Exame MQ, 1ª Época, 20/1/2010

I

1) <u>Verdadeira</u>

$$B = e^{A} = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

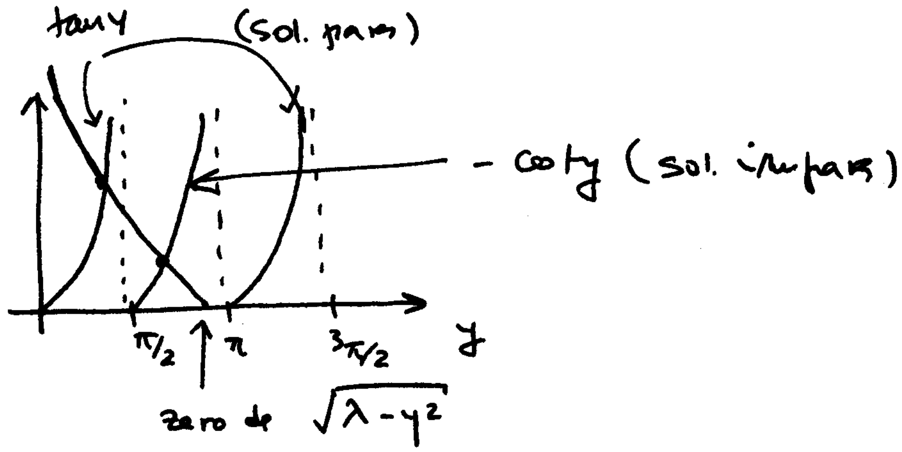
e $(A^n)^\dagger = (A^\dagger)^n = A^n$ $(A = A^\dagger$ pois é hermítico$)$

e $B^\dagger \stackrel{\cdot}{=} B$

2) <u>Falsa</u> $\Delta u' \equiv u'(0^+) - u'(0^-) = \frac{\hbar^2}{2m}\beta\, u(0) > 0$ se $\beta > 0$ e $u(0) > 0$

e na figura $\Delta u' < 0$.

3) <u>Verdadeira</u>



4) <u>Falsa</u> $x^3 \propto (A + A^\dagger)^3 \subset A^\dagger A^2 + \cdots$

e $\langle n | A^\dagger A^2 | n+1 \rangle \neq 0$.

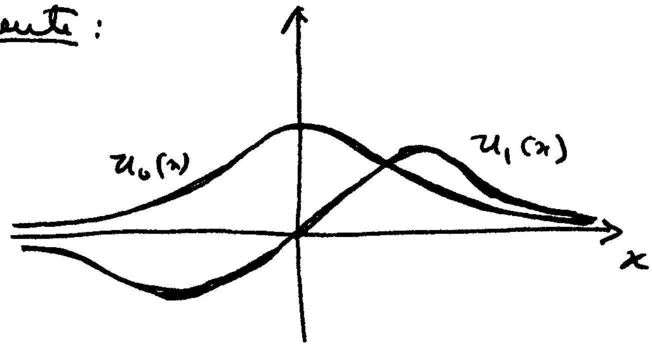
II

1) $P(E = E_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

2) $\sum_n |A_n|^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + |A|^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (real e positivo)

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega$$

3) <u>Graficamente</u>:



$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_1(x)$$

logo $\int_0^\infty dx\, |\psi(x,0)|^2 > \int_{-\infty}^0 dx\, |\psi(x,0)|^2$

<u>Analiticamente</u>

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right] e^{-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_0^\infty dx\, |\psi(x,0)|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\int_0^\infty dy\,(1+\sqrt{2}\,y)^2 e^{-y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\,(1+2\sqrt{2}y + 2y^2)\, e^{-y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{2}\,\frac{1}{2}\Gamma(1) + 2\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^0 dx\, |\psi(x,0)|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^0 dy\,\left(1 + 2\sqrt{2}y + 2y^2\right)e^{-y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\left(1-2\sqrt{2}\,y+2y^2\right)e^{-y^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

e portanto

$$\int_0^\infty dx\,|\psi(x,0)|^2 > \int_{-\infty}^0 dx\,|\psi(x,0)|^2$$

4) $$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}u_0(x)\,e^{-i\frac{\omega}{2}t} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_1(x)\,e^{-i\frac{3}{2}\omega t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\omega}{2}t}\left[u_0(x) + u_1(x)\,e^{-i\omega t}\right]$$

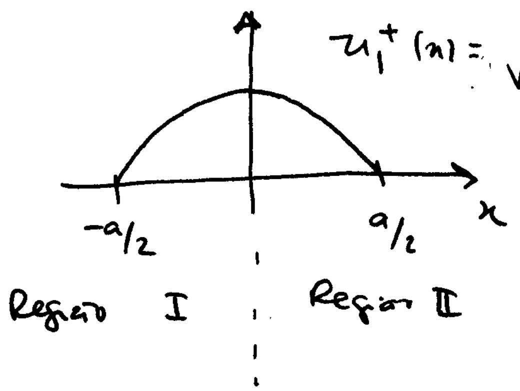
$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\left|u_0(x) + u_1(x)\,e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(u_0(x)+u_1(x)\cos\omega t\right)^2 + u_1^2(x)\sin^2\omega t\right]$$

Frequência $\rightarrow \boxed{\omega}$ $\Rightarrow$ Período $\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

III

1) $u_1^+(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\pi\frac{x}{a}\right)$



2) Seja a região I $(-a/2 < x < 0)$ e II $(0 < x < a/2)$. Nessas regiões $V=0$ pelo que a equação de Schrödinger é

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0 \quad ; \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

com soluções $\sin kx$, $\cos kx$. Como $V(x) = V(-x)$ podemos separar as soluções pares e ímpares:

<u>Soluções pares</u>:

$$\begin{cases} u_{II}(x) = A \sin k\left(x - \frac{a}{2}\right) & \left(\text{já com a condição } u_{II}\left(\frac{a}{2}\right) = 0\right) \\ u_{I}(x) = -A \sin k\left(x + \frac{a}{2}\right) & \left(\text{já com a condição } u_{I}\left(-\frac{a}{2}\right) = 0\right) \end{cases}$$

e $u_{II}(x) = u_{I}(-x)$

- Continuidade em $x=0$ da função

$$A \sin\left(-\frac{a}{2}\right) = -A \sin\left(\frac{a}{2}\right) \quad \checkmark$$

- Descontinuidade em $x=0$ da derivada de $u(x)$:

$$A k \cos\left(\frac{ka}{2}\right) - (-A) k \cos\frac{ka}{2} = \frac{\beta}{a}(-A) \sin\frac{ka}{2}$$

ou seja

$$\tan\frac{ka}{2} = -\frac{2ka}{\beta} \Rightarrow \boxed{\tan\frac{y}{2} = -\frac{2y}{\beta}} \quad (1)$$

<u>Soluções ímpares</u>:

$$\begin{cases} u_{II}(x) = A \sin k\left(x - \frac{a}{2}\right) \\ u_{I}(x) = A \sin k\left(x + \frac{a}{2}\right) \end{cases} \qquad u_{II}(x) = -u_{I}(-x)$$

- Continuidade em $x=0$

$$A \sin\left(-\frac{ka}{2}\right) = A \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \begin{cases} A = 0 \\ \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

- Descontinuidade em $x=0$

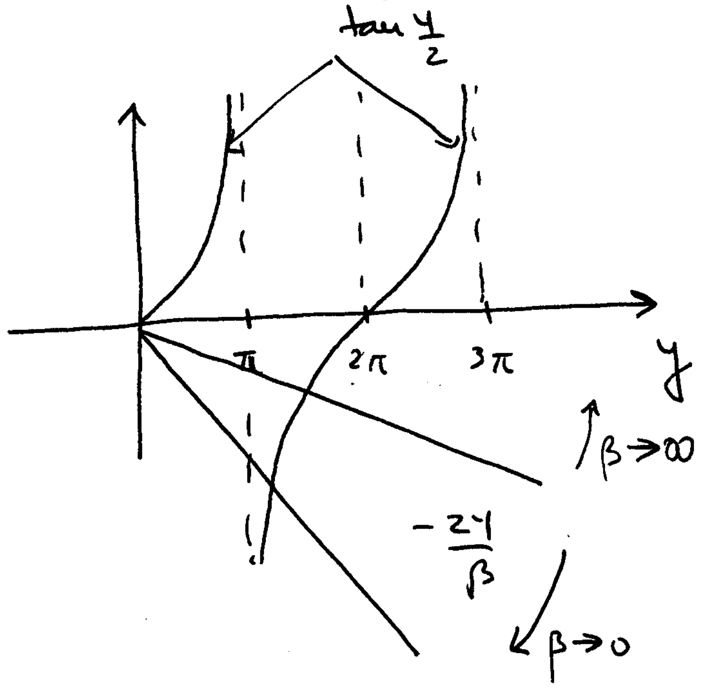
$$A k \cos\left(\frac{ka}{2}\right) - A k \cos\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{\beta}{a} A \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

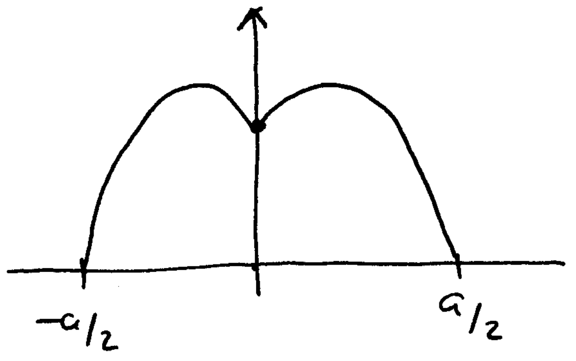
A solução não trivial é

$$\sin \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2n\pi} \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (2)$$

A condição 2) corresponde às soluções ímpares do problema do poço simétrico pois como $u(0)=0$ a função delta não influencia o problema. As soluções pares são obtidas, graficamente, a partir de



3)



4) Quando $\beta \to 0$, $-\frac{2\pi}{\beta} \to -\infty$, ou $x\beta$ (ver figura anterior)

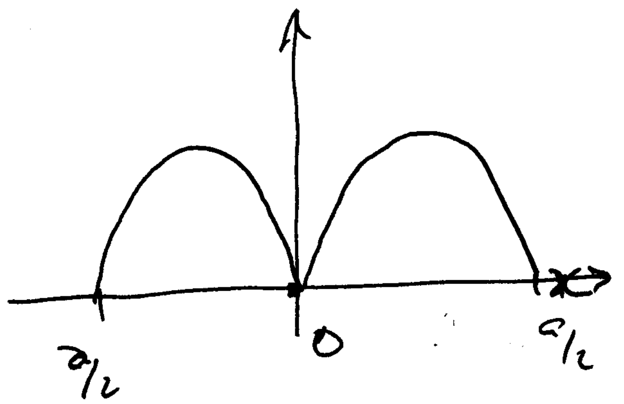
$$\frac{y}{2} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = (2n-1)\pi \qquad n = 1, 2, \dots$$

que corresponde às soluções pares.

5) Quando $\beta \to \infty$ $-\frac{2\pi}{\beta} \to 0$ (ver figura). Portanto

$$\frac{y}{2} = n\pi \quad \Rightarrow \quad y = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_1 = \frac{\hbar^2 (ka)^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 4\pi^2}{2ma^2}}$$

isto é corresponde às soluções ímpares. A razão é que neste limite as funções se têm que anular em $x=0$. Por exemplo para o estado fundamental



logo $y = 2\pi \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} y^2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} 4\pi^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

isto é, no limite $\beta \to \infty$ temos 2 poços de largura $\frac{a}{2}$!

IV

1) Verdadeira $\quad \mathcal{P}(S_z = +\frac{\hbar}{2}) = \frac{3}{4}$; $\mathcal{P}(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{4}$

2) Verdadeira $\quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$ + permutação.

$\mathrm{Tr}[L_x, L_y] = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}[L_z] = 0$ + permutação.

(dimensão finita)

3) Falsa $\quad \mathcal{P}(L_z = \hbar) = 0$ pois

$$\sin^2\theta \cos 2\varphi = A\left(Y_2^2 + Y_2^{-2}\right)$$

4) Verdadeira $\quad$ A perturbação é ímpar!

V

1) $\quad \psi(\vec{r}) = R(r)\, Y_{00} \quad (\ell = 0)$.

Fazendo $u(r) = r R(r)$ temos $(\ell = 0)$ para $a < r < b$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k^2 u = 0 \quad ; \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

com solução

$$u(r) = A \cos kr + B \sin kr$$

As condições a satisfazer são

$$\begin{cases} u(a) = 0 = A\cos ka + B \sin ka & (1) \\ u(b) = 0 = A \cos kb + B \sin kb & (2) \end{cases}$$

De (2) resulta

$$B = -A \frac{\cos(kb)}{\sin(kb)}$$

e substituindo em (1)

$$0 = A \cos ka - A \frac{\cos kb}{\sin kb} \sin ka$$

ou ainda

$$\sin(kb)\cos(ka) - \cos(kb)\sin(ka) = 0$$

ou

$$\sin k(b-a) = 0 \Rightarrow k(b-a) = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{b-a} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m(b-a)^2}$$

e para o estado fundamental $n=1$ logo

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(b-a)^2}$$

2) $$\psi(r) = R\, Y_{00} = N \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi(r-a)}{b-a}\right)$$

onde N é uma normalização. Notar que

$$\psi(a) = 0 \quad e \quad \psi(b) = 0.$$

1) A perturbação é diagonal pelo que podemos usar teoria das perturbações não degenerada.

$$\Delta E_n = \langle n l m | -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \beta \frac{a_0}{r^2} | n l m \rangle$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \beta a_0 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{nlm}$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{mc\alpha}$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \beta a_0 \frac{2Z^2}{a_0^2 n^3 (2l+1)}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$

$$= -\alpha \hbar c \beta \frac{2Z^2}{\frac{\hbar}{mc\alpha} n^3 (2l+1)}$$

$$= -mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{2\beta}{n^3(2l+1)}$$

2) Se $\beta \ll 1$ então

$$\epsilon_l = \frac{2l+1 - \sqrt{(2l+1)^2 - 8\beta}}{2}$$

$$= \frac{2l+1 - (2l+1)\sqrt{1 - \frac{8\beta}{(2l+1)^2}}}{2}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left[(2l+1) - (2l+1)\left(1 - \frac{4\beta}{(2l+1)^2}\right)\right]$$

$$\simeq \frac{2\beta}{2l+1}$$

Por outro lado

$$E_{n\ell} = -\frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{1}{(n-\varepsilon_\ell)^2}$$

$$\simeq -\frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{1}{n^2 - 2n\varepsilon_\ell}$$

$$= -\frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{1}{n^2} \frac{1}{1-\frac{2\varepsilon_\ell}{n}}$$

$$\simeq -\frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2\varepsilon_\ell}{n^3} + \dots\right)$$

$$\Delta E_{n\ell} = E_{n\ell} - \frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{1}{n^2}$$

$$= -mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{\varepsilon_\ell}{n^3}$$

$$= -mc^2 (Z\alpha)^2 \frac{2\beta}{n^3 (2\ell+1)} .$$

VII

1) $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e $$H = A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}$$

As dimensões de A e B são as do Hamiltoniano, ou seja, energia.

2) Equação característica:

$$(A-\lambda)^2 - B^2 = 0 \Rightarrow A - \lambda = \pm B$$

$$\lambda = A \mp B \Rightarrow E_1 = (A-B)\ ;\ E_2 = (A+B)$$

os estados próprios obtêm-se da forma usual. Para $E_1 = A-B$, temos

$$\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = (A-B)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\begin{cases} A\alpha + \beta B = (A-B)\alpha \\ B\alpha + A\beta = (A-B)\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$|1\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Do mesmo modo $|2\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

Não podíamos usar teoria de perturbação não degenerada pois para $B=0$ os dois estados são degenerados. A teoria de perturbação degenerada coincide com o problema exacto.

3)