Mecânica Quântica – Série 1 – Soluções

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008

1.1 O zero da derivada ocorre para o zero da equação

$$5 - x = 5e^{-x}$$

com $x = h\nu/k_BT$. O zero ocorre para $x_0 = 4.965$ e portanto

$$\lambda_{\rm max}T = 2.89 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

1.2 Se $h\nu \ll k_BT$ então $e^{h\nu/(k_BT)} - 1 \simeq (1 + \frac{h\nu}{k_BT} - 1) \simeq h\nu/(k_BT)$ e portanto

$$u(\nu, T) \simeq \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{k_BT}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_BT$$

1.3 Integrando na frequência obtemos:

$$P(T) = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}\, T^4 \equiv \sigma T^4$$

1.4 `[Resposta: 5.7%]`

1.5 Ver o site.

1.6 `[Resposta: 1.95 eV]`

1.7 `[Resposta:` $h = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} \Big[T_{max}(\lambda_1) - T_{max}(\lambda_2)\Big] = 6.642 \times 10^{-34}$ J.s `]`

1.8 `[Respostas: 83.6 keV; 16.4 keV; 39.9°]`

1.9 `[Resposta:` $E_\gamma = 4.14 \times 10^{-4}$ eV`;` $\Delta E \simeq 4\left(\frac{E_e}{m_ec^2}\right)^2 E_\gamma = 6.37 \times 10^{-5}$ MeV`]`

1.10 a) De $\lambda_{\rm max}T = 2.898 \times 10^{-3}$ m.K, com $T = 2.72$ K, obtemos

$$\lambda_{\rm max} = 1.06 \times 10^6 \text{ nm}, \quad \text{e portanto} \quad E_\gamma = \frac{hc}{\lambda_{\rm max}} = 1.17 \times 10^{-3} \text{ eV}.$$

b) `Cinemática Relativista`

Define-se o quadrivector momento na forma:

$$p = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) = (\frac{E}{c}, \vec{p})$$

que obedece à seguinte regra de produto interno (invariante para tranformações de Lorentz):

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}\cdot\vec{p} = m^2c^2$$

onde se usou $E=\sqrt{|\vec{p}|^2c^2+m^2c^4}$. O referencial do `centro de massa`, mais rigorosamente referencial `CM`, é o referencial onde o momento linear total é zero. Voltando ao problema,

$$p_1+p_2=P$$

No Lab:

$$p_1=(E_1/c,0,0,|\vec{p}_1|),\quad p_2=(E_\gamma/c,0,0,-E_\gamma/c),\quad P=((E_1+E_\gamma)/c,0,0,|\vec{p}_1|-E_\gamma/c)$$

com $|\vec{p}_1|=\sqrt{E_1^2/c^2-m^2c^2}$.

No CM:

$$P_{\rm CM}=(\sqrt{s}/c,0,0,0)$$

Como P^2 é um invariante de Lorentz pode ser calculado em qualquer referencial de inércia. Assim temos

$$s=P_{\rm CM}^2c^2=P_{\rm Lab}^2c^2=(E_1+E_\gamma)^2-(|\vec{p}_1|c-E_\gamma)^2=m_p^2c^4+2|\vec{p}_1|cE_\gamma$$

A condição de ressonância é $s=m_\Delta^2c^4$ e portanto obtemos

$$2E_\gamma(E_1+|\vec{p}_1|c)=(m_\Delta^2-m_p^2)c^4$$

Como $E_1\gg m_p$ temos $|\vec{p}_1|c\simeq E_1=E_p$ e vem finalmente

$$E_{\rm p}=\frac{(m_\Delta^2-m_p^2)c^4}{4E_\gamma}\simeq 1.36\times10^{20}\ \text{eV}.$$

1.11 `[Resposta:` $E_\gamma=544.03\ \text{keV}$`]`

1.12 `[Resposta:` `a)` $T_e=0.133\ \text{keV}$`;` `b)`$T_{He}=1.8\times10^{-2}\ \text{eV}$`]`

1.13 Ver o site.

1.14 `[Resposta:` `a)` $E_n=\dfrac{\hbar^2n^2}{2I}, n=1,2,3\cdots$

`b)` $\nu_{\rm classica}=\dfrac{\hbar}{2\pi}\dfrac{n}{I}$, $\nu_{\rm Bohr}=\dfrac{\hbar}{2\pi}\dfrac{n_2^2-n_1^2}{2I}\simeq\dfrac{\hbar}{2\pi}\dfrac{2n_1}{2I}\simeq\nu_{\rm classica}$ `para` $n_2=n_1+1$ `e` $n_1\gg1$`]`