Mecânica Quântica – Série 7 – Soluções

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008

`(Versão de 2 de Novembro de 2007)`

7.1 `Resposta no enunciado.`

7.2 `Resposta no enunciado.`

7.3 `Resposta:`

$l = 0$:

$$P_0^0(x) = 1$$

$l = 1$:

$$P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad P_1^0(x) = x, \quad P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ \sqrt{1-x^2}$$

$l = 2$:

$$P_2^2(x) = -3(x^2-1), \quad P_2^1(x) = -3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^0(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2-1)$$

$$P_2^{-1}(x) = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^{-2}(x) = \frac{1}{8}\,(1-x^2)$$

7.4 `Resposta no enunciado.` Pode visualizar as harmónicas esféricas com o `Mathematica`. Para isso precisa de carregar o package,

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`
```

Então com o comando

```
SphericalPlot3D[Abs[SphericalHarmonicY[l,m,teta,phi]],{teta,0,Pi},{phi,0,2 Pi}]
```

podem-se obter os gráficos da Fig. 1 (substituindo os valores correspondentes de l e m). Experimente para outros valores.

7.5 `Resposta:`

a) $H = \dfrac{L_z^2}{2I}$, $I = \dfrac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} a^2$, b) $E_n = \dfrac{\hbar^2 n^2}{2I}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ c) $\Delta E = \dfrac{\hbar^2}{2}\ \dfrac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}\ \dfrac{1}{a^2}$

Nota: Esta solução difere da solução anteriormente apresentada por considerar que o valor $n = 0$ também é possível. Depois de conversar com a Prof. Teresa Peña (que vos deu a aula e teve dúvidas na minha solução), acho que esta é a solução correcta. Pode causar alguma estranheza o nível mais baixo de energia ser zero (então e o princípio de incerteza de Heisenberg?) mas não devemos esquecer que a energia rotacional é só parte do problema. Há a energia translacional e a energia vibracional. Notar ainda que neste caso a função de onda não é zero, em contraste com o problema da partícula na caixa, onde o nível $n = 0$ era excluído por corresponder a uma função de onda identicamente zero e portanto não poder descrever a partícula (probabilidade nula). Aqui as funções de onda são proporcionais a $\exp(in\varphi)$ e portanto não se anulam para $n = 0$.

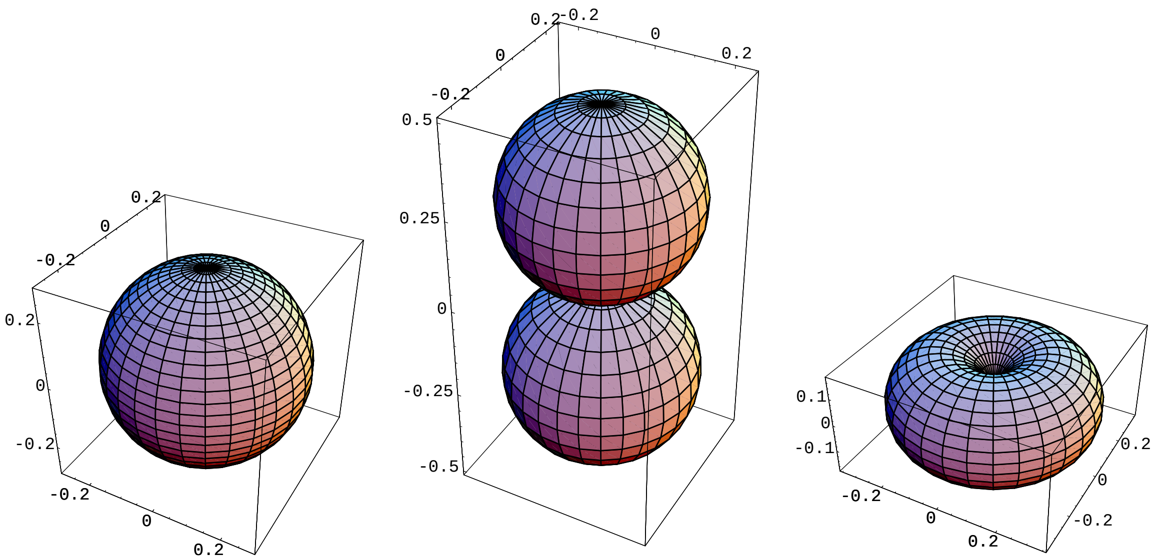

Figura 1: Gráficos de densidade para $|Y_{00}|$, $|Y_{10}|$ e $|Y_{11}|$

7.6 `Resposta:`

a) $\langle lm_1|\, L_x\, |lm_2\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)}\,\delta_{m_1,m_2+1} + \dfrac{\hbar}{2}\sqrt{(l+m_2)(l-m_2+1)}\,\delta_{m_1,m_2-1}$

b) $\langle lm_1|\, L_y\, |lm_2\rangle = \dfrac{\hbar}{2i}\sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)}\,\delta_{m_1,m_2+1} - \dfrac{\hbar}{2i}\sqrt{(l+m_2)(l-m_2+1)}\,\delta_{m_1,m_2-1}$

7.7 `Resposta:`

$$\begin{aligned}
\langle lm_1|\, L_x^2\, |lm_2\rangle &= \frac{\hbar^2}{4}\sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)}\sqrt{(l-m_2+1)(l+m_2+2)}\,\delta_{m_1,m_2+2} \\
&+\frac{\hbar^2}{4}\sqrt{(l-m_2)(l-m_2+1)}\sqrt{(l+m_2-1)(l-m_2+2)}\,\delta_{m_1,m_2-2} \\
&+\frac{\hbar^2}{4}(l+m_2)(l-m_2+1)\;\delta_{m_1,m_2} + \frac{\hbar^2}{4}(l-m_2)(l+m_2+1)\;\delta_{m_1,m_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle lm_1|\, L_y^2\, |lm_2\rangle &= -\frac{\hbar^2}{4}\sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)}\sqrt{(l-m_2+1)(l+m_2+2)}\,\delta_{m_1,m_2+2} \\
&-\frac{\hbar^2}{4}\sqrt{(l-m_2)(l-m_2+1)}\sqrt{(l+m_2-1)(l-m_2+2)}\,\delta_{m_1,m_2-2} \\
&+\frac{\hbar^2}{4}(l+m_2)(l-m_2+1)\;\delta_{m_1,m_2} + \frac{\hbar^2}{4}(l-m_2)(l+m_2+1)\;\delta_{m_1,m_2}
\end{aligned}$$

Verificação:

$$\langle lm_1|\, L_x^2 + L_y^2\, |lm_2\rangle = \langle lm_1|\, L^2 - L_z^2\, |lm_2\rangle = \hbar^2\left[l(l+1) - m_2^2\right]\;\delta_{m_1,m_2}$$

7.8 `Resposta:`

$$\text{b) } E_{lm} = \frac{\hbar^2}{2I_1}\, l(l+1) + \frac{I_1 - I_3}{2I_1 I_3}\, \hbar^2 m^2 \quad \text{c) } E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I_3}$$

7.9 `Resposta no enunciado.`

7.10 `Resposta:`

$$P(L^2 = 0) = 0; \quad P(L^2 = 6\hbar^2) = 1;$$

$$P(m=2) = P(m=-2) = \frac{1}{6}; \quad P(m=0) = 0; \quad P(m=1) = P(m=-1) = \frac{1}{3}\ .$$

7.11 `Resposta no enunciado.`

7.12 `Resposta no enunciado.`

7.13 `Resposta no enunciado.`