Soluções Teste Exemplo

I

1) Falso : $[x, p_x] \neq 0$

2) Falso : $x\,\psi^*_{n+1}\,\psi_n$ é par

3) Falso : $[H, p] \neq 0$

4) Verdadeiro : Seja $H\psi_1 = E\psi_1$; $H\psi_2 = E\psi_2$

Então $$\frac{d}{dx}\left[\psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dx}\right] = 0$$

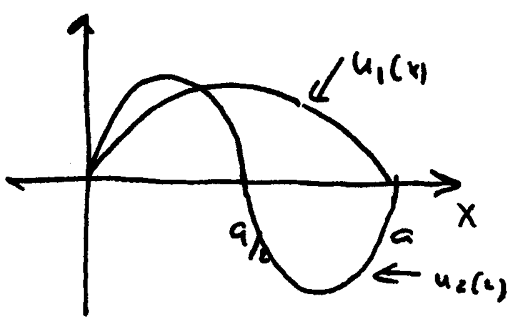
como $\psi_{1,2} \to 0$ $|x| \to \infty$ $\Rightarrow$ $\psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} = \psi_2 \frac{d\psi_1}{dx} \Rightarrow \psi_1 = \lambda \psi_2$

II

1) $|A|^2 + |B|^2 = 1$

$|B|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $u_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ $\qquad u_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$



$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow |\psi|^2$ max em $[a/2, a]$

3. $$P(x,0) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{a}\left(\sin\frac{\pi x}{a} - \sin\frac{2\pi x}{a}\right)^2$$

$$= \frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(1 - 2\cos\frac{\pi x}{a}\right)^2$$

$$P(x,0)=0 \Rightarrow x = 0, a \quad \wedge \quad \cos\frac{\pi x}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

4. $$P(x,t) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{a}\left|\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} - 2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\frac{\pi x}{a}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right|^2$$

$$= \frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left|1 - 2\cos\frac{\pi x}{a}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t}\right|^2$$

$$= \frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\left(1 - 2\cos\frac{\pi x}{a}\cos\omega t\right)^2 + 4\cos^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\omega t\right]$$

$$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

$$= \frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[1 + 4\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - 4\cos\frac{\pi x}{a}\cos\omega t\right]$$

$$= \frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\left(1 - 2\cos^2\frac{\pi x}{a}\right)^2 + 4\cos\frac{\pi x}{a}\left(1 - \cos\omega t\right)\right]$$

e a posição do zero claramente que muda com t.

1) $\begin{cases} u_I(x) = A \sin kx \\ u_{II}(x) = e^{-ikx} + R e^{ikx} \end{cases}$ $\qquad k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

satisfazemos $u_I(0) = 0$. Em $x=a$ temos

$$\begin{cases} A \sin ka = e^{-ika} + R e^{ika} & (1) \\ -ik\left(e^{-ika} - R e^{ika}\right) - A k \cos ka = -\dfrac{\lambda}{a} A \sin ka & (2) \end{cases}$$

Pois

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=a+\varepsilon} - \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=a-\varepsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dx\, V(x) u(x) = -\frac{\lambda}{a} u(0)$$

De (1) obtemos

$$A = \frac{e^{-ika} + R e^{ika}}{\sin ka}$$

e substituindo em (2) vem

$$-ik\left(e^{-ika} - R e^{ika}\right) - k\left(e^{-ika} + R e^{ika}\right)\cot ka = -\frac{\lambda}{a}\left(e^{-ika} + R e^{ika}\right)$$

donde

$$R e^{2ika} = \frac{ka \cot ka - \lambda + ika}{-ka \cot ka + \lambda + ika}$$

e portanto $|R| = 1$ (Justificação na alínea seguinte).

2) $$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx}\right]$$

logo $j_I(x) = 0$ (a função é real)

e
$$j_{II}(x) = \frac{\hbar k}{m}\left(-1 + |R|^2\right) = 0 \quad \text{pois } |R| = 1$$

Portanto o fluxo é conservado.

3) Seja $$\kappa^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

Para $x > 0$ e $x \neq a$ temos

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \kappa^2 u = 0$$

Com a condição $u(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$ devemos ter

$$\begin{cases} u_I(x) = A \sinh \kappa x \\ u_{II}(x) = B e^{-\kappa x} \end{cases}$$

<u>Condições em $x = a$</u>

$$\begin{cases} A \sinh \kappa a = B e^{-\kappa a} \\ -\kappa B e^{-\kappa a} - A \kappa \cosh \kappa a = -\frac{\lambda}{a} B e^{-\kappa a} \end{cases}$$

ou seja
$$\kappa a(1 + \coth \kappa a) = \lambda$$

Façamos $y = \kappa a$. Então

$$\tanh y = \frac{y}{\lambda - y}$$

4) os polos de Q são

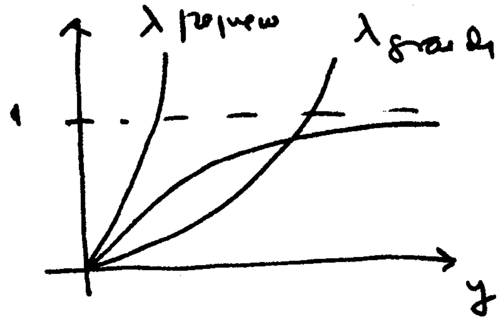
$$\lambda = ka \cot ka - i ka$$

mas $k \to i k \Rightarrow \cot ka \to -i \coth ka$ e portanto

$$\boxed{\lambda = \kappa a \coth \kappa a + \kappa a}$$

5 Da equação

$$\tanh y = \frac{y}{\lambda - y}$$



Condição para haver solução ligada:

$$\left(\frac{y}{\lambda - y}\right)'_{y=0} < (\tanh y)'_{y=0} = 1$$

$$\frac{1}{\lambda} < 1 \Rightarrow \boxed{\lambda > 1}$$