Mecânica Quântica – Série 10 – Soluções

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009

`(Versão de 3 de Dezembro de 2008)`

∗10.1

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad \psi^- = \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\frac{\alpha}{2}\, e^{i\beta} \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{M}\psi^+ = \frac{\hbar}{2}\psi^+ \quad \mathcal{M}\psi^- = -\frac{\hbar}{2}\psi^- \ .$$

10.2 `Resposta:`

$$P(-\hbar/2) = \frac{13}{50} \ .$$

10.3 `Resposta no enunciado.`

∗10.4 `Resposta:`

$$P(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = 2T) = \cos^4 \omega T + \sin^4 \omega T, \quad \omega = \frac{egB}{4m_e}$$

`Nota:` Este problema pode resolver-se de (pelo menos) duas maneiras:

`1º Método`

Aqui usa-se a representação usual em que S_z é diagonal. Os passos são:

1. Escrever o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ nesta representação. Usar os resultados do problema 10.1.

2. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $0 < t < T$.

3. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $T < t < 2T$.

4. Escrever o estado final, $|\psi(2T)\rangle$ como combinação linear dos estados próprios de S_x, isto é,
$$|\psi(2T)\rangle = a\,|S_x = \hbar/2\rangle + b\,|S_x = -\hbar/2\rangle$$
usando novamente o problema 10.1.

5. O resultado pretendido é $|a|^2$.

`2º Método`

Aqui usa-se a representação em que S_x é diagonal. Os passos são:

1. Mostrar que as matrizes do spin nesta representação são

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

2. O estado inicial $|\psi(0)\rangle$ nesta representação é muito simples

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $0 < t < T$. Não esquecer de usar as matrizes apropriadas a esta representação.

4. Escrever e resolver a equação de Schrödinger para o intervalo $T < t < 2T$.

5. O estado final,

$$|\psi(2T)\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

já está na representação em que S_x é diagonal. Portanto o resultado pretendido é simplesmente $|c|^2$.

10.5 `Resposta no enunciado.`

∗**10.6** `Resposta no enunciado.`

∗**10.7** `Resposta:`

$$\begin{array}{lll} \texttt{Singleto} & |0,0\rangle : & V(r) = V_1(r) - 3V_3(r) \\ & |1,1\rangle : & V(r) = V_1(r) + 2V_2(r) + V_3(r) \\ \texttt{Tripleto} & |1,0\rangle : & V(r) = V_1(r) - 4V_2(r) + V_3(r) \\ & |1,-1\rangle : & V(r) = V_1(r) + 2V_2(r) + V_3(r) \end{array}$$

∗**10.8** `Resposta:`

a) 0, b) 50%

c)
$$\begin{aligned} P_T &= \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + \frac{1}{2}\left[\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 \right. \\ &\quad \left. +2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\beta_2-\beta_1)\right]^2 \end{aligned}$$

`Nota:` Para a alínea c) a probabilidade dos dois electrões estarem num estado singleto é

$$P_S = \frac{1}{2}\left[\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 - 2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos(\beta_2-\beta_1)\right]^2.$$

Pode verificar que $P_T + P_S = 1$.

∗**10.9** `Resposta:`

$$V(r) = \begin{cases} V_1(r) + L\,V_2(r) + L^2\,V_3(r) & (J = L+1) \\ V_1(r) - V_2(r) + V_3(r) & (J = L) \\ V_1(r) - (L+1)\,V_2(r) + (L+1)^2\,V_3(r) & (J = L-1) \end{cases}$$

10.10 `Resposta no enunciado.`