Mecânica Quântica – Teste 1 –Exemplo

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009
Duração 1h30m

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a razão sem fazer contas.

1. O operador xp_x é hermítico.
2. Considere uma partícula numa caixa de largura $2a$ centrada em $x = 0$ ($V = 0, |x| < a$, $V = \infty, |x| > a$). Sejam $\psi_n(x), n = 1, 2, 3, \ldots$ as funções próprias do operador Hamiltoniano. Então
$$x_{n+1,n} = \int_{-a}^{a} dx\, x\, \psi^*_{n+1}(x)\psi_n(x) = 0$$
3. As funções próprias do operador Hamiltoniano para o problema da partícula na caixa ($V = 0, |x| < a$, $V = \infty, |x| > a$), são funções próprias simultâneas dos operadores momento linear e Paridade.
4. Em problemas a uma dimensão não há estados degenerados do operador Hamiltoniano para funções de onda normalizáveis.

II (8 valores)

Seja uma partícula numa caixa descrita pelo potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

1. Suponha que a partícula no instante $t = 0$ se encontra no estado
$$\psi(x, 0) = A\ u_1(x) + B\ u_2(x).$$
onde A e B são constantes reais. Sabe-se que uma medida da energia do sistema dá o valor E_2 com probabilidade 1/2. Determine $|A|$ e $|B|$.
2. Sabendo que a constante A é positiva e que no instante $t = 0$ a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[0, a/2]$ é menor que a probabilidade de a encontrar no intervalo $[a/2, a]$, determine o sinal da constante B. **Nota:** Se pensar um pouco não precisa de fazer contas.
3. Determine os valores de x para os quais a densidade de probabilidade $P(x) = |\psi(x, 0)|^2$ se anula. **Nota:** Se não determinou o sinal de B na alínea anterior use um sinal à sua escolha.
4. Que acontece para $t > 0$ aos pontos onde $P(x, t)$ se anula, mantém-se ou variam? Justifique a resposta.

III (8 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\lambda}{a}\,\delta(x-a) & x > 0 \end{cases}$$

1. Considere os estados de difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x > a$ a função de onda é dada por
$$u_{II}(x) = e^{-ikx} + Re^{ikx}$$
Calcule R e $|R|^2$. Comente os resultados.

2. Calcule o fluxo $j_I(x)$ para $0 < x < a$ e $j_{II}(x)$ para $x > a$ e verifique que o fluxo é conservado.

3. Considere agora o problema dos estados ligados, isto é, $E < 0$. Determine a equação para os estados ligados.

4. Verifique que essa equação podia ter sido deduzida olhando para os pólos do factor de reflexão R (zeros do denominador).

5. Haverá sempre estado(s) ligado(s)? Para responder a esta questão faça uma análise gráfica da equação dos estados ligados, justificando se existe(m) sempre estado(s) ligado(s) ou se é preciso impor alguma condição em λ para que isso aconteça.

Formulário

- **Poço de potencial infinito**
  $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador hamiltoneano H (i.e. da energia) são:
$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2\ .$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
  $V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador hamiltoneano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):
$$\begin{aligned} u_n^-(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) & E_n^- &= E_0\ (2n)^2 \\ u_n^+(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\ \cos\left[(2n-1)\,\frac{\pi}{a}x\right] & E_n^+ &= E_0\ (2n-1)^2 \end{aligned} \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**
$$\int dy\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$
$$\int dy\ \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$
$$\int dy\ y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$
$$\int dy\ y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**
  As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\ H_n(y)\ e^{-y^2/2}$$

onde $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned}
H_0 &= 1 \\
H_1 &= 2x \\
H_2 &= 4x^2 - 2 \\
H_3 &= 8x^3 - 12x \\
H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12
\end{aligned}$$

As energias são dadas por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- **Oscilador harmónico: Operadores A e A^+**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(A^+ A + \frac{1}{2}\right)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

com

$$\left[A, A^+\right] = 1$$

Os estados correctamente normalizados são

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(A^+\right)^n |0\rangle$$

com $A\,|0\rangle = 0$.