Mestrado em Eng. Física Tecnológica (MEFT)
Mecânica Quântica
1° semestre de 2013-14

Prof. Jorge C. Romão (Responsável)

2° Exame: 1 de Fevereiro de 2014 – 11h30

Duração do Exame: 3h00

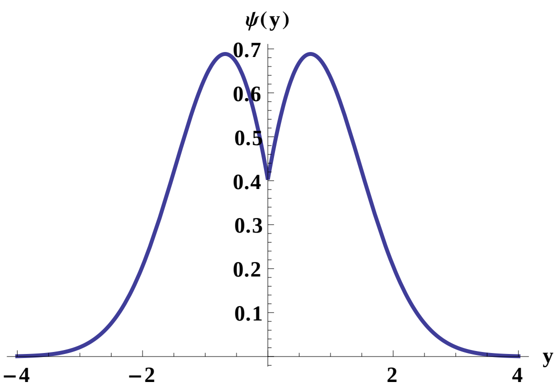
Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

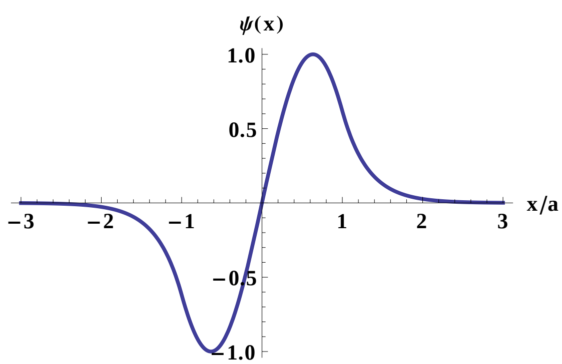
1. Considere dois operadores hermíticos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Então o operador $\boldsymbol{C = i\left[A, B\right]}$ é também um operador hermítico.

2. Considere um oscilador harmónico a uma dimensão ao qual de juntou uma função delta na origem, isto é, $\boldsymbol{V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \beta\delta(x)}$. Sabe-se que a função de onda representada na figura



corresponde ao estado fundamental neste potencial com $\boldsymbol{y = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x}$. Então $\boldsymbol{\beta > 0}$.

3. Considere a função de onda representada na figura



Esta função de onda corresponde ao problema do poço de potencial a uma dimensão, isto é, $\boldsymbol{V = -V_0,\ -a < x < a}$ e $\boldsymbol{V = 0,\ |x| > a}$. Sabendo que este estado é ímpar e que é o estado ligado de energia mais alta (menor valor de $\boldsymbol{|E|}$) então existem dois estados ligados neste potencial.

4. Considere num oscilador harmónico a uma dimensão o estado $|\psi\rangle$ tal que

$$|\psi\rangle = -\frac{1}{3}\,|0\rangle + \frac{\sqrt{8}}{3}\,|5\rangle$$

onde $|n\rangle$ são os estados próprios de energia do oscilador. Então tem-se $\langle\psi|x^2|\psi\rangle = 0$.

5. Considere o estado fundamental do átomo de Hidrogénio $|\psi_{100}\rangle$. Então

$$\langle\psi_{100}|z|\psi_{100}\rangle = \beta\; a_0$$

onde a_0 é o raio de Bohr e $\beta \neq 0$.

6. Considere a soma de dois momentos angulares $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ com $j_1 = 1$ e $j_2 = \frac{1}{2}$. Então o estado com $j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$ escreve-se, em função dos estados próprios dos dois momentos angulares,

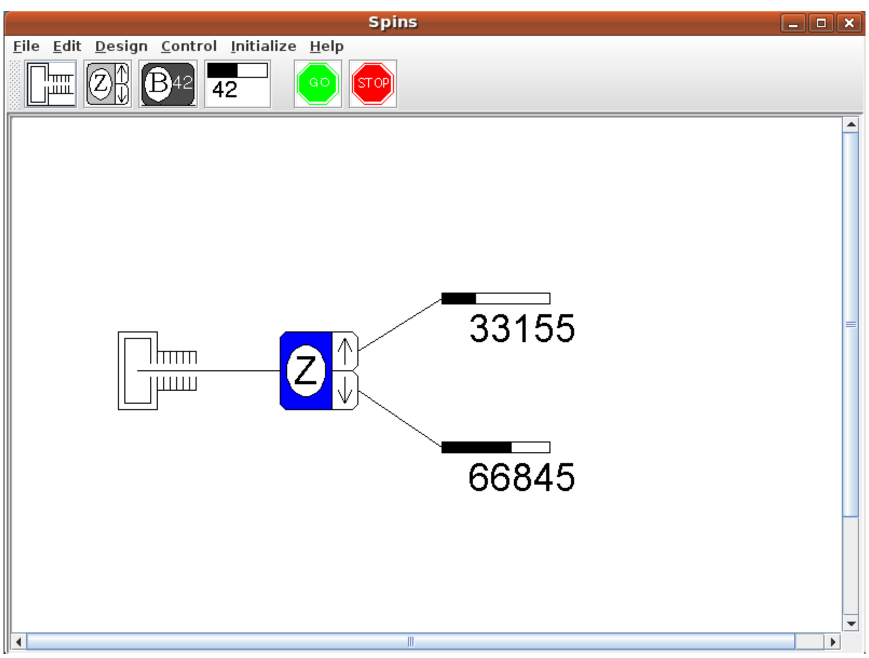
$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$$

7. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$|\psi\rangle = f(r)\,(|1,1\rangle + 2\,|1,0\rangle - |1,-1\rangle)$$

onde $|l,m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z. A probabilidade duma medida de L_z dar $-\hbar$ é $1/6$.

8. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de eletrões detetados depois de terem sido *disparados* 100000 eletrões num dado estado e após terem passado por um analisador de spin segundo o eixo dos z. Então o estado inicial pode ser representado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

na representação em que S_z é diagonal.

II (4 valores)

Seja um eletrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi(x,0) = A\left[u_1(x) - 2\,u_3(x)\right]$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, correspondente à energia $E_n = (\pi^2\hbar^2 n^2)/(2ma^2)$, para $n = 1, 2, \ldots$ e A é uma constante real e positiva.

1. Determine a constante A. Qual é a probabilidade de numa medição obter a energia E_3?
2. Calcule o valor médio da energia da partícula neste estado.
3. Calcule o valor médio de x no estado $\Psi(x,0)$, $\langle x\rangle$.
   Nota: Os integrais necessários estão no formulário. No entanto, se pensar bem, verá que não precisa de fazer nenhum.
4. Escreva a expressão para $\Psi(x,t)$. Qual o período de oscilação, isto é o intervalo de tempo mínimo tal que $\Psi(x,T) = \Psi(x,0)$.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\beta}{a}\,\delta(x) + \begin{cases} \infty & x < -a \\ V_0 & x > -a \end{cases}$$

onde a constante $\beta > 0$, é adimensional.

1. Mostre que a equação para os estados ligados, $E < V_0$, neste potencial é
   $$\tanh y = \frac{y}{\beta - y}$$
   onde, $y = \alpha a$, com $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$.
2. Discuta em que condições é que há estado(s) ligado(s) neste potencial. (**Sugestão:** Faça um gráfico da condição para haver estados ligados). Quantos estados ligados há para $\beta = 2$?
3. Faça o gráfico aproximado da função de onda do estado fundamental neste potencial.
4. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > V_0$ e que para $x > 0$ a função de onda é dada por
   $$u_{III}(x) = e^{-iqx} + Re^{iqx}$$
   onde $q^2 = 2m/\hbar^2(E - V_0)$. Calcule R. Mostre que $R = e^{i\,\delta}$. Determine δ em função dos parâmetros do problema.

IV (2 valores)

A função de onda duma partícula num potencial esfericamente simétrico é dada por

$$\psi(r) = C\,z\,e^{-\frac{r}{2r_0}}$$

1. Determine a constante de normalização C. **Sugestão:** Escreva a função de onda em termos das harmónicas esféricas dadas no formulário.
2. Qual é a probabilidade de que uma medida dê o valor $L^2 = 2\hbar^2$? Determine as probabilidades de obter $L_z = 0, \pm\hbar$.

V (3 valores)

A molécula de amónia, NH_3, pode ser considerada como um sistema com dois estados. A molécula forma uma pirâmide triangular com os três átomos de hidrogénio num plano e o átomo de azoto no vértice da pirâmide. Os dois estados correspondem ao átomo de azoto estar colocado acima ou abaixo do plano. Designamos por $|1\rangle$ o estado em que o azoto está acima e $|2\rangle$ o estado em que o azoto está abaixo. Nesta base, o Hamiltoniano é dado por

$$H_0 = \begin{bmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{bmatrix}$$

com $A > 0$.

1. Encontre os valores próprios, E_I, E_{II} e os vetores próprios, $|I\rangle$, $|II\rangle$, do Hamiltoniano nesta base.
2. Considere agora que um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ é aplicado de tal modo que aponta do plano dos hidrogénios para o átomo de azoto quando a molécula está no estado $|1\rangle$. Sabe-se que a interação é

$$H_{\mathcal{E}} = -\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

e que o momento dipolar da amónia aponta do azoto para o plano dos hidrogénios. Mostre que na base $|1\rangle\,, |2\rangle$ este Hamiltoniano se escreve,

$$H_E = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = |\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{p}|$. Determine os novos valores próprios do Hamiltoniano, $H = H_0 + H_E$, exatamente.

3. Use teoria de perturbações para calcular as correções devidas ao Hamiltoniano H_E, admitindo que $\alpha \ll E_0$. Compare com o resultado exato. `Nota:` Tem que usar a base de estados próprios de H_0.

VI (3 valores)

Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin $\frac{1}{2}$ fixa no espaço. Descrevemos o sistema na base em que S_z é diagonal. No instante $t = 0$, o sistema está no estado *up*, isto é,

$$|\psi(0)\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Qual a probabilidade duma medida de S_x dar o valor $-\hbar/2$ em $t = 0$?
2. Um campo magnético $\vec{B} = B_0\, \vec{e}_y$ é aplicado em $t = 0$ segundo o eixo dos y. O Hamiltoniano do sistema é então

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} \equiv \hbar \omega \sigma_y$$

onde $\omega = \frac{eB_0}{2m}$. Usando o método que achar mais conveniente encontre o estado $|\psi(t)\rangle$.

3. Qual a probabilidade que uma medida do spin segundo o eixo dos z, ao fim do tempo t_0 tal que, $\omega t_0 = \dfrac{\pi}{6}$, dê o valor $-\hbar/2$?