Mecânica Quântica – Teste 1 – 6/11/2008

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009
Duração 1h30m

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a razão sem fazer contas.

1. [**1 val**] Se A e B forem operadores hermíticos, então o operador AB também é hermítico.
2. [**1 val**] Considere uma partícula sujeita ao potencial do oscilador harmónico a uma dimensão. Sejam $u_n(x)$ as funções próprias da energia do estado estacionário $n = 0, 1, 2, \ldots$ com energia $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Então
$$x_{n+2,n} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; u^*_{n+2}(x)\, x\, u_n(x) = 0$$
3. [**1 val**] Considere um poço de potencial a uma dimensão, isto é, $V = -V_0,\ -a < x < a$ e $V = 0,\ x > |a|$. Se
$$V_0 \in \left[\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right]$$
então existem dois estados ligados para este potencial.
4. [**1 val**] Considere uma partícula numa caixa de largura a tal que ($V = 0$ se $0 < x < a$, $V = \infty$ se $x > a$ ou $x < 0$). A partícula encontra-se num estado tal que $\langle E \rangle = 3\pi^2\hbar^2/(4ma^2)$. Então o valor médio do quadrado do momento é
$$\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2a^2}$$
.

II (8 valores)

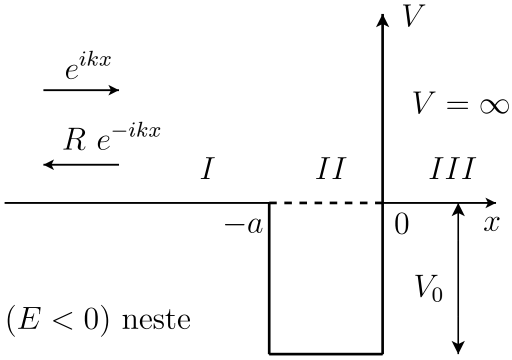
Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

1. [**2 val**] Suponha que o electrão no instante $t = 0$ se encontra no estado
$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\, u_1(x) + B u_4(x).$$
onde B é uma constante real e positiva. Determine B.
2. [**2 val**] Calcule o valor médio da energia $< E >$ no estado $\psi(x, 0)$.
3. [**2 val**] Diga se, para $t = 0$, a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[0, a/2]$ é maior ou menor do que $1/2$. Justifique a resposta.
4. [**2 val**] Escreva o estado no instante t, $\psi(x, t)$. Qual o valor médio da energia no estado $\psi(x, t)$?

III (8 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a < x < 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$



com $V_0 > 0$.

1. **[2 val]** Mostre que a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial é
$$\cot qa = -\frac{\alpha}{q}$$
onde, como habitualmente, $q = \sqrt{2m(V_0 - |E|)/\hbar^2}$ e $\alpha = \sqrt{2m|E|/\hbar^2}$.

2. **[1 val]** Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados? Para analisar esta questão deverá representar graficamente da relação anterior. Para esse fim poderá ser útil usar a relação que vimos na aula
$$\alpha a = \sqrt{\lambda - (qa)^2}, \quad \text{com } \lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$$

3. **[1 val]** Quantos estados ligados existem para $V_0 = \dfrac{18\hbar^2}{ma^2}$?

4. **[1 val]** Nas condições da alínea anterior, esboce um gráfico da função de onda para o estado fundamental e para o último estado ligado (o de maior energia).

5. **[3 val]** Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x < -a$ a função de onda é dada por
$$u_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$
Calcule R e mostre que $|R| = 1$. Mostre que no limite $V_0 \to 0$, temos $R = -1$. Explique porquê.

Formulário

- **Poço de potencial infinito**
$V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador hamiltoneano H (i.e. da energia) são:
$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2\ .$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
$V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador hamiltoneano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):
$$u_n^-(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \qquad E_n^- = E_0\ (2n)^2$$
$$u_n^+(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \cos\left[(2n-1)\,\frac{\pi}{a}x\right] \qquad E_n^+ = E_0\ (2n-1)^2$$
$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**

$$\int dy\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int dy\ \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int dy\ y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$

$$\int dy\ y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**

As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\ H_n(y)\ e^{-y^2/2}$$

onde $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2x \\ H_2 &= 4x^2 - 2 \\ H_3 &= 8x^3 - 12x \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned}$$

As energias são dadas por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Oscilador harmónico: Operadores A e A^+**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(A^+A + \frac{1}{2}\right)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

com

$$\left[A, A^+\right] = 1$$

Os estados correctamente normalizados são

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(A^+\right)^n |0\rangle$$

com $A\,|0\rangle = 0$.