Mecânica Quântica – Série 11

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2009/2010

`(Versão de 2 de Dezembro de 2009)`

$*$**11.1** *Gasiorowicz 11.1*

`Nota:`

- Calcule a correcção de 2ª ordem e compare com o desenvolvimento em série do resultado exacto até à 2ª ordem em λ.

$*$**11.2** *Gasiorowicz 11.2*

`Comentário:` Qual a razão para o resultado?

11.3 *Gasiorowicz 11.5*

`Notas:`

1. Exprima a perturbação em termos de μ, α, a_0 e R. Mostre que se obtém:

$$H_1 = \begin{cases} \mu c^2 \alpha \left(-\dfrac{3}{2}\dfrac{a_0}{R} + \dfrac{a_0}{r} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a_0 r^2}{R^3} \right) & 0 < r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

2. Utilize o `mathematica` para fazer os integrais. Se os fizer "à mão" utilize

$$\int dy\ y^n e^{-y} = -e^{-y} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\, y^k$$

3. Mostre que o resultado tende para zero quando $R \to 0$. Mostre que

$$\Delta E_{10} \simeq \frac{2}{5}\, \mu c^2 \alpha \left(\frac{R}{a_0}\right)^2, \quad \Delta E_{21} = \Delta E_{20} \simeq \frac{1}{1120}\, \mu c^2 \alpha \left(\frac{R}{a_0}\right)^4$$

4. Calcule numericamente a correcção quando $R = 10^{-15}$ m $= 1$ fermi, isto é a dimensão do protão. Notar que como $R \ll a_0$ só vai conseguir um resultado que faça sentido se usar uma precisão de mais de 40 dígitos ou, em alternativa, usar os resultados da expansão em série em termos de R/a_0.

5. Explique porque é que $\Delta E_{2l} \ll \Delta E_{10}$.

$*$**11.4** *Gasiorowicz 11.6*

`Nota:`

1. Este problema faz-se mais facilmente se usar os operadores A e A^+.

2. Faça também com as funções próprias das coordenadas.

11.5 *Gasiorowicz 11.7*

11.6 *Gasiorowicz 11.11*

`Notas:`

1. Comece por resolver o problema exactamente. Para isso faça uma rotação de 45° nas coordenadas x, y.

2. Expanda o resultado exacto para os valores próprios da energia até à ordem λ^2.

3. Resolva agora o problema em teoria das perturbações. Comece por mostrar que o estado fundamental só tem correcção em ordem λ^2. Verifique que está de acordo com a expansão em λ do resultado exacto.

4. Resolva agora o problema das correcções ao primeiro estado excitado que é degenerado. Verifique novamente que o resultado está em acordo com a expansão do resultado exacto.

$\ast$ **11.7** *Gasiorowicz 11.12*

`Notas:`

1. Notar que este problema não é propriamente um problema de teoria de perturbações. Se tomarmos como eixo dos z a direcção do campo $\vec{B}$, os estados próprios do átomo de hidrogénio, $|n, l, m\rangle$ são também estados próprios do hamiltoniano de interacção e portanto o cálculo das energias é trivial.

2. Este exemplo é o chamado *efeito de Zeeman*. A não observação dum número ímpar de estados desdobrados $(2l + 1)$, como resulta na resolução deste problema, levou Pauli em 1924 a propor a ideia do spin.

$\ast$ **11.8** *Gasiorowicz 11.13*

`Nota:` Na alínea b) considere que λ, $v \neq u$ são reais.

11.9 Calcule os integrais necessários para obter

$$\langle \phi_{200} | z | \phi_{210} \rangle = -3a_0$$

onde a_0 é o raio de Bohr. Este resultado é importante para calcular o *efeito de Stark* no átomo de hidrogénio para $n = 2$.