Mestrado em Eng. Física Tecnológica (MEFT)
Mecânica Quântica
1° semestre de 2013-14

Prof. Jorge C. Romão (Responsável)

2° Teste/1° Exame: 13 Janeiro de 2014 – 11h30

Duração do Teste: 1h30; Duração do Exame: 3h00

1. Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.
2. Para quem já fez o 1º teste e quiser fazer só o 2º teste, terá que responder às perguntas IV, V, VI e VII, que valerão o dobro para esse caso e a duração será de 1h30m.

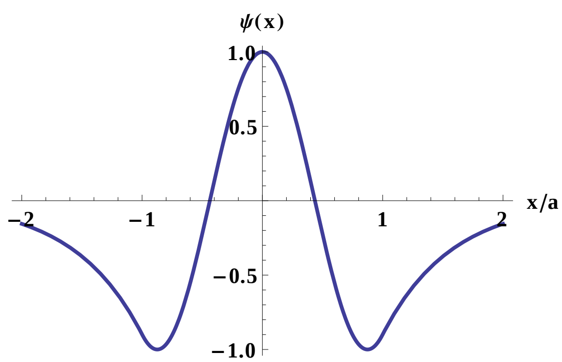
I (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Considere os operadores hermíticos $\boldsymbol{A, B}$ e $\boldsymbol{C}$. Sabe-se que $[\boldsymbol{A,B}] \neq \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{A,C}] \neq \boldsymbol{0}$ e $[\boldsymbol{B,C}] = \boldsymbol{0}$. Então o operador $\boldsymbol{D = ABCA}$ é um operador hermítico.

2. Considere um oscilador harmónico a uma dimensão ao qual de juntou uma função delta na origem, isto é, $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \beta\delta(x)$ com $\beta > 0$. Então a energia do primeiro estado excitado é $E_1 > \frac{3}{2}\hbar\omega$.

3. Considere a função de onda representada na figura



Esta função de onda corresponde ao problema do poço de potencial a uma dimensão, isto é, $V = -V_0,\ -a < x < a$ e $V = 0,\ x > |a|$. Sabendo que este estado é par e que é o estado ligado de energia mais alta (menor valor de $|E|$) então existem quatro estados ligados neste potencial.

4. Considere num oscilador harmónico a uma dimensão o estado $|\psi\rangle$ tal que

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|3\rangle$$

onde $|n\rangle$ são os estados próprios de energia do oscilador. Então tem-se $\langle\psi|x|\psi\rangle = 0$.

II (4 valores)

Uma partícula encontra-se no potencial dum oscilador harmónico uni-dimensional com frequência angular clássica ω. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi(x, 0) = C \left[u_0(x) - u_1(x) \right]$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, com a energia $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e C é uma constante real e positiva.

1. Determine a constante C. Qual é a probabilidade de numa medição obter a energia E_1?
2. Calcule o valor médio da energia da partícula neste estado (em múltiplos de $\hbar\omega$).
3. Calcule o valor médio de x para o estado $\Psi(x, 0)$, $\langle x \rangle$. **Nota:** Este problema é mais facilmente resolvido em termos dos operadores A e $A^\dagger$. Se fizer com as funções de onda e pensar bem só tem de fazer um integral. Se pensar muito bem verá que não precisa de fazer nenhum.
4. Escreva a expressão para $\Psi(x, t)$ em função de $u_0(x)$, $u_1(x)$, da frequência de oscilação ω e do tempo t. Qual o período de oscilação, isto é o intervalo de tempo mínimo tal que $\Psi(x, T) = \Psi(x, 0)$.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < -a \\ 0 & -a < x < 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

com $V_0 > 0$.

1. Mostre que a equação para os estados ligados ($0 < E < V_0$), neste potencial se escreve
$$-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$$
onde, $y = ka = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2} E}$, e $\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$ são adimensionais.
2. Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados?
3. Quantos estados ligados existem para $V_0 = \dfrac{14\hbar^2}{ma^2}$?
4. No limite $V_0 \to \infty$ o problema torna-se no problema do poço de potencial infinito de largura a. Verifique que a energia do estado fundamental dá o limite correto, $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.
5. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > V_0$ e que para $x < -a$ a função de onda é dada por
$$u_I(x) = e^{iqx} + Re^{-iqx}$$
onde $q^2 = 2m/\hbar^2(E - V_0)$. Calcule R. Mostre que $R = e^{i\,\delta}$. Determine δ em função dos parâmetros do problema.

IV (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Para a harmónica esférica $Y_{20}(\theta, \phi)$ tem-se o resultado,

$$\int d\Omega \; Y_{20}(\theta, \phi) = 0$$

2. Considere a soma de dois spins $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ onde $\vec{S}_i$ correspondem a spin 1. Então o estado do spin total $\vec{S}$, com $s = 1, m = 0$ escreve-se, em função dos estados próprios dos dois spins,

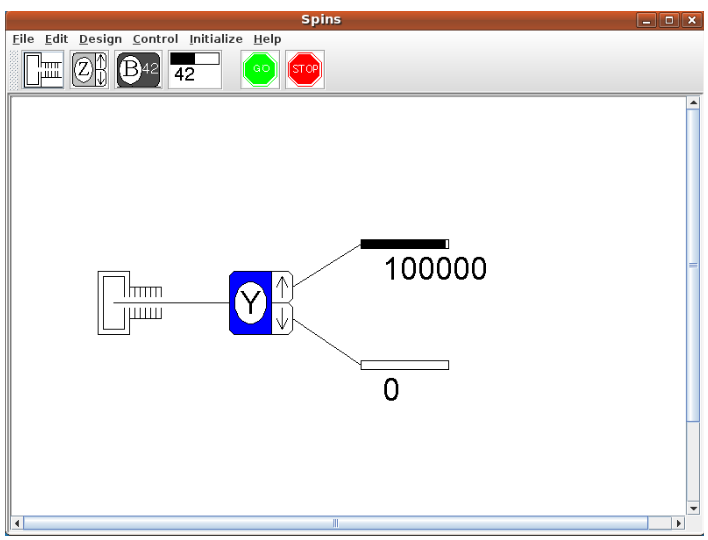
$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,+1\rangle \, |1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1,-1\rangle \, |1,+1\rangle$$

3. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A e^{-r/r_0} \; \sin\theta \cos\theta \cos\varphi$$

A probabilidade duma medida de L^2 dar $L^2 = 2\hbar^2$ é 1/3.

4. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de eletrões detetados depois de terem sido *disparados* 100000 eletrões num dado estado e após terem passado por um analisador de spin segundo o eixo dos y. Então o estado inicial pode ser representado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

na representação em que S_z é diagonal.

V (2 valores)

Um eletrão no potencial de Coulomb do átomo de hidrogénio encontra-se no estado seguinte

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{10}(r) Y_{0,0}(\theta, \varphi) + R_{21}(r) \left[a \, Y_{1,1}(\theta, \varphi) + b \, Y_{1,-1}(\theta, \varphi) \right]$$

com as constantes a e b reais e positivas.

1. Qual o valor médio da energia neste estado?

2. Determine as constantes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sabendo que $\langle \boldsymbol{L_z} \rangle = -\frac{1}{4}\boldsymbol{\hbar}$.

VI (3 valores)

O Hamiltoniano para um eletrão num campo $\vec{B}$ é dado por (η real e $\eta \geq 0$)

$$H = -\vec{M}\cdot\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}\cdot\vec{B} = \mu_B\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

onde $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m}$ é o magnetão de Bohr. Considere

$$B = B_0\,\vec{e}_x + B_0\,\eta\,\vec{e}_z$$

1. Considere primeiro $\eta = 0$. Mostre que os valores próprios exatos da energia são, $E_{1,2} = \mp\mu_B B_0$. Quais os vetores próprios correspondentes $|1\rangle$ e $|2\rangle$? (**Nota:** Os vetores próprios são neste caso os vetores próprios de S_x).

2. Considere agora $\eta \neq 0$. Mostre que os valores próprios exatos da energia são neste caso, $E_{1,2} = \mp\mu_B B_0\sqrt{1+\eta^2}$.

3. Faça agora que $\eta \ll 1$. Escreva $H = H_0 + H_1$ e considere $H_1 = \eta\,\mu_B B_0\,\sigma_z$ como uma perturbação ao Hamiltoniano não perturbado, $H_0 = \mu_B B_0\,\sigma_x$. Use teoria de perturbações, até à 2ª ordem em η, para calcular as correções aos dois níveis de energia do Hamiltoniano não perturbado H_0.

4. Compare os resultados aproximados com os resultados exatos.

VII (3 valores)

Considere dois momentos angulares (orbitais ou de spin) $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$. O momento magnético do sistema é dado por

$$\vec{M} = \gamma_1\vec{J}_1 + \gamma_2\vec{J}_2$$

Considere os estados próprios $|j, m_j\rangle$ do momento angular total $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$.

1. Mostre que

$$\vec{J}\cdot\vec{J}_1 = \frac{1}{2}\left(J^2 + J_1^2 - J_2^2\right), \quad \vec{J}\cdot\vec{J}_2 = \frac{1}{2}\left(J^2 + J_2^2 - J_1^2\right)$$

2. Mostre que $\langle M_x\rangle = \langle M_y\rangle = 0$ onde

$$\left\langle \vec{M} \right\rangle = \langle j, m_j|\,\vec{M}\,|j, m_j\rangle$$

3. Mostre que

$$\langle M_z\rangle = \hbar\, m_j\left[\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} + \frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\frac{j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{j(j+1)}\right]$$

`Sugestão:` Para as alíneas 2 e 3 use o facto de que

$$\left\langle \vec{M} \right\rangle = \left\langle \frac{(\vec{M}\cdot\vec{J})\,\vec{J}}{J^2} \right\rangle = \frac{1}{\hbar^2 j(j+1)}\left\langle (\vec{M}\cdot\vec{J})\,\vec{J} \right\rangle$$