

# Mecânica Quântica – Série 1

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008

## 1.1 *Gasiorowicz 1.2*

*Dados:* A densidade de energia por unidade de frequência é dada pela fórmula de Planck

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

onde  $T$  é a temperatura absoluta,  $k = 1.3807 \times 10^{-23}$  J/K a constante de Boltzmann e  $h = 6.6261 \times 10^{-34}$  Js.

**1.2** Mostre que a fórmula de Planck se reduz à expressão clássica de Rayleigh para baixas frequências

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

Verifique que a constante de Planck desaparece neste limite clássico!

**1.3** Partindo da fórmula de Planck para a *radiância*  $R(\lambda, T)$ , a potência da radiação por unidade de área do corpo negro,

$$R(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)},$$

deduza a lei de Stefan-Boltzmann. Determine a constante de Stefan-Boltzmann  $\sigma$ , utilizando os valores conhecidos de  $k$  e  $h$ , e compare com o valor experimental de  $\sigma = 5,6703 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ .

*Sugestão:* Uma mudança de variáveis é útil. O seguinte resultado pode ser utilizado:

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

**1.4** Uma lâmpada incandescente de 100 W contém um filamento de metal à temperatura 2500 °C. Este tipo de lâmpadas é eficiente para iluminar as nossas casas?

Para decidir esta questão, calcule a fração da potência que a lâmpada emite na parte visível do espectro (com um c.d.o. entre 400 e 700 nm) relativamente à potência total. Em que parte do espectro é emitida a maior parte da potência? Trate o filamento incandescente como um corpo negro.

*Nota:* Este problema não pode ser resolvido analiticamente. Utilize um método numérico (por exemplo usando o *Mathematica*) ou qualquer outra aproximação adequada para obter uma estimativa do resultado. Utilize os resultados do problema anterior. [Resposta: 5.7%]

**1.5** Veja no site do livro na net [www.wiley.com/college/gasiorowicz](http://www.wiley.com/college/gasiorowicz) a derivação de Einstein da fórmula de Planck.

**1.6** *Gasiorowicz 1.3* [Resposta: 1.95 eV]

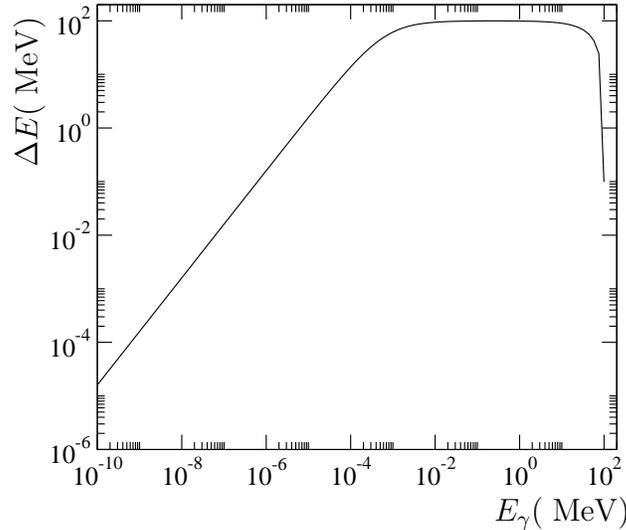
1.7 *Gasiorowicz 1.4*

1.8 *Gasiorowicz 1.6* [Respostas: 83.6 keV; 16.4 keV; 39.9°]

1.9 *Gasiorowicz 1.7*

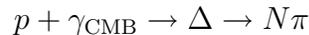
[Resposta:  $E_\gamma = 4.14 \times 10^{-4}$  eV;  $\Delta E \simeq 4 \left(\frac{E_e}{m_e c^2}\right)^2 E_\gamma = 6.37 \times 10^{-5}$  MeV]

Como subproduto deste problema, reproduza o seguinte gráfico da variação da energia máxima perdida pelo electrão,  $\Delta E$ , em função da energia do fotão, para  $E_e = 100$  MeV.



Mostre ainda que a energia total no centro de massa no limite em que  $E_\gamma \ll m_e$  é  $\sqrt{s} \simeq m_e$ .

1.10 Em Física dos raios cósmicos há um efeito muito importante, o chamado *GZK cutoff*, assim designado a partir das iniciais dos seus autores, Greisen, Zatsepin e Kuzmin. No essencial, diz que os raios cósmicos que chegam até nós de fontes extragalácticas, estão limitados na sua energia máxima. Isto ocorre porque os raios cósmicos colidem com a radiação de fundo *Cosmic Microwave Background (CMB)* (ver problema anterior) e a partir duma certa energia vão poder produzir partículas como a ressonância  $\Delta(1232)$  com massa  $m_\Delta = 1232$  MeV/ $c^2$  e assim perder energia. Considere que os raios cósmicos são prótons e que colidem através do processo



onde  $N$  é um nucleão (próton ou neutrão).

a) Aplique a lei do corpo negro  $\lambda_{\text{max}} T = 2.898 \times 10^{-3}$  m.K para determinar o comprimento de onda e a energia dos fotões da radiação de fundo no máximo da intensidade. Compare com os valores do problema anterior.

b) Mostre que a energia do centro de massa necessária para atingir a ressonância do  $\Delta(1232)$  ocorre quando a energia dos prótons é

$$E_p = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{4E_\gamma}$$

Como compara este valor com o cálculo mais exacto  $E_p \simeq 6 \times 10^{19}$  eV? Recorde que o corpo negro tem um espectro de comprimentos de onda e que portanto um cálculo mais exacto deve incluir esse facto.

**1.11** *Gasiorowicz 1.8*

**1.12** *Gasiorowicz 1.10*

**1.13** Veja no site do livro na net [www.wiley.com/college/gasiorowicz](http://www.wiley.com/college/gasiorowicz) o cálculo do tempo de vida dum átomo de Rutherford.

**1.14** *Gasiorowicz 1.16*