Mecânica Quântica – Exame – 30/1/2010

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2009/2010
Duração 3h

Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto. Todas as alíneas têm igual cotação, excepto no Grupo III, onde a cotação está explicitamente indicada.

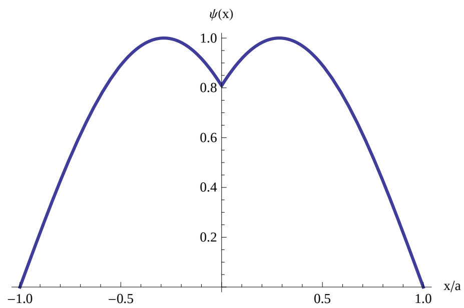
I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Para problemas a uma dimensão tem-se sempre $\Big[[H,x],p\Big] \neq 0$ com $H = p^2/2m + V(x)$.

2. Considere uma partícula numa caixa de largura a tal que ($V = 0$ se $0 < x < a$, $V = \infty$ se $x > a$ ou $x < 0$). A partícula encontra-se num estado tal que $\langle E \rangle = 4\pi^2\hbar^2/(2ma^2)$. Uma medida da energia do estado encontra o valor $E_1 = \pi^2\hbar^2/(2ma^2)$ com probabilidade $1/4$.

3. Considere a função de onda representada na figura

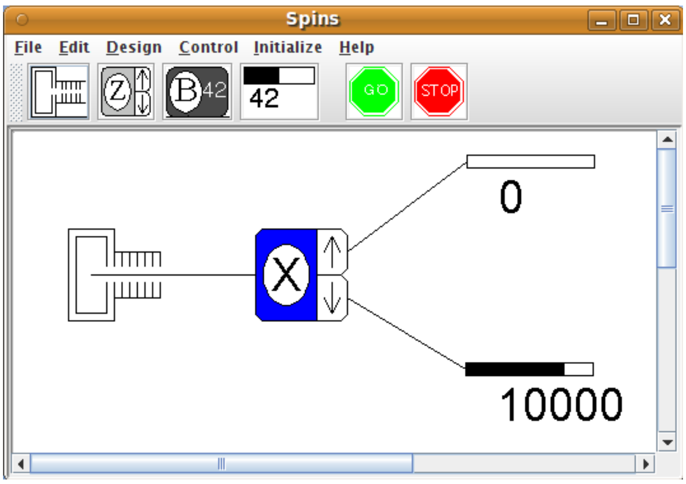


   Sabe-se que esta função representa uma partícula numa caixa entre $-a < x < a$ com um potencial adicional $V(x) = \beta\delta(x)$. Então $\beta > 0$.

4. Para qualquer estado $|\psi\rangle$, normalizado, temos sempre $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq E_0$, onde E_0 é o valor próprio mais baixo de H.

5. Para $l' \neq l$ têm-se sempre $\langle l'm'|\, L_z\, |lm\rangle = 0$, para $\forall\ m, m'$.

6. Considere a experiência da Figura seguinte



onde os números nos contadores indicam o número de electrões detectados depois de terem sido *disparados* 10000 electrões num dado estado e após terem passado por um analisador de spin segundo o eixo dos x. Então o estado inicial pode ser representado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

na represntação em que S_z é diagonal.

7. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$|\psi\rangle = f(r) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1,-1\rangle \right)$$

onde os estados $|l,m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z. A probabilidade duma medida de L_z dar $-\hbar$ é 1/3.

8. A energia do estado fundamental do positrónio, um átomo formado por um positrão e um electrão, é 6.8 eV (metade da energia do estado fundamental do Hidrogénio).

II (4 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

1. Suponha que o electrão se encontra no estado

$$\psi(x,0) = Au_1(x) + Bu_2(x)$$

onde A e B são constantes reais. Sabe-se que B é positiva. Determine B em função de A.

2. Qual o valor médio da energia no estado $\psi(x,0)$ em função de A?

3. Para o estado $\psi(x,0)$, determine A e B tais que numa medida da posição a probabilidade encontrar o electrão entre 0 e $a/2$ seja mínima.

4. Escreva a função de onda para $\psi(x,t)$. Qual o valor médio da energia para $t > 0$?

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ -V_0 & -a < x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

com $V_0 > 0$.

1. **[1 val]** Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial se escreve

$$-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$$

onde, como habitualmente, $y = qa = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$ e $\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$.

2. **[0.5 val]** Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados?

3. **[0.5 val]** Quantos estados ligados existem para $V_0 = \frac{49\pi^2\hbar^2}{32ma^2}$?

4. **[0.5 val]** Esboce um gráfico da função de onda para o estado fundamental e para o primeiro estado excitado, adimitindo que existem.

5. **[1.5 val]** Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x > 0$ a função de onda é dada por

$$u_{II}(x) = e^{-ikx} + Re^{ikx}$$

Calcule R. Mostre que $|R| = 1$. Verifique que quando $V_0 \to 0$ então $R \to -e^{2ika}$. Interprete este resultado.

IV (2 valores)

A função de onda duma partícula num potencial esfericamente simétrico é dada por

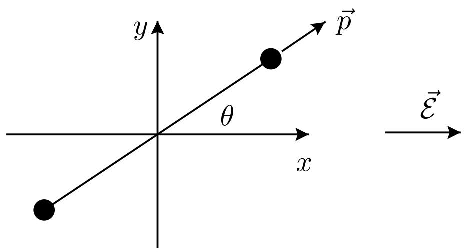
$$\psi(r) = C(x+z)\, e^{-\frac{r}{2r_0}}$$

1. Determine a constante de normalização C. **Sugestão:** Escreva a função de onda em termos das harmónicas esféricas dadas no formulário.

2. Qual é a probabilidade de que uma medida dê o valor $L^2 = 2\hbar^2$ e $L_z = 0$? Determine as probabilidades de obter $L_z = \pm\hbar$.

V (3 valores)

Considere uma molécula que pode rodar no plano xy e que tem um momento dipolar eléctrico $\vec{p}$, conforme indicado na figura.



Na ausência do campo $\vec{\mathcal{E}}$ o Hamiltoniano não perturbado é

$$H_0 = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\theta^2}$$

As funções próprias normalizadas deste problema são

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

com energias

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2I}$$

Considere agora que se aplica um campo eléctrico, $\vec{\mathcal{E}}$, conforme indicado na figura e que sua intensidade é *fraca*, de tal modo que o correspondente Hamiltoniano

$$H_1 = -\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

pode ser considerado uma perturbação.

1. Explicite o que se deve entender por campo fraco, em termos dos parâmetros do problema, $|\vec{p}|$ e I.

2. Determine a correcção de 1ª ordem ao estado ψ_n. **Sugestão:** Recordar que,

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

3. Determine a correcção de 2ª ordem ao estado fundamental. (Notar que o estado fundamental não é degenerado).

VI (3 valores)

Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin $\frac{1}{2}$ fixa no espaço. Descrevemos o sistema na base em que S_z é diagonal. Um campo magnético $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ é aplicado segundo o eixo dos z. O Hamiltoniano do sistema é

$$H = -\vec{M}\cdot\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}\cdot\vec{B} = \hbar\omega\ \sigma_z$$

onde $\omega = \dfrac{eB_0}{2m}$. No instante $t = 0$, o sistema está no estado com spin $-\hbar/2$ segundo o eixo dos y, isto é,

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -i\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

1. Determine o estado do sistema no instante t, $\psi(t)$.
   Nota: Este problema tanto se pode fazer resolvendo directamente a equação de Schrödinger,

   $$i\hbar\frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t)$$

   como, mais facilmente, usando o facto de que o Hamiltoniano é diagonal, determinando os estados estacionários e aplicando o postulado da expansão para estados estacionários.

2. Para o estado $\psi(t)$, calcule o valor médio $\langle S_x\rangle \equiv \langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle$.

3. Calcule a probabilidade duma medida do spin segundo o eixo dos x dar o valor $+\hbar/2$, no instante t.