

Mecânica Quântica – Série 11

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008

(Versão de 19 de Novembro de 2007)

11.1 Gasirowicz 11.1

Nota:

- Calcule a correcção de 2ª ordem e compare com o desenvolvimento em série do resultado exacto até à 2ª ordem em λ .

11.2 Gasirowicz 11.2

Comentário: Qual a razão para o resultado?

11.3 Gasirowicz 11.5

Notas:

1. Exprima a perturbação em termos de μ , α , a_0 e R . Mostre que se obtém:

$$H_1 = \begin{cases} \mu c^2 \alpha \left(-\frac{3a_0}{2R} + \frac{a_0}{r} + \frac{1}{2} \frac{a_0 r^2}{R^3} \right) & 0 < r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

2. Utilize o `mathematica` para fazer os integrais. Se os fizer “à mão” utilize

$$\int dy y^n e^{-y} = -e^{-y} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} y^k$$

3. Mostre que o resultado tende para zero quando $R \rightarrow 0$. Mostre que

$$\Delta E_{10} \simeq \frac{2}{5} \mu c^2 \alpha \left(\frac{R}{a_0} \right)^2, \quad \Delta E_{21} = \Delta E_{20} \simeq \frac{1}{1120} \mu c^2 \alpha \left(\frac{R}{a_0} \right)^4$$

4. Calcule numericamente a correcção quando $R = 10^{-15}$ m = 1 fermi, isto é a dimensão do protão. Notar que como $R \ll a_0$ só vai conseguir um resultado que faça sentido se usar uma precisão de mais de 40 dígitos ou, em alternativa, usar os resultados da expansão em série em termos de R/a_0 .
5. Explique porque é que $\Delta E_{2l} \ll \Delta E_{10}$.

11.4 Gasirowicz 11.6

Nota:

1. Este problema faz-se mais facilmente se usar os operadores A e A^+ .
2. Faça também com as funções próprias das coordenadas.

11.5 *Gasiorowicz 11.7*

11.6 *Gasiorowicz 11.11*

Notas:

1. Comece por resolver o problema exactamente. Para isso faça uma rotação de 45° nas coordenadas x, y .
2. Expanda o resultado exacto para os valores próprios da energia até à ordem λ^2 .
3. Resolva agora o problema em teoria das perturbações. Comece por mostrar que o estado fundamental só tem correcção em ordem λ^2 . Verifique que está de acordo com a expansão em λ do resultado exacto.
4. Resolva agora o problema das correcções ao primeiro estado excitado que é degenerado. Verifique novamente que o resultado está em acordo com a expansão do resultado exacto.

11.7 *Gasiorowicz 11.12*

Notas:

1. Notar que este problema não é propriamente um problema de teoria de perturbações. Se tomarmos como eixo dos z a direcção do campo \vec{B} , os estados próprios do átomo de hidrogénio, $|n, l, m\rangle$ são também estados próprios do hamiltoniano de interacção e portanto o cálculo das energias é trivial.
2. Este exemplo é o chamado *efeito de Zeeman*. A não observação dum número ímpar de estados desdobrados $(2l + 1)$, como resulta na resolução deste problema, levou Pauli em 1924 a propor a ideia do spin.

11.8 *Gasiorowicz 11.13*

Nota: Na alínea b) considere que $\lambda, v \neq u$ são reais.

11.9 Calcule os integrais necessários para obter

$$\langle \phi_{200} | z | \phi_{210} \rangle = -3a_0$$

onde a_0 é o raio de Bohr. Este resultado é importante para calcular o *efeito de Stark* no átomo de hidrogénio para $n = 2$.