# Mecânica Quântica – Série 3

## Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008

(Versão de 01/10/2007)

**3.1** *Gasiorowicz 3.1*
[Resposta: $O_1$, $O_2$ e $O_6$]

**3.2** *Gasiorowicz 3.2*

**3.3** *Gasiorowicz 3.5*
[Resposta: $\Delta E = 1.15$ eV; $\lambda = 1075$ nm]

**3.4** *Gasiorowicz 3.6*
[Resposta: $n = 3.97 \times 10^7$; $\Delta E = 7.5 \times 10^{-8}$ eV]

**3.5** *Gasiorowicz 3.7*

**3.6** *Gasiorowicz 3.9*

**3.7** Os problemas em Mecânica Quântica, embora conceptualmente simples, são frequentemente difíceis devido às complicações dos cálculos. Isto faz com que na maioria dos exemplos sejam escolhidos casos muito simples. No entanto o programa `Mathematica` oferece uma ferramenta excelente para fazer contas em Mecânica Quântica. Para ilustrar isto vamos considerar novamente o problema anterior (*Gasiorowicz 3.9*).
a) Escreva um programa de `Mathematica` que tenha as funções de onda pares e ímpares. Notar que é preferível usar $(2m-1)$ e $2m$, respectivamente para as funções pares e ímpares, com $m = 1, 2, \ldots$. A largura do poço também deve ser incluída. Assim as funções deverão ser

$$\texttt{uplus}[x,m,a], \qquad \texttt{uminus}[x,m,a]$$

b) Verifique que as funções são ortonormadas, isto é,

$$\int_{-a/2}^{a/2} \texttt{uplus}[x,m,a]\texttt{uplus}[x,n,a]\ dx = \delta_{nm},$$
$$\int_{-a/2}^{a/2} \texttt{uminus}[x,m,a]\texttt{uminus}[x,n,a]\ dx = \delta_{nm},$$
$$\int_{-a/2}^{a/2} \texttt{uplus}[x,m,a]\texttt{uminus}[x,n,a]\ dx = 0$$

c) Use essas funções para mostrar que os coeficientes da expansão

$$\psi(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^+ u_m^+(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^+ t} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^- u_m^-(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^- t}$$

têm a seguinte expressão

$$A_m^+ = -\frac{2(-1)^m}{(2m-1)\pi}, \quad A_m^- = \frac{-1+(-1)^m}{m\pi}$$

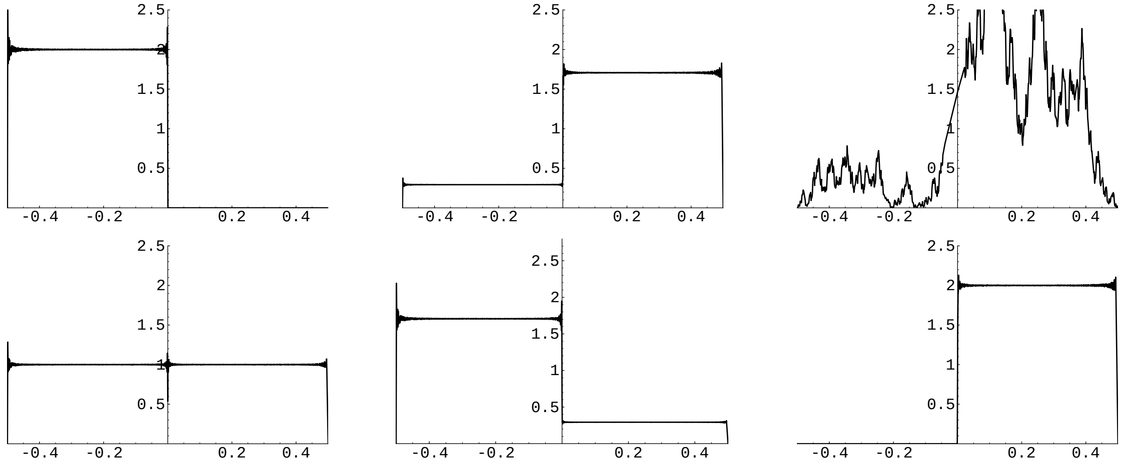


Figure 1: Densidade de probabilidade $|\psi(x,t)|^2$ no intervalo $[-0.5, 0.5]$ num poço de potencial com $a = 1$ para $\theta = 0, \pi/4, 1, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. $\psi(x,t)$ foi obtida somando 500 termos na expansão.

d) Utilize estes resultados para mostrar que a probabilidade de encontrar a partícula vai oscilar com o tempo. Para isso é conveniente parametrizar o tempo nas exponenciais da seguinte forma

$$e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^+ t} = e^{-i\theta(2m-1)^2}, \quad e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^- t} = e^{-i\theta(2m)^2}$$

onde

$$\theta = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}\frac{t}{\hbar}$$

é um ângulo sem dimensões.

Notar que se somar menos termos na expansão haverá um erro maior no resultado como se pode ver na figura seguinte

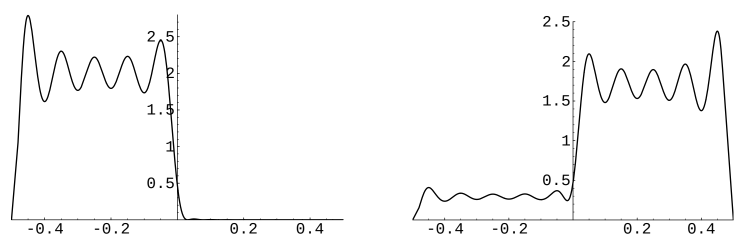


Figure 2: Densidade de probabilidade $|\psi(x,t)|^2$ no intervalo $[-0.5, 0.5]$ num poço de potencial com $a = 1$ para $\theta = 0, \pi/4$. $\psi(x,t)$ foi obtida somando 10 termos na expansão. Comparar com a Figura 1.

e) Use os resultados anteriores para verificar o problema *Gasiorowicz 3.10*. Notar que há uma gralha no enunciado. A expressão correcta é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**3.8** *Gasiorowicz 3.11*

`Soluções:`
$A = \sqrt{\frac{256}{63a}}$. $P(E = E_3) = \frac{25}{126}$

**3.9** *Gasiorowicz 3.14*
`Soluções:`

$\phi(p) = \dfrac{1}{(\alpha\pi\hbar^2)^{1/4}}\, e^{-p^2/(2\alpha\hbar^2)}$. $\langle E \rangle = \dfrac{\hbar^2\alpha}{4m}$.

**3.10** *Gasiorowicz 3.16*

**3.11** *Gasiorowicz 3.17*