Mecânica Quântica – Série 9 – Soluções

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009

(Versão de 3 de Dezembro de 2008)

9.1 Resposta:

$$\left(A^\dagger\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(A^\dagger\right)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{24} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^\dagger\right)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(A^\dagger\right)^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde mostrámos só o canto 5×5 superior esquerdo.

9.2 Resposta:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \sqrt{12} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{12} & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

9.3 Resposta:

$$p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & -i\sqrt{4} \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$p^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & -\sqrt{12} \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{12} & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

9.4 e **9.5** Resposta:

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.6 `Resposta:`

a) $\langle H\rangle = \dfrac{3}{2}\hbar\omega$

b) $\langle x\rangle = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3};\ \langle x^2\rangle = \dfrac{\hbar}{2m\omega}\dfrac{9+\sqrt{2}}{3};\ \langle p\rangle = 0;\ \langle p^2\rangle = \dfrac{\hbar m\omega}{2}\ \dfrac{9-\sqrt{2}}{3}$

c) $(\Delta x)^2 = \dfrac{\hbar}{2m\omega}\ \dfrac{15-5\sqrt{2}}{9};\ (\Delta p)^2 = \dfrac{\hbar m\omega}{2}\ \dfrac{9-\sqrt{2}}{3}$

$$\Delta x\ \Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{145-60\sqrt{2}}{27}} > \frac{\hbar}{2}$$

`Comentário aos problemas 9.1 a 9.6:`

Estes problemas podem ser muito facilmente feitos usando o `mathematica` para trabalhar com matrizes. Claro que aqui as matrizes são de dimensão infinita, mas deve ser claro que como as perguntas dizem respeito ao canto superior esquerdo, basta trabalhar com matrizes ligeiramente superiores ao pretendido para obter os resultados. Assim sugiro que usem o programa seguinte, que usa matrizes 6×6,

```
(* Programa Serie9.m *)

A={{0,1,0,0,0,0},
   {0,0,Sqrt[2],0,0,0},
   {0,0,0,Sqrt[3],0,0},
   {0,0,0,0,Sqrt[4],0},
   {0,0,0,0,0,Sqrt[5]},
   {0,0,0,0,0,0}};

AP=Transpose[A];
H=hbar w DiagonalMatrix[{1/2,3/2,5/2,7/2,9/2,11/2}];
x= Sqrt[hbar/(2 m w)] ( A + AP);
p= -I Sqrt[hbar  m w /2] ( A - AP);
u0={1,0,0,0,0,0};
psi=1/Sqrt[6] {1,2,1,0,0,0};


AP2= AP . AP;
AP3=AP2 . AP;
AP4=AP3 . AP;
u1=1/Sqrt[1] AP . u0;
u2=1/Sqrt[2!] AP2 . u0;
u3=1/Sqrt[3!] AP3 . u0;
u4=1/Sqrt[4!] AP4 . u0;
Hmed = psi . H . psi;
xmed = Simplify[ psi . x . psi];
x2med = Simplify[psi . x . x . psi];
```

```
pmed = Simplify[ psi . p . psi];
p2med = Simplify[ psi . p . p . psi];
dx2 = Simplify[x2med-xmed^2];
dp2 = Simplify[p2med-pmed^2];
heisenberg=Simplify[Sqrt[dx2 dp2],Assumptions->hbar>0];
heisenbergN=N[heisenberg];

(* Fim Programa Serie9.m *)
```

para verificarem os resultados. O código do programa pode ser obtido na página da disciplina.

***9.7** `Resposta no enunciado e no Exemplo 9.1 do Gasiorowicz`