Mecânica Quântica – Exame – 4/2/2009

Curso de Engenharia Biomédica – 2008/2009
Duração 3h

Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto. Todas as alíneas têm igual cotação, excepto no Grupo III, onde a cotação está explicitamente indicada.

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Se os operadores A, B e H obedecem às seguintes relações de comutação:
$$[A, B] \neq 0, \quad [A, H] = 0, \quad [B, H] \neq 0$$
então podemos encontrar funções próprias do Hamiltoniano H que são funções próprias simultâneas de A.

2. Considere uma partícula numa caixa de largura a tal que ($V = 0$ se $0 < x < a$, $V = \infty$ se $x > a$ ou $x < 0$). A partícula encontra-se num estado tal que $\langle E \rangle = \pi^2 \hbar^2/(2ma^2)$. Uma medida da energia do estado encontra o valor $E_2 = 4\pi^2\hbar^2/(2ma^2)$ com probabilidade 1/2.

3. As funções próprias do operador Hamiltoniano para o oscilador harmónico a uma dimensão, são funções próprias simultâneas dos operadores Hamiltoniano e Paridade.

4. Um poço de potencial de largura $2a$ e profundidade $-V_0$ tem sempre, pelo menos um estado ligado.

5. Duas partículas de spin 1 estão num estado com número quântico magnético $m = -2\hbar$. A probabilidade de uma medida de S^2, onde $\vec{S}$ é o spin total, dar o valor $6\hbar^2$ é 1.

6. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão
$$|\psi\rangle = f(r)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle\right)$$
onde os estados $|l, m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z. A probabilidade duma medida de L_z, de dar um valor diferente de zero é 1/3.

7. Considere uma partícula no estado fundamental do oscilador harmónico a uma dimensão com energia $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Aplica-se uma perturbação $H_1 = \lambda\,\hbar\omega\sqrt{m\omega/\hbar}\,x$, com $\lambda \ll 1$. A correcção, de 1ª ordem, à energia do estado fundamental é dada por $\Delta E_0 = \lambda\,\hbar\omega$.

8. Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin 1/2 fixa no espaço. Aplicamos um campo magnético $\vec{B} = B\vec{e}_z$. O Hamiltoniano do sistema é então dado por $H = -\vec{M}\cdot\vec{B} = \frac{e}{m}\vec{S}\cdot\vec{B}$. Os 2 níveis de energia ficam espaçados de $\Delta E = 2\mu_B B$ onde $\mu_B = e\hbar/(2m)$.

II (4 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

1. Suponha que o electrão se encontra no estado
$$\psi_a(x, 0) = \frac{1}{2}u_1(x) + Au_2(x) + Bu_4(x)$$
Qual probabilidade de uma medida da energia do sistema dar o valor E_3?

2. Determine A e B (reais e positivos) sabendo que $\langle E \rangle = \frac{25}{4} E_1$.

3. Considere agora o estado

$$\psi_b(x,0) = C u_1(x) + D u_2(x)$$

Determine C e D sabendo que $\langle x \rangle = \dfrac{a}{2} + \dfrac{16a}{9\,\pi^2}$ e que C e D são reais com $C > 0$.

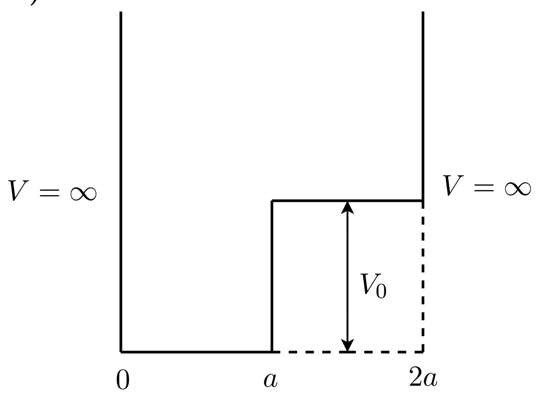
4. Qual o valor médio do quadrado do momento no estado ψ_b? Se não resolveu a alínea c) apresente o resultado em função de C e D.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 < x < a \\ V_0 & a < x < 2a \\ \infty & x > 2a \end{cases}$$

com $V_0 > 0$, tal como indicado na figura.



1. **[1 val]** Considere $E \gg V_0$, isto é, $V_0 \approx 0$. Determine os níveis de energia nessa aproximação. Faça um esboço da função de onda para o estado fundamental.

2. **[0.5 val]** Considere agora o caso $0 < E < V_0$. Sem fazer as contas, desenhe aproximadamente as funções de onda para o estado fundamental e para o primeiro estado excitado, admitindo que existem nestas condições.

3. **[1 val]** Considere agora que $E > V_0$. Mostre que a equação para os estados ligados se escreve

$$k \cot(ka) = -q \cot(qa)$$

onde, como habitualmente, $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ e $q = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}$.

4. **[1 val]** Considere agora as condições da alínea anterior com

$$V_0 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \to \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} = (3\pi)^2$$

Mostre que nestas condições existe uma solução que se anula em $x = a$, isto é, tal que $\sin(ka) = \sin(qa) = 0$. Faça o gráfico da função de onda.

5. **[0.5 val]** Para a situação considerada nas duas últimas alíneas diga se a probabilidade de encontrar a partícula é maior no intervalo $0 < x < a$ ou no intervalo $a < x < 2a$. Justifique.

IV (2 valores)

A função de onda para $t = 0$ dum rotor rígido a três dimensões com Hamiltoniano, $H = \dfrac{L^2}{2I}$, é dada por

$$\psi(0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \cos\varphi$$

1. Quais os valores possíveis para uma medição de L_z e com que probabilidade ocorrem esses valores?

2. Qual é o valor de $\langle L_x \rangle$ para esse estado?

V (3 valores)

Considere um sistema com dois estados, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e com um Hamiltoniano H_0 representado, nesta base, por

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

com $E_1 \neq E_2$.

1. Considere uma perturbação que se pode escrever nesta base

$$H_1 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}$$

   Calcule as correcções de primeira ordem aos níveis de energia do sistema.

2. Considere agora uma correcção da forma

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

   Mostre que as correcções de 1ª ordem são nulas. Calcule as correcções de 2ª ordem usando teoria de perturbações.

3. Resolva o problema exactamente para o Hamiltoniano $H = H_0 + H_2$ e compare com os resultados da alínea anterior, no limite em que $\Delta \ll E_1, E_2$.

VI (3 valores)

Considere uma partícula de massa m e carga $-e < 0$, com spin $\frac{1}{2}$ fixa no espaço. Descrevemos o sistema na base em que S_z é diagonal. No instante $t = 0$, o sistema está no estado *up*, isto é,

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um campo magnético $\vec{B} = B_0\, \vec{e}_x$ é aplicado segundo o eixo dos x. O Hamiltoniano do sistema é então

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} = \mu_B B_0\ \sigma_x$$

onde $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m}$ é o magnetão de Bohr.

1. Determine os valores próprios e vectores próprios do Hamiltoniano.

2. Qual a probabilidade que uma medida do spin segundo o eixo dos z, ao fim do tempo $t_0 = \dfrac{\pi}{6} \dfrac{\hbar}{\mu_B B_0}$ dê o valor $-\hbar/2$?