Mecânica Quântica – Teste 1 –12/11/2009

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2009/2010
Duração 1h30m

I (4 valores)

Para cada uma das afirmações seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Se A for um operador hermítico, então o operador $B = i\left(A - A^\dagger\right)$ também é hermítico.
2. As funções próprias do operador Hamiltoniano para o problema da partícula na caixa ($V = 0, |x| < a$, $V = \infty, |x| > a$), são funções próprias simultâneas dos operadores Hamiltoniano e momento linear.
3. Considere o poço de potencial a uma dimensão $V(x) = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\lambda'}{a}\,\delta(x-a)$, com $\lambda' > 0$. Existe sempre um estado ligado.
4. Para os estados do oscilador harmónico, temos $\langle n-1|\,p^2\,|n+1\rangle = 0$, onde $n \geq 1$.

II (8 valores)

Uma partícula encontra-se no potencial dum oscilador harmónico uni-dimensional com frequência angular clássica ω. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi(x,0) = A\left[u_0(x) - u_1(x)\right],$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, com a energia $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

1. Qual é a probabilidade de obter a energia E_1 numa medição?
2. Calcule o valor médio da energia da partícula (em múltiplos de $\hbar\omega$).
3. No instante de tempo $t = 0$ é mais provável encontrar a partícula no intervalo $]-\infty, 0]$ ou no intervalo $[0, \infty[$? Se pensar e justificar não precisa de fazer as contas. No entanto os integrais necessários estão no formulário.
4. Escreva a expressão para $|\Psi(x,t)|^2$ em função de $u_0(x)$, $u_1(x)$, da frequência de oscilação ω e do tempo t. Qual o período de oscilação?

III (8 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a < x < a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

com $V_0 > 0$.

1. Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial se escreve

$$-\cot 2y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$$

onde, como habitualmente, $y = qa = \sqrt{\dfrac{2ma^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$ e $\lambda = \dfrac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$.

2. Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados?

3. Quantos estados ligados existem para $V_0 = \dfrac{16\hbar^2}{ma^2}$?

4. Esboce um gráfico da função de onda para o estado fundamental e para o primeiro estado excitado, admitindo que existem.

5. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x < -a$ a função de onda é dada por

$$u_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

Calcule R. Mostre que $|R|^2 = 1$. Justifique o resultado anterior em termos físicos.

Formulário

- **Poço de potencial infinito**
  $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2 \ .$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
  $V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$u_n^-(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \qquad E_n^- = E_0\ (2n)^2$$

$$u_n^+(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \cos\left[(2n-1)\,\frac{\pi}{a}x\right] \qquad E_n^+ = E_0\ (2n-1)^2 \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**

$$\int dy\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int dy\ \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int dy\ y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$

$$\int dy\ y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**
  As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\ H_n(y)\ e^{-y^2/2}$$

onde $y=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2-2 \\ H_3(y) &= 8y^3-12y \\ H_4(y) &= 16y^4-48y^2+12 \end{aligned}$$

As energias são dadas por

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

Integrais:

$$\int_0^\infty dy\; y^{2\alpha-1}e^{-y^2}=\frac{1}{2}\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1)=1, \quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

- **Oscilador harmónico: Operadores A e A^+**

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=\hbar\omega\left(A^+A+\frac{1}{2}\right)$$

onde

$$A=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x+i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x-i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

com

$$\left[A,A^+\right]=1$$

As relações inversas são

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A+A^+\right), \quad p=-i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(A-A^+\right)$$

Os estados correctamente normalizados são

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(A^+\right)^n|0\rangle$$

com $A|0\rangle=0$ e

$$A|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad A^+|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$