Mecânica Quântica – Exame Exemplo

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008
Duração 3h

1. Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.
2. Para quem já fez o 1º teste e quiser fazer só o 2º teste, terá que responder às perguntas IV, V, VI e VII, que valerão o dobro para esse caso e a duração será de 1h30m.

I (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

a) A equação de Schrödinger independente do tempo só tem soluções para $E > V_{min}$ onde V_{min} é o mínimo valor do potencial.

b) O estado ligado de energia mínima no poço de potencial quadrado centrado em $x = 0$ é simétrico para a troca $x \rightarrow -x$.

c) Considere um poço de potencial a uma dimensão, isto é, $V = -V_0, \ -a < x < a$ e $V = 0, \ x > |a|$. Existe pelo menos um estado ligado com $-V_0 < E < 0$.

d) No oscilador harmónico, a uma dimensão, tem-se sempre

$$\left\langle n|x^2|n+1\right\rangle = 0$$

II (4 valores)

Uma partícula encontra-se no potencial dum oscilador harmónico unidimensional com frequência angular clássica ω. Em $t = 0$, a sua função de onda é

$$\Psi(x,0) = A\left[2u_0(x) - 4u_1(x) + u_3(x)\right],$$

onde $u_n(x)$ é a solução normalizada da equação de Schrödinger independente do tempo, com a energia $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Qual é a probabilidade de obter a energia E_1 numa medição?

b) Calcule o valor médio da energia da partícula (em múltiplos de $\hbar\omega$).

c) Escreva a expressão para $\Psi(x,t)$

d) Determine o tempo mínimo T ao fim do qual se tem $\Psi(x,0) = \Psi(x,T)$

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda'}{a}\delta(x-a) + \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

com $V_0 > 0$ e $\lambda' = \sqrt{\dfrac{mV_0a^2}{8\hbar^2}}$.

1. Mostre que as equações para os estados ligados se escrevem:
   - $-V_0 < E < 0$
   $$-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2} - \lambda'}{y}$$
   com $y = \sqrt{2ma^2(V_0 - |E|)/\hbar^2}$, $\lambda = 2mV_0a^2/\hbar^2$.
   - $E < -V_0$
   $$\tanh y = \frac{y}{\lambda' - \sqrt{\lambda + y^2}}$$
   com $y = \sqrt{2ma^2(|E| - V_0)/\hbar^2}$
2. Há sempre estados ligados neste potencial? Discuta a resposta graficamente dum modo aproximado.
3. Quantos estados ligados existem para $V_0 = \dfrac{32\hbar^2}{ma^2}$?
4. Considere agora o problema da difusão nesse potencial, isto é, admita que $E > 0$ e que para $x > a$ a função de onda é dada por
   $$u_{II}(x) = e^{-ikx} + Re^{ikx}$$
   Calcule R. Mostre que $|R|^2 = 1$.
5. Justifique o resultado da alínea anterior em termos físicos. Para isso calcule o fluxo nas diferentes regiões e mostre que é conservado.

IV (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

a) O operador $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é hermítico.

b) Em três dimensões as funções de onda aceitáveis tem que decrescer mais depressa que $1/r^2$ quando $r \to \infty$.

c) Os resultados duma medida do spin dum electrão segundo uma dada direcção são dados por

$$\frac{\hbar}{2}\cos\alpha, \quad \text{em que} \quad 0 \le \alpha \le \pi$$

d) No estado fundamental do átomo de hidrogénio o desdobramento hiperfino é maior que o desdobramento devido ao acoplamento spin-órbita.

V (2 valores)

Um electrão no potencial de Coulomb do átomo de hidrogénio encontra-se no estado seguinte

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R_{21}(r)\,[a\,Y_{1,1} + b\,Y_{1,0} + c\,Y_{1,-1}]$$

com as constantes a, b e c reais e positivas.

a) Qual o valor médio da energia neste estado?

b) Determine as constantes a, b e c sabendo que $\langle L_z \rangle = 0$, $\langle L_x \rangle = \frac{\sqrt{8}}{3}\hbar$ e que $a < b$.

VI (3 valores)

O Hamiltoniano para o átomo de Hidrogénio num campo magnético exterior constante $\vec{B}$, se desprezarmos o efeito do spin, é dado por

$$H = H_0 + \frac{e}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B}, \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r}$$

Considere a transição do estado $n = 3, l = 2$ para o estado $n = 2, l = 1$, que na ausência de campo magnético corresponde a uma única risca.

a) Calcule o efeito da aplicação do campo $\vec{B}$ nas energias desses níveis, calculando as diferenças de energia de cada nível desdobrado em relação ao caso em que $\vec{B} = 0$. Para $n = 2, l = 1$, apresente os resultados numéricos em eV para $B = 1$ T.

b) Faça um esquema do novo espectro e das transições possíveis sujeitas às regras de selecção $\Delta m_l = 0, \pm 1$.

c) Em quantas riscas fica desdobrada a transição?

VII (3 valores)

Considere um átomo de deutério. Este é formado por um núcleo com um protão e um neutrão, o deuterão e por um electrão. A combinação dos spins do protão e neutrão estão num estado de spin 1 (a combinação tripleto dos spins do neutrão e protão tem energia mais baixa), com o momento magnético

$$\vec{M}_d = \frac{e g_d}{2m_d}\vec{S}_d$$

com $g_d = 1.71$ e $m_d = 1876.124$ MeV/c^2. O Hamiltoniano para a interacção hiperfina é então

$$H_{\text{HF}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\, g_d}{4m_d m_e c^2}\left[\frac{3(\vec{S}_e\cdot\vec{e}_r)(\vec{S}_d\cdot\vec{e}_r) - \vec{S}_e\cdot\vec{S}_d}{r^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{S}_e\cdot\vec{S}_d\delta^3(\vec{r})\right]$$

a) Considere o estado fundamental do deutério ($n = 1$). Mostre que a correcção à energia do estado fundamental do deutério se pode escrever na forma

$$E_0^{(1)} = \frac{4}{3}m_e c^2\alpha^4\, g_d\frac{m_e}{m_d}\frac{\left\langle\vec{S}_e\cdot\vec{S}_d\right\rangle}{\hbar^2}$$

b) Calcule $\left\langle\vec{S}_e\cdot\vec{S}_d\right\rangle$.

c) Determine as energias (em eV) de cada nível desdobrado do estado fundamental do deutério e o comprimento de onda da transição entre os dois níveis.