Mecânica Quântica – Teste 1 –17/11/2007

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008
Duração 1h30m

I (4 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Se os operadores A, B e H obedecem às seguintes relações de comutação:

$$[A, B] = 0, \quad [A, H] = 0, \quad [B, H] \neq 0$$

então podemos encontrar funções próprias do Hamiltoniano H que são funções próprias simultâneas de A e B.

2. O estado ligado de energia mínima no poço de potencial quadrado centrado em $x = 0$ é simétrico para a troca $x \to -x$.

3. Considere um poço de potencial a uma dimensão, isto é, $V = -V_0,\ -a < x < a$ e $V = 0,\ x > |a|$. Existe pelo menos um estado ligado com $E < -V_0$.

4. O estado fundamental do oscilador harmónico, a uma dimensão, é também uma função própria do momento linear.

5. O estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico, a uma dimensão, é um estado próprio do operador A^+A com valor próprio n.

II (8 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

1. Suponha que o electrão se encontra no estado

$$\psi_a(x, 0) = \frac{1}{3} u_1(x) + A u_2(x) + B u_3(x)$$

Determine A e B (reais e positivos) sabendo que $\langle E \rangle = \frac{16}{3} E_1$.

2. Qual probabilidade de uma medida da energia do sistema dar o valor E_1?

3. Considere agora o estado

$$\psi_b(x, 0) = C u_1(x) + D u_2(x)$$

Determine C e D sabendo que $\langle x \rangle = \dfrac{a}{2} + \dfrac{8a}{3\sqrt{3}\,\pi^2}$ e que C e D são reais com $C > 0$.

4. Qual o valor médio do quadrado do momento no estado ψ_b? Se não resolveu a alínea c) apresente o resultado em função de C e D.

III (8 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

com $V_0 > 0$.

1. Escreva a equação para os estados ligados ($E < 0$) neste potencial.

2. Qual o valor mínimo de V_0 para que haja estados ligados?

3. Quantos estados ligados existem para $V_0 = \dfrac{32\hbar^2}{ma^2}$?

4. Esboce um gráfico da função de onda para o estado fundamental e para o último estado ligado (o de maior energia).

5. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x > a$ a função de onda é dada por

$$u_{II}(x) = e^{-ikx} + Re^{ikx}$$

   Calcule R. Mostre que $|R|^2 = 1$.

6. Justifique o resultado da alínea anterior em termos físicos. Para isso calcule o fluxo nas diferentes regiões e mostre que é conservado.

Formulário

- **Poço de potencial infinito**
  $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2\ .$$

- **Poço de potencial infinito simétrico**
  $V = 0$ para $-a/2 < x < a/2$ e $V = \infty$ para $x < -a/2$ e $x > a/2$. As funções próprias do operador Hamiltoniano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$u_n^-(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \qquad E_n^- = E_0\ (2n)^2$$

$$u_n^+(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \cos\left[(2n-1)\ \frac{\pi}{a}x\right] \qquad E_n^+ = E_0\ (2n-1)^2 \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

- **Primitivas para os problemas do poço infinito**

$$\int dy\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int dy\ \sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int dy\ y\sin^2(ny) = \frac{y^2}{4} - \frac{\sin(2ny)y}{4n} - \frac{\cos(2ny)}{8n^2}$$

$$\int dy\ y\sin(ny)\sin(my) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((m-n)y)}{(m-n)^2} - \frac{\cos((m+n)y)}{(m+n)^2} + \frac{y\sin((m-n)y)}{m-n} - \frac{y\sin((m+n)y)}{m+n}\right) \quad ; \quad m \neq n$$

- **Oscilador harmónico: Polinómios de Hermite**
  As funções próprias são

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\ H_n(y)\ e^{-y^2/2}$$

onde $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ e os primeiros polinómios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2x \\ H_2 &= 4x^2 - 2 \\ H_3 &= 8x^3 - 12x \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned}$$

As energias são dadas por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Oscilador harmónico: Operadores A e A^+**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(A^+ A + \frac{1}{2}\right)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \quad A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

com

$$\left[A, A^+\right] = 1$$

As relações inversas são

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A + A^+\right), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(A - A^+\right)$$

Os estados correctamente normalizados são

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(A^+\right)^n |0\rangle$$

com $A\,|0\rangle = 0$ e

$$A\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad A^+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$