

# Mecânica Quântica – Série 10

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2009/2010

(Versão de 29 de Novembro de 2009)

## \*10.1 Gasirowicz 10.2

**Nota:** Este problema é muito importante, pois permite encontrar os estados próprios de qualquer operador que seja uma combinação linear de  $S_i$ . De facto, é fácil mostrar que uma combinação linear da forma

$$\mathcal{M} = c_x S_x + c_y S_y + c_z S_z$$

com

$$|c_x|^2 + |c_y|^2 + |c_z|^2 = 1 ,$$

é equivalente a

$$\mathcal{M} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\beta} \\ \sin \alpha e^{i\beta} & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Mostre este resultado, encontrando a relação entre  $c_x, c_y, c_z$  e  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim, pode agora usar os resultados deste problema na resolução dos problemas 10.2 e 10.4.

## \*10.2 Gasirowicz 10.5

Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

## \*10.3 Gasirowicz 10.6

Use o programa `spins` descrito na página alternativa da para confirmar os resultados.

## 10.4 Gasirowicz 10.7

**Nota:** Este problema é equivalente a mostrar que

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

## \*10.5 Gasirowicz 10.8

Use o programa `spins` descrito na página alternativa da disciplina para confirmar os resultados do que obteve analiticamente. Note que para fazer esta parte do problema precisa de identificar o que significa o número no icon do campo magnético. Para isso comece por fazer o seguinte problema mais simples. Considere que no instante  $t = 0$  o sistema tem spin *up* segundo o eixo dos  $x$ , isto é,

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Como vimos na aula teórica o estado num instante  $t$  será,

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix}$$

onde  $\omega_0 = egB/(4m_e)$ . Portanto as probabilidade de medir, instante  $t$ ,  $S_x$  com valores  $\pm\hbar/2$  são,

$$P(S_x = \frac{\hbar}{2}) = \cos^2(\omega_0 t), \quad P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \sin^2(\omega_0 t), \quad (1)$$

Utilize este resultado e a montagem da figura seguinte para mostrar que

$$\omega_0 t = \frac{\pi}{36} = 5^\circ \implies \text{Uma unidade no espectrómetro de campo B} \quad (2)$$

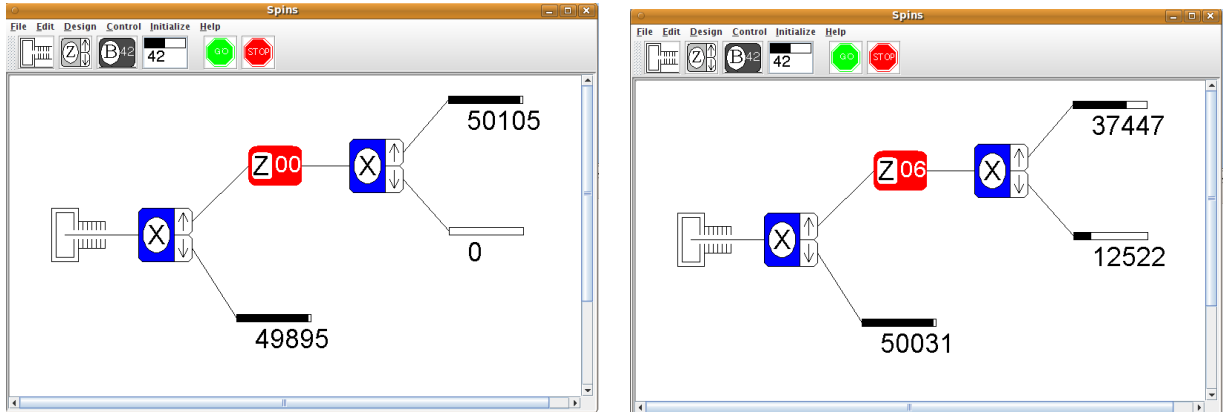


Figura 1: Montagem para reproduzir as condições enunciadas acima. O feixe inicial é aleatório (50% up e 50% down). Estão mostrados os valores no espectrómetro de 0 e 6, o que está de acordo com a Eq.(1) se 6 unidades no espectrómetro corresponderem a  $\pi/6$ .

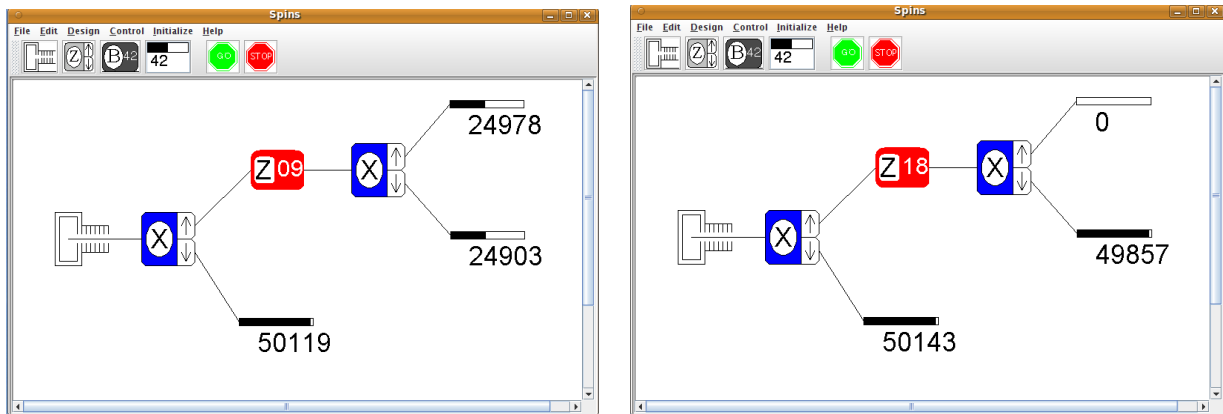


Figura 2: Mesma situação que Fig. 1 mas agora para valores no espectrómetro de 9 e 18, que correspondem, respectivamente a  $\omega_0 t = \pi/4, \pi/2$ .

Pode igualmente fazer gráficos da probabilidade teórica e do valor *experimental* como indicado na Fig. 3.

### 10.6 Gasirowicz 10.10

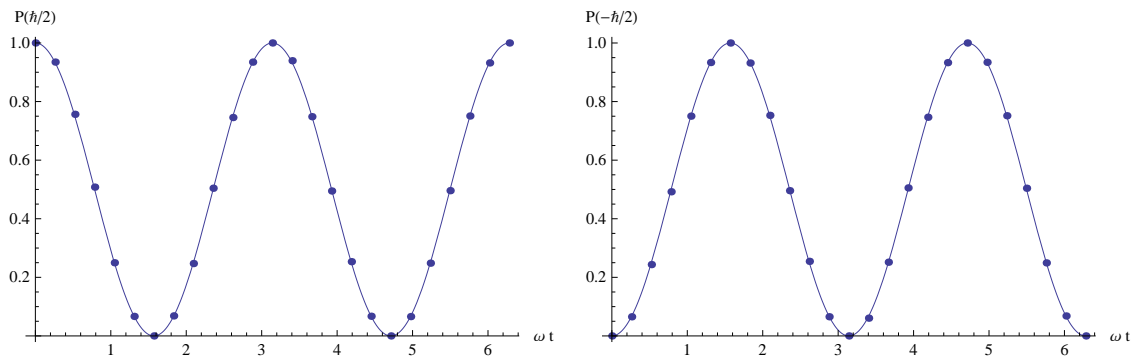


Figura 3: Gráfico da probabilidade de medir spin  $S_x = \hbar/2$  (painel da esquerda) e spin  $S_x = -\hbar/2$  (painel da direita). Sobrepostas estão a curva teórica, Eq. (1) e os resultados obtidos com o programa `spins` com a identificação da Eq. (2).

Nota: Este problema é equivalente a mostrar que (ver problema 10.3)

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

onde na última relação está subentendida a matriz identidade  $2 \times 2$  no lado direito.

\* 10.7 *Gasiorowicz 10.11*

\* 10.8 *Gasiorowicz 10.12*

\* 10.9 *Gasiorowicz 10.13*

\* 10.10 *Gasiorowicz 10.14*

**10.11** Na aula teórica apresentámos, sem demonstração, o resultado da adição de dois momentos angulares arbitrários (orbitais ou de spin). Recordamos aqui os resultados.

Seja

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

onde os valores próprios de  $J_i^2$  são  $\hbar^2 j_i(j_i + 1)$ . Então temos os resultados seguintes:

1. Os valores próprios de  $J^2$  são  $\hbar^2 j(j + 1)$ . Os valores possíveis para  $j$  são

$$j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$$

2. Qualquer estado  $|j, m\rangle$  se pode exprimir como uma combinação linear dos produtos dos estados  $|j_1, m_1\rangle$  e  $|j_2, m_2\rangle$  na seguinte forma

$$|j, m\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

onde  $C(j, m; j_1, m_1, j_2, m_2)$  são os coeficientes de Clebsch-Gordon e estão dados na Fig. 4 para os valores mais baixos de  $j_1$  e  $j_2$ .

a) Consulte a tabela para verificar que no caso de spin  $1/2$  se obtém os resultados demonstrados na aula.

Singleto :

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

Tripleto :

$$|1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1, -1\rangle = |1/2, -1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle$$

b) Mostre que a multiplicidade total é  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  como deveria ser. Para isso considere  $j_1 > j_2$  e mostre que

$$[2(j_1 + j_2) + 1] + [2(j_1 + j_2 - 1) + 1] + \dots + [2(j_1 - j_2) + 1] = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

Verifique, ver alínea a), que no caso de spin  $1/2$  temos 4 estados.

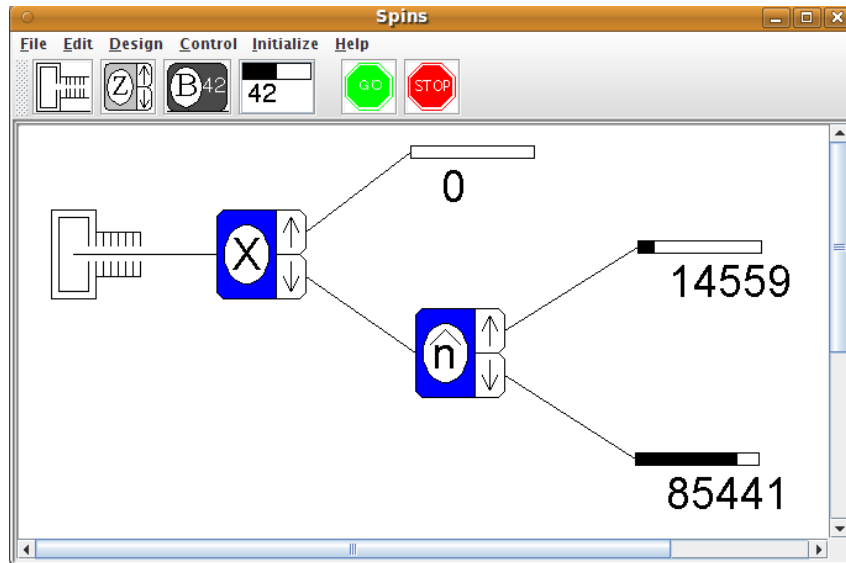
c) Para o problema do átomo de hidrogénio com spin vamos precisar da adição do momento angular orbital  $L$  com o spin do electrão. Os valores possíveis para  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  são  $j = l \pm 1/2$  (para  $l \geq 1$  claro, doutra forma para  $l = 0$  temos  $\vec{J} = \vec{S}$ ). Os resultados necessários são (Gasiorowicz, Eq. 10.82, a menos dum sinal global, na definição da segunda relação para estar de acordo com a tabela dos coeficientes Clebsch-Gordon),

$$\psi_{l+1/2, m_j} = \sqrt{\frac{l + m_j + 1/2}{2l + 1}} Y_{l, m_j - 1/2} \chi^+ + \sqrt{\frac{l + 1/2 - m_j}{2l + 1}} Y_{l, m_j + 1/2} \chi^-$$

$$\psi_{l-1/2, m_j} = -\sqrt{\frac{l + 1/2 - m_j}{2l + 1}} Y_{l, m_j - 1/2} \chi^+ + \sqrt{\frac{l + m_j + 1/2}{2l + 1}} Y_{l, m_j + 1/2} \chi^-$$

Use a tabela da Fig. 4 para verificar este resultado para  $l = 1, 2$ . Verifique que as multiplicidades estão correctas.

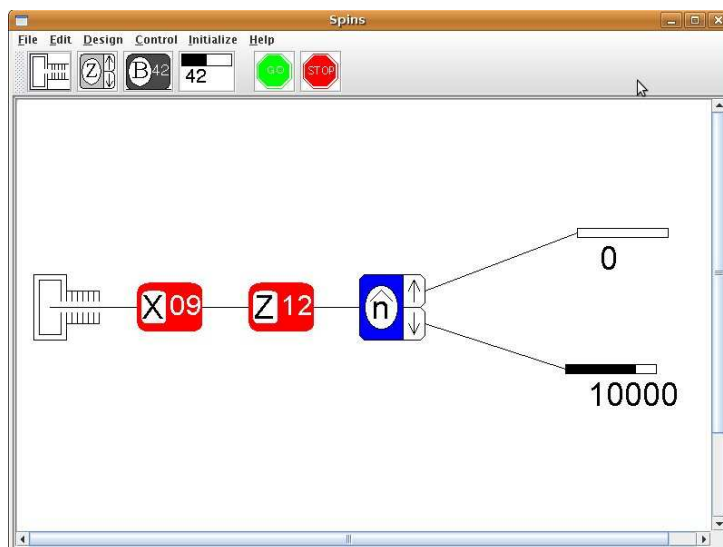
**\*10.12** Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de electrões detectados depois de terem sido *disparados* 100000 electrões preparados num certo estado inicial.

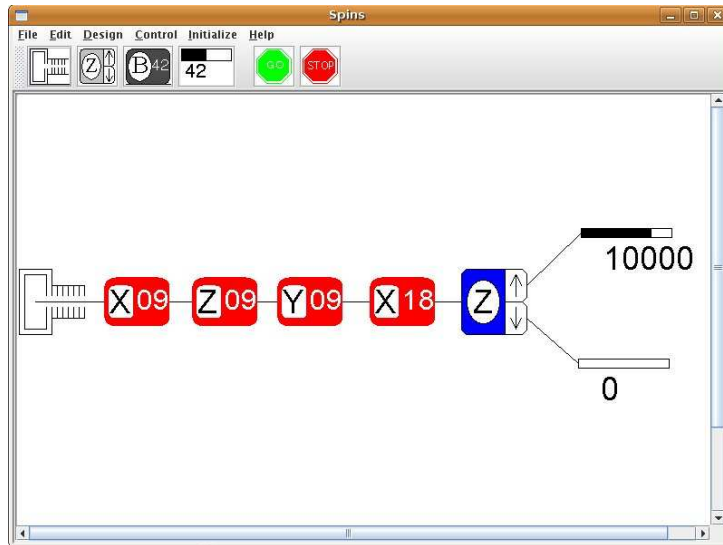
1. Determine o estado inicial na representação em que  $S_z$  é diagonal.
2. Determine a direcção  $\vec{n}$  do segundo analisador de spin, sabendo que  $\theta = \pi/2$ . Mostre que a direcção definida por  $\theta = \pi/4, \varphi = 0$  conduz às mesmas contagens.

**\*10.13** Considere a experiência da Figura seguinte



Sabendo que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z, descubra a direcção  $\vec{n}$ . Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

**\*10.14** Considere a experiência da Figura seguinte



Sabe-se que o estado inicial tem spin up segundo o eixo dos z. Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo B.

### 35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

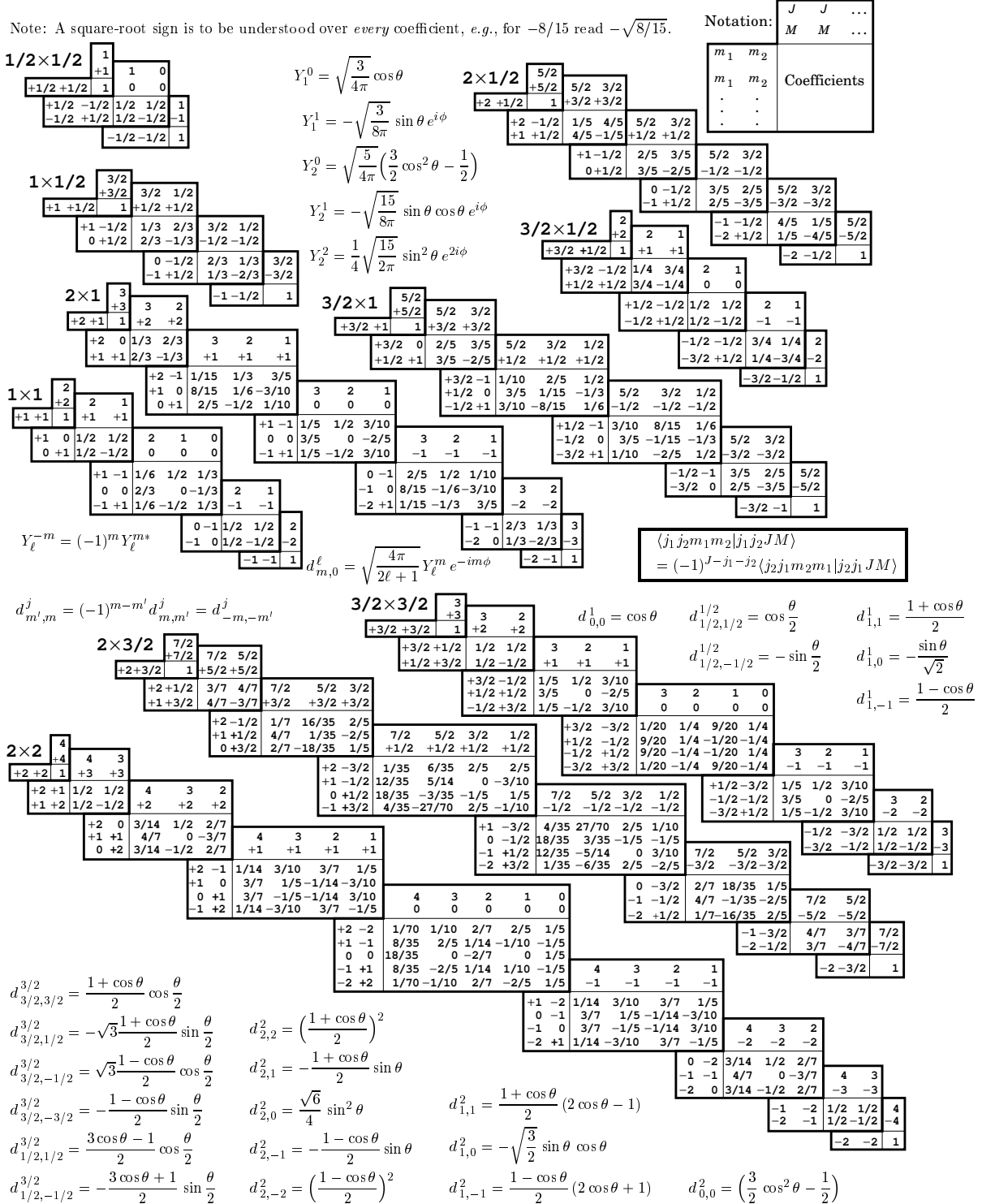


Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figura 4: Coeficientes de Clebsch-Gordan para  $j_i = 1/2, 1, 3/2, 2$ . Fonte: Particle Data Group web page, <http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/clebrpp.pdf>