Exame Exemplo

I

a) Verdadeira. Doutra forma $\frac{d^2u}{dx^2}<0$ quando $x\to\infty$ e não seria normalizável

b) Verdadeira. O estado de energia mínima é sempre o que tem menos nodos.

c) Verdadeira. As soluções pares têm sempre solução para qualquer V_0

d) Verdadeira. $x^2 \propto A^2+(A^\dagger)^2+AA^\dagger+A^\dagger A$ e $\langle n|x^2|m\rangle$ só é diferente de zero se $n=m\pm 2$ ou $n=m$.

II

a) Pelo postulado da expansão

$$\Psi(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x)$$

os únicos $A_n\neq 0$ são $A_0=2A$; $A_1=-4A$; $A_2=A$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|^2=1 \Rightarrow A^2(4+16+1)=1 \Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{21}}$ $(A>0)$

logo $P(E=E_1)=|A_1|^2=\frac{16}{21}$.

b) $\langle H\rangle = |A_0|^2E_0+|A_1|^2E_1+|A_2|^2E_2$

$$=\frac{1}{21}\frac{\hbar\omega}{2}\left(4+16\times 3+1\times 5\right)=\frac{\hbar\omega}{2}\,\frac{57}{21}$$

$$=\frac{\hbar\omega}{2}\cdot\frac{19}{7}$$

c) $$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{21}}\left[2u_0(x)\,e^{-i\frac{\hbar\omega}{2\hbar}t}-4u_1(x)\,e^{-i\frac{3\hbar\omega}{2\hbar}t}+u_3(x)\,e^{-i\frac{5\hbar\omega}{2\hbar}t}\right]$$

d) $\psi(x,T)=\psi(x,0) \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{2\hbar}T=2\pi \Rightarrow T=\frac{4\pi}{\omega}$

A equação de Schrödinger a 1 dimensão é

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]u(x) = 0$$

1) a) Estados ligados $-V_0 < E < 0$. Para $x<0$ $u(x)=0$. Para as outras regiões

$\underline{0<x<a}$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[V_0 - |E|\right]u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} + q^2u(x) = 0$$

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0 - |E|\right)}$$

$x>a$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}|E|u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2u(x) = 0$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$\begin{cases} u_I(x) = A\sin qx & u_I(0)=0 \\ u_{II}(x) = Be^{-\alpha x} & u_{II}(\infty)=0 \end{cases}$$

em $x=a$

$$\begin{cases} A\sin qa = Be^{-\alpha a} \\ -\alpha Be^{-\alpha a} - Aq\cos qa = -\frac{\lambda'}{a}Be^{-\alpha a} \end{cases}$$

donde $\quad -\alpha Be^{-\alpha a} - q\cot qa\, Be^{-\alpha a} = -\frac{\lambda'}{a}Be^{-\alpha a}$

ou seja $\boxed{-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2} - \lambda'}{y}}$ $\qquad y = qa = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}\left(V_0 - |E|\right)}$

$$\alpha a = \sqrt{\lambda - y^2}$$

b) $E < -V_0$

Neste caso em $0<x<a$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\left(|E| - V_0\right)u = \frac{d^2u}{dx^2} - k^2u = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(|E| - V_0\right)}$$

e portanto

$$\begin{cases} u_I(x) = A \sinh \kappa x \\ u_{II}(x) = B e^{-\alpha x} \end{cases}$$

em $x = a$

$$\begin{cases} A \sinh \kappa a = B e^{-\alpha a} \\ -\alpha B e^{-\kappa a} - A\kappa \cosh \kappa a = -\frac{\lambda'}{a} B e^{-\alpha a} \end{cases}$$

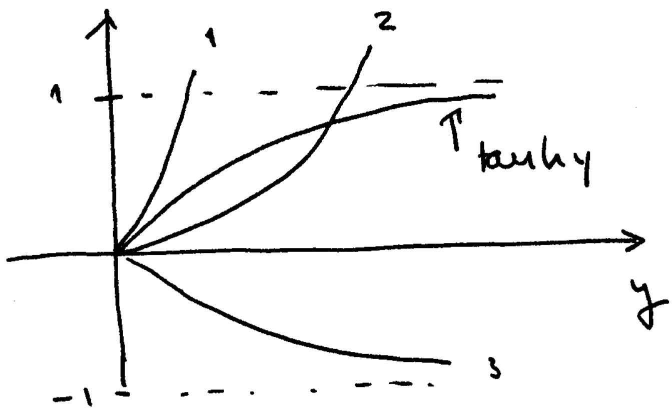
ou seja

$$\cosh \kappa a = \frac{\lambda' - \alpha a}{\kappa a}$$

e portanto ($y = \kappa a$)

$$\boxed{\tanh y = \frac{y}{\lambda' - \sqrt{\lambda + y^2}}}$$

2) Para $E < -V_0$



1,2,3 vários casos dependendo de λ e λ'.

Seja $f(y) = \dfrac{y}{\lambda' - \sqrt{\lambda + y^2}} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{1}{\lambda' - \sqrt{\lambda}}$

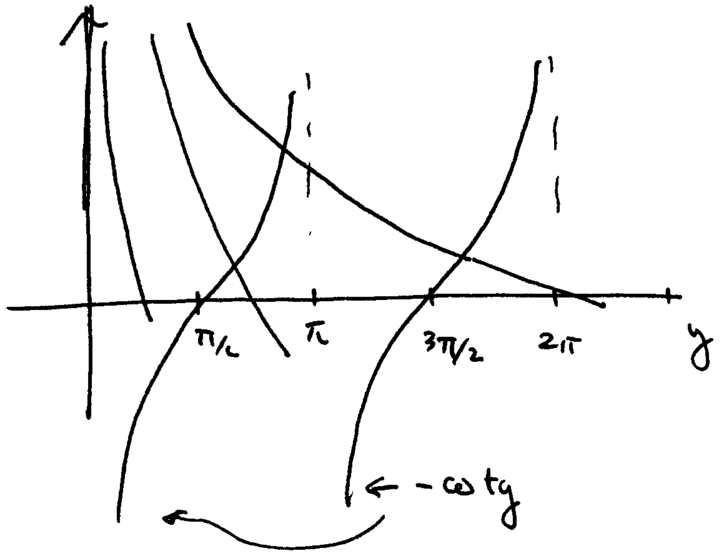
Condição: $\quad 0 < \dfrac{1}{\lambda' - \sqrt{\lambda}} < 1 \Rightarrow \lambda' > \sqrt{\lambda} + 1$

Mas $\lambda' = \sqrt{\dfrac{m V_0 a^2}{8\hbar^2}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2 m V_0 a^2}{\hbar^2}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\lambda} \Rightarrow$ Não há solução para $E < -V_0$

Para $-V_0 < E < 0$

temos $$-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2} - \lambda'}{y}$$. Como se vê no gráfico

haver estados ligados depende dos valores de λ, λ'



Por exemplo $\lambda = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \Rightarrow \lambda' = \frac{\pi}{16}$

o valor máximo de y é $y_{max} = \pi/4$ e temos

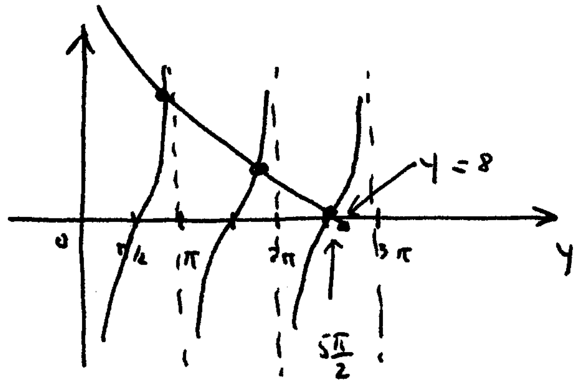
$$-\cot y_{max} = -1 < \frac{\sqrt{\lambda - y_{max}^2} - \lambda'}{y_{max}} = \frac{-\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}$$

e não haverá. Para valores maiores de λ já há. Numericamente $\lambda > 1.7579$

3) $V_0 = \frac{32\hbar^2}{ma^2} \Rightarrow \lambda = 64 \Rightarrow \lambda' = 2 \Rightarrow y_{max} = \sqrt{\lambda} = 8 > \frac{5\pi}{2}$

Como $\frac{5\pi}{2} < y_{max} < 3\pi$ temos a situação da

próxima figura



3 $\in$ stados lig. dos.

4) $\underline{E>0}$ $\quad (u_I(0)=0)$

$$u_I(x) = A\sin qx \qquad\qquad q=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}$$

$$u_{II}(x) = e^{-ikx} + R\,e^{ikx} \qquad\qquad k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$\underline{\text{em } x=a}$

$$\begin{cases} A\sin qa = e^{-ika} + R\,e^{ika} \\ -ik\left(e^{-ika} - Re^{ika}\right) - Aq\cos qa = -\frac{\lambda'}{a}\left(e^{-ika} + R\,e^{ika}\right) \end{cases}$$

ou

$$-ika\left(e^{-ika} - Re^{ika}\right) - qa\left(e^{-ika} + Re^{ika}\right)\cot qa = -\lambda'\left(e^{-ika} + Re^{ika}\right)$$

$$Re^{ika}\left(ika - qa\cot qa + \lambda'\right) = e^{-ika}\left(ika + qa\cot qa - \lambda'\right)$$

$$R = e^{-2ika}\,\frac{qa\cot qa - \lambda' + ika}{-qa\cot qa + \lambda' + ika} \Rightarrow |R| = 1$$

5) $$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{d\psi^*}{dx}\right)$$

$$j_I(x) = 0 \qquad\qquad j_{II}(x) = \frac{\hbar k}{m}\left(-1 + |R|^2\right) = 0$$

a) verdadeira. $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j P_k$ com $\underline{k \neq j}$ e $[x_j, P_k] = 0$

b) Falso. Basta $\frac{1}{r^{3/2+\varepsilon}}$

c) Falso. Só pode dar $\pm \frac{\hbar}{2}$

d) Falso. No estado fundamental $l=0$ e o spin-órbita é nulo. Logo o hiperfino é maior.

VI

a) Trata-se dum estado que é uma combinação linear de estados com $n=2$. Logo

$$\langle H \rangle = E_2 = -13.6 \frac{1}{4} \text{ eV}$$

b) A função R_{21} é normalizada e as harmónicas esféricas ortonormalizadas isto é,

$$\int d\Omega \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\, Y_{l'm'}(\theta\varphi) = \delta_{ll'}\, \delta_{mm'}$$

pelo que devemos ter

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$$

ou (reais)

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1}$$

Calculemos agora $\langle L_z \rangle$.

$$\langle L_z \rangle = \hbar |a|^2 + 0|b|^2 - \hbar |c|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c \quad \text{(real e positivos)}$$

Calculemos $\langle L_x \rangle$. Temos $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ e

$$L_x \big(a|1\,{+}1\rangle + b|1 0\rangle + c|1\,{-}1\rangle \big)$$

$$= \frac{1}{2}(L_+ + L_-)\big(a|1\,{+}1\rangle + b|1 0\rangle + c|1\,{-}1\rangle \big)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(+ b\sqrt{2}\,|11\rangle + c\sqrt{2}\,|10\rangle + a\sqrt{2}\,|10\rangle + b\sqrt{2}\,|1\,{-1}\rangle \right)$$

$$= \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\left(b\,|11\rangle + 2a\,|10\rangle + b\,|1\,{-1}\rangle \right)$$

onde se usou $a = c$. Usando agora a ortonormalização dos estados $|l m\rangle$ obtemos

$$\langle L_x \rangle = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\left(ab + 2ab + ab \right) = 2\sqrt{2}\,\hbar\, ab$$

Comparando com $\langle L_x \rangle = \frac{\sqrt{8}}{3}\hbar$ obtemos

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 1 \\ ab = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Este sistema tem as soluções

$$a = c = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

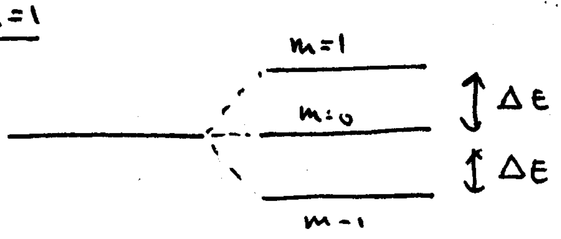
$$\boxed{a = c = \sqrt{\frac{1}{6}} \;;\; b = \sqrt{\frac{2}{3}}} \quad \checkmark \qquad \underline{a < b}$$

VI

a) As funções próprias do átomo de Hidrogénio não perturbado $|n\, l\, m_l\rangle$ são funções próprias da perturbação, logo

$$E^{(1)}_{n,m} = \frac{e\hbar}{2m} m_l B \equiv \mu_B B m_l \qquad \mu_B = 5.78\times10^{-5}\ \text{eV/T}$$

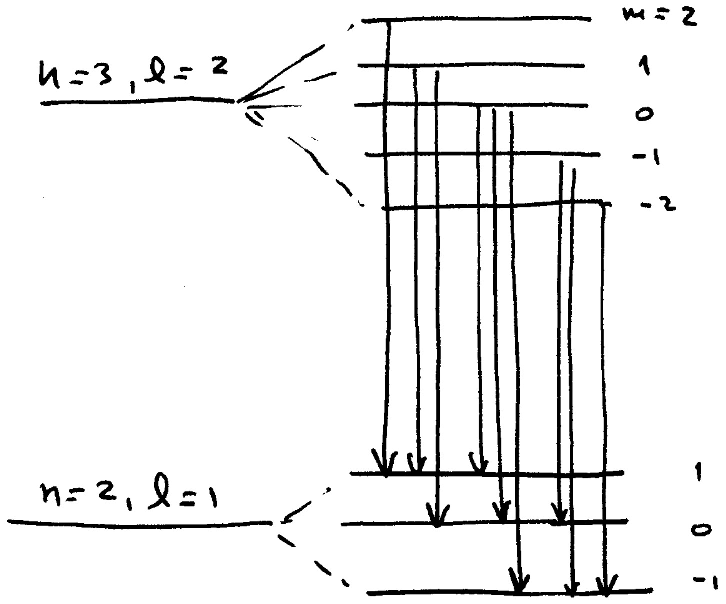
$\underline{n = 2,\ l = 1}$



$$\Delta E = \mu_B B = 5.78\times10^{-5}\ \text{eV}$$

para $B = 1\text{T}$

b)



) 9 riscas.

VII

a) No estado fundamental $l=0$ e portanto há simetria esférica.

Então
$$\int d\Omega\, (\vec{S}_e\cdot\vec{e}_r)(\vec{S}_d\cdot\vec{e}_r) = \frac{1}{3}\int d\Omega\, \vec{S}_e\cdot\vec{S}_d$$

pelo que o primeiro termo no parêntesis não contribui.

Assim

$$E_0^{(1)} = \langle 100|H_{HF}|100\rangle = a\,\langle \vec{S}_e\cdot\vec{S}_d\rangle\, \frac{8\pi}{3}\int d^3r\, |\psi_{100}(r)|^2\,\delta^3(\vec{r})$$

Com
$$a = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{2g_d}{4m_d m_e c^2}$$

Então

$$E_0^{(1)} = \frac{8\pi}{3}\, a\,\langle \vec{S}_e\cdot\vec{S}_d\rangle\, |\psi_{100}(0)|^2$$

Usando

$$|\psi_{100}(0)|^2 = \frac{4}{4\pi}\,\frac{1}{a_0^3} = \frac{1}{\pi}\,\frac{m_e^3 c^3\alpha^3}{\hbar^3}$$

obtemos

$$E_0^{(1)} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2 g_d}{4 m_d m_e c^2} \frac{4 m_e^3 c^3 \alpha^3}{4\pi \, \hbar^3} \langle \vec{S}_e \cdot \vec{S}_d \rangle$$

$$= \frac{4}{3} m_e c^2 \alpha^4 g_d \frac{m_e}{m_d} \frac{\langle \vec{S}_e \cdot \vec{S}_d \rangle}{\hbar^2}$$

b) $\vec{S}_e$ spin 1/2 ; $\vec{S}_d$: spin 1

$\vec{S} = \vec{S}_e + \vec{S}_d$ $\qquad$ S spin 3/2 ou 1/2.

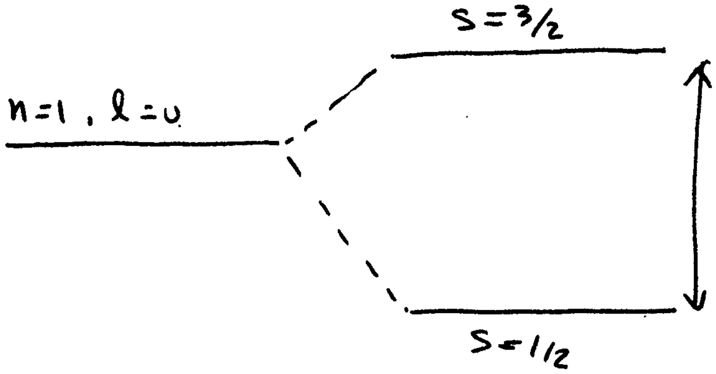
$$\vec{S}_e \cdot \vec{S}_d = \frac{1}{2}\left[S^2 - S_e^2 - S_d^2 \right] = \frac{\hbar^2}{2}\left[s(s+1) - \frac{3}{4} - 2 \right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[s(s+1) - \frac{11}{4} \right]$$

Logo

$$\frac{\langle \vec{S}_e \cdot \vec{S}_d \rangle}{\hbar^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & s = 3/2 \\ -1 & s = 1/2 \end{cases}$$

c)



$$\Delta E = \frac{4}{3} m_e c^2 \alpha^4 g_d \frac{m_e}{m_d} \frac{3}{2}$$

$$= 1.35 \times 10^{-6} \, \text{eV}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \times 10^{-7} \, \text{cm} \cdot \text{eV}}{1.35 \times 10^{-6} \, \text{eV}} = 91.8 \, \text{cm}$$