Mecânica Quântica, 1º Exame 26/1/2009

I

1) <u>Falsa</u> pois $V(x) \neq V(-x) \Rightarrow [H, P] \neq 0$

2) <u>Falsa</u> Só é verdade se $[A, B] = 0$

3) <u>Verdadeira</u> $x^2 \propto (A^2 + A^{+2} + AA^+ + A^+A)$ e só pode ligar ~~estados~~ com o mesmo n ou que tenham valores n e m tais que $n = m \pm 2$.

4) <u>Verdadeira</u>. As soluções <u>pares</u> têm sempre pelo menos uma solução.

II

1) $$\psi(x,0) = A\left(u_0(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} u_1(x)\right)$$

$$A_0 = A \; ; \; A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} A \; , \; A_n = 0 \quad n \geq 2 .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 = 1 \Rightarrow A^2 + \frac{1}{2} A^2 = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{(real e positivo)}$$

2) $$P(E = E_2) = |A_2|^2 = 0$$

3) $$\langle H \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 E_n = |A_0|^2 E_0 + |A_1|^2 E_1 = \frac{2}{3} \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{3} \frac{3\hbar\omega}{2}$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} \hbar\omega$$

4) $$\psi(x,t) = A_0 u_0(x) e^{-i\frac{\omega}{2}t} + A_1 u_1(x) e^{-i\frac{3}{2}\omega t}$$

$$= A e^{-i\frac{\omega}{2}t} \left(u_0(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} u_1(x) e^{-i\omega t}\right)$$

Se $\omega T = \pi \Rightarrow e^{-i\omega T} = -1$ pelo que

$$\psi(x,T) = A e^{-i\frac{\pi}{2}} \left(u_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_1(x) \right)$$

$T \to \frac{\pi}{\omega}$

$$= B \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(1 + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

com $\boxed{T = \frac{\pi}{\omega}}$ e $\boxed{B = -iA}$ $\Rightarrow |B| = A$

III

1) Para $x<0$ e $x>0$ a equação de Schrödinger, para $E<0$, escreve-se

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \kappa^2 u = 0 \qquad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}|E|$$

e as soluções com as condições fronteiras apropriadas são

$$u_I = A\, e^{\kappa x} \quad ; \quad x<0$$

$$u_{II} = B\, e^{-\kappa x} \quad ; \quad x>0$$

uma solução ímpar implicava $u_{II}(x) = -u_I(-x)$ ou seja

$$A = -B \qquad (1)$$

A continuidade da função $u_I(0) = u_{II}(0)$ implica por sua vez

$$A = B \qquad (2)$$

Logo a única soluç. de (1) + (2) é

$$A = B = 0$$

isto é, a solução é identicamente nula!

2) Da alínea 1) resulta que para as soluções pares temos

$$\begin{cases} u_I(x) = A\, e^{Kx} & , x<0 \\ u_{II}(x) = A\, e^{-Kx} & , x>0 \end{cases}$$

Usando a Eq. de Schrödinger

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)u$$

obtemos para o potencial V_δ

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{0^+} - \left.\frac{du}{dx}\right|_{0^-} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{0^-}^{0^+} dx\,(V-E)\,u(x)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\,\beta\,\frac{\hbar^2}{m}\,u(0) = -2\beta\, u(0)$$

Portanto:

$$-AK - AK = -2\beta A$$

$$\boxed{K=\beta} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{\hbar^2\beta^2}{2m}}$$

Há só um estado ligado (sempre)

3) Em $x=0$:

$$u_I(0) = u_{II}(0) \Rightarrow 1+R=T$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{0^+} - \left.\frac{du}{dx}\right|_{0^-} = -2\beta\, u(0) \Rightarrow ikT - (ik - ikR) = -2\beta T$$

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ ikT - ik + ik(T-1) = -2\beta T \end{cases}$$

Com o resultado

$$T = \frac{ik}{\beta + ik} \quad ; \quad R = \frac{-\beta}{\beta + ik}$$

que satisfazem

$$|R|^2 + |T|^2 = 1.$$

4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, V_{poço} = -2aV_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, V_\delta = -\beta \frac{\hbar^2}{m} \quad \Rightarrow \quad \lim_{a\to 0} (2a_0 V_0) = \beta \frac{\hbar^2}{m}$$

Por outro lado ($E<0$)

$$q^2 a^2 = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2 - \frac{2m}{\hbar^2} |E|^2 a^2 = \beta a - \kappa^2 a^2$$

e para $E>0$

$$q^2 a^2 = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2 + \frac{2m}{\hbar} E^2 a^2 = \beta a + k^2 a^2$$

Assim:

<u>Estados ligados ($E<0$)</u>

$$\kappa a = qa \tan qa \simeq (qa)^2 = \beta a + k^2 a^2$$

ou

$$\kappa = \beta + k^2 a \underset{\lim a\to 0}{\Rightarrow} \boxed{\kappa = \beta}$$

Coeficientes R e T

$$R \simeq i \frac{(q^2-k^2)(2qa)}{2kq - i(q^2+k^2)(2qa)}$$

$$= i \frac{(q^2-k^2)a^2}{ka - i(q^2+k^2)a^2} = i \frac{q^2a^2 - k^2a^2}{ka - i(q^2a^2+k^2a^2)}$$

$$\simeq i \frac{\beta a}{ka - i\beta a} \Rightarrow \boxed{-\frac{\beta}{\beta + ik}}$$

$$T \simeq \frac{2kq}{2kq - i(q^2+k^2)2qa}$$

$$\simeq \frac{ka}{ka - i\beta a} \Rightarrow \boxed{\frac{ik}{\beta + ik}}$$

IV

1) Falsa. A probabilidade é zero pois depois da medida o estado fica projectado no estado $|1,0\rangle$

2) Verdadeira $\psi(r,\theta,\varphi) = A e^{-r^2/r_0^2} [\alpha Y_{2,2} + \beta Y_{2,-2}]$

e $P(L_z = \hbar) = 0$

3) Verdadeira $\vec{S}\cdot\vec{n} = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{valores próprios } \pm 1}$

4) Verdadeiro. A perturbação é ímpar.

V

1) A função de onda tem $n=2$, $l=1$ pelo que está no estado estacionário E_2. Portanto

$$\langle H\rangle = E_2 = -\frac{1}{2} mc^2\alpha^2 \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(13.6)\,eV$$

2) Calculemos a normalização. Temos

$$1 = \int d^3r\,|\psi|^2 = \underbrace{\int_0^\infty dr\,r^2 |R_{21}|^2}_{1} \int d\Omega\,|a Y_{11} + b Y_{10} + c Y_{1,-1}|^2$$

$$= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad a, b, c \text{ reais e positivos.}$$

onde se usou a ortonormalização dos Y_{lm}

$$\int d\Omega\, Y^*_{lm} Y_{l',m'} = \delta_{ll'}\delta_{m,m'}$$

Calculemos agora $\langle L_z\rangle$. Obtemos

$$L_z|\psi\rangle = R_{21}\left(a|11\rangle + 0 - c\,|1,-1\rangle\right)$$

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = \underbrace{\int_0^\infty dr\,r^2 |R_{21}|^2}_{1} \left(a\langle 11| + b\langle 10| + c\langle 1,-1|\right)\cdot$$

$$\cdot\left(a|11\rangle - c|1,-1\rangle\right)$$

$$= a^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=c} \quad (\text{reais e positivos})$$

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{2} \langle L_+ + L_- \rangle$$

$$\frac{1}{2}(L_+ + L_-)|\psi\rangle = R_{21} \frac{\hbar}{2} \Big[b\sqrt{2}\,|11\rangle + c\sqrt{2}\,|10\rangle$$
$$+ a\sqrt{2}\,|10\rangle + b\sqrt{2}\,|1\,{-1}\rangle \Big]$$

e

$$\langle L_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,bc + \sqrt{2}\,ba + cb\sqrt{2} \right)$$

$$= \hbar\sqrt{2}\,(ab + bc) = \hbar\sqrt{2}\,b(a+c)$$

Temos portanto

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a = c \\ \sqrt{2}\,b(a+c) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 + b^2 = 1 \\ \cdots\cdot \\ ab = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

que tem como solução

$$\boxed{a = c = \frac{1}{2} \quad ; \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

VI

1) $$\begin{vmatrix} E_0 - \lambda & -A \\ -A & E_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (E_0 - \lambda)^2 = A^2$$
$$\lambda = E_0 \mp A$$

$$E_I = E_0 - A \quad ; \quad E_{II} = E_0 + A$$

<u>vectores próprios</u>

$|I\rangle$

$$\begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (E_0 - A)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E_0\alpha - A\beta = E_0\alpha - A\alpha \\ -A\alpha + E_0\beta = E_0\beta - A\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

logo

$$|I\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e claro que

$$|II\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

<u>verificação</u>:

$$\begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(E_0 + A) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(E_0 + A) \end{pmatrix} = (E_0 + A)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2) $$|\psi(0)\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|I\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|II\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|I\rangle e^{-i\frac{E_I}{\hbar}t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|II\rangle e^{-i\frac{E_{II}}{\hbar}t}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-i\frac{E_I}{\hbar}t} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{E_{II}}{\hbar}t} \\ \frac{1}{2}e^{-i\frac{E_I}{\hbar}t} - \frac{1}{2}e^{-i\frac{E_{II}}{\hbar}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$P(\text{estar em } |2\rangle) = |b(t)|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left| e^{-i\frac{E_I}{\hbar}t} - e^{-i\frac{E_{II}}{\hbar}t} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left| \left(e^{-i\frac{E_I}{\hbar}t}\right)\left(1 - e^{-i\frac{E_{II}-E_I}{\hbar}t}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left| 1 - e^{-\frac{2iAt}{\hbar}} \right|^2$$

$$\omega = \frac{2A}{\hbar} \qquad = \frac{1}{4}\left[(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 - 2\cos\omega t\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos\omega t)$$

3) Oscila com frequência

$$\omega = \frac{2A}{\hbar}$$

$$A = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}h\nu = \frac{1}{2}hc\frac{\nu}{c}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1240\ \text{eV}\times 10^{-9}\,\text{m} \times 24\times 10^{9}\,\text{s}^{-1}}{3\times 10^{8}\,\text{m s}^{-1}}$$

$$= 4.95\times 10^{-5}\ \text{eV}$$

1)
$$H = \mu_B B_0 \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ \eta & -1 \end{pmatrix}$$

os valores próprios são

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \eta \\ \eta & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 - \eta^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1+\eta^2}$$

logo
$$E_{1,2} = \mp \mu_B B_0 \sqrt{1+\eta^2} \quad , \quad E_1 < E_2$$

2) $E^{(0)}_{1,2} = \mp \mu_B B_0$ (Fazer $\eta = 0$ na expressão anterior).

com $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>1ª ordem</u>

$$E_1^{(1)} = \langle 1 | H_1 | 1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_B B_0 \eta \\ \mu_B B_0 \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle 2 | H_1 | 2 \rangle = 0$$

<u>2ª ordem</u>

$$E_2^{(1)} = \langle 1 | H_1 | 2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_B B_0 \eta \\ \mu_B B_0 \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_B B_0 \eta$$

e $\langle 2|H_1|1\rangle = \langle 1|H_1|2\rangle^* = \mu_B B_0 \eta$

Só há dois estados pelo que

$$E_1^{(2)} = \sum_{k\neq 1} \frac{|\langle 1|H_1|k\rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{(\mu_B B_0)^2 \eta^2}{-2\mu_B B_0} = -\frac{1}{2}\mu_B B_0 \eta^2$$

$$E_2^{(2)} = \sum_{k\neq 2} \frac{|\langle 2|H_1|k\rangle|^2}{E_2^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{(\mu_B B_0)^2 \eta^2}{2\mu_B B_0} = +\frac{1}{2}\mu_B B_0 \eta^2$$

3) Vimos que

$$E_{1,2} = \mp \mu_B B_0 \sqrt{1+\eta^2}$$

Se η for pequeno ($\eta \ll 1$) temos $\sqrt{1+\eta^2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\eta^2$

e obtemos

$$E_{1,2} \simeq \mp \mu_B B_0 \left(1 + \frac{1}{2}\eta^2\right)$$

ou

$$E_1 \simeq -\mu_B B_0 - \frac{1}{2}\mu_B B_0 \eta^2 + O(\eta^4)$$

$$E_2 \simeq \mu_B B_0 + \frac{1}{2}\mu_B B_0 \eta^2 + O(\eta^4)$$

de acordo com os resultados da alínea anterior.