comprimento de de Broglie típico é dado por

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} = 6.23 \left(\frac{m_e}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{300 \text{ K}}{T(\text{K})}\right)^{1/2} \text{ nm}$$

b) Sabendo que o espaçamento típico dos sólidos e líquidos é $d \simeq 0.3$ nm, verifique que para as temperaturas usuais os elétrons livres nos sólidos devem obedecer à mecânica quântica enquanto que os núcleos não. Tome o sódio como exemplo com $m_{NA} \simeq 23m_p \simeq 42300m_e$. Verifique que o hélio abaixo de 4 K é uma exceção.

c) Mostre que os átomos num gás ideal devem obedecer à mecânica quântica para temperaturas tais que

$$T < \frac{1}{k_B} \left(\frac{h^2}{3m}\right)^{3/5} P^{2/5}$$

onde P é a pressão. **Sugestão:** Use a lei dos gases perfeitos, $PV = Nk_B T$, para deduzir o espaçamento interatômico num gás. Verifique com o hélio à pressão atmosférica.

d) Use os resultados da alínea c) para se decidir se o hidrogénio no espaço interestelar, onde $d = 1$ cm e $T \simeq 3$ K tem comportamento quântico.