Mecânica Quântica – Teste 1 –6/11/2009

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2009/2010
Duração 1h30m

I (4 valores)

Para cada uma das afirmações seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Se A e B forem operadores hermíticos, então o operador $C = AB + BA$ também é hermítico.
2. O primeiro estado excitado no poço de potencial quadrado centrado em $x = 0$ é anti-simétrico para a troca $x \to -x$.
3. Um poço de potencial "quadrado" de largura a e profundidade V_0 tem os mesmos estados ligados dum poço de largura $2a$ e profundidade $V_0/2$.
4. Para qualquer estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico, a uma dimensão, temos sempre
$$\langle n|x|n+2\rangle \neq 0.$$

II (8 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

1. Suponha que o electrão no instante $t = 0$ se encontra no estado
$$\psi(x,0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, u_1(x) + B u_4(x).$$
onde B é uma constante real e positiva. Determine B.
2. Calcule o valor médio da energia $< E >$ no estado $\psi(x, 0)$.
3. Diga se, para $t = 0$, a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[0, a/2]$ é maior ou menor do que $1/2$. Justifique a resposta.
4. Escreva a função de onda no instante t, $\psi(x, t)$. Determine o período de oscilação, isto é, o tempo mínimo T ao fim do qual se tem $\psi(x, T) = \psi(x, 0)$.

III (8 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão ($\lambda' > 0$):

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda'}{a}\delta(x+a) + \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

1. Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial se escreve
$$\tanh y = \frac{y}{\lambda' - y}$$
2. Há sempre estado(s) ligado(s) para este potential? Justifique a resposta graficamente.
3. Esboce um gráfico da função de onda para o estado fundamental (adimitindo que existe).

4. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x < -a$ a função de onda é dada por

$$u_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

Calcule R. Mostre que $|R|^2 = 1$.

5. Justifique o resultado da alínea anterior em termos físicos. Para isso calcule o fluxo nas diferentes regiões e mostre que é conservado.

Formulário

- **Poço de potencial infinito**
$V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2\ .$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
$V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{aligned} u_n^-(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \\ u_n^+(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\ \cos\left[(2n-1)\,\frac{\pi}{a}x\right] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E_n^- &= E_0\ (2n)^2 \\ E_n^+ &= E_0\ (2n-1)^2 \end{aligned} \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**

$$\int dy\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int dy\ \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int dy\ y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$

$$\int dy\ y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**
As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\ H_n(y)\ e^{-y^2/2}$$

onde $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned}
H_0(y) &= 1 \\
H_1(y) &= 2y \\
H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\
H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\
H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12
\end{aligned}$$

As energias são dadas por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Oscilador harmónico: Operadores A e A^+**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(A^+A + \frac{1}{2}\right)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

com

$$\left[A, A^+\right] = 1$$

As relações inversas são

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A + A^+\right), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(A - A^+\right)$$

Os estados correctamente normalizados são

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(A^+\right)^n|0\rangle$$

com $A|0\rangle = 0$ e

$$A|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad A^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$